ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLV

1948

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IV.

(1° semestre 1948)

ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1948

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 gennaio 1948.

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

IL PROBLEMA DEL PRIMATO SULLA INVENZIONE DELLA RADIO

Comunicazione (*) del Corrisp. G. COLONNETTI

Io sono grato alla Presidenza dell'Accademia che mi ha offerto l'occasione per tentare una messa a punto di quel problema del primato nella invenzione della radio che, in occasione della recente ricorrenza cinquantenaria, è stato con singolare insistenza ufficialmente riproposto dalle maggiori autorità scientifiche della Unione delle Repubbliche Sovietiche.

Al mio invito a partecipare al Congresso che, in onore e memoria di Marconi, si tenne recentemente presso il nostro Consiglio Nazionale delle Ricerche, il prof. Vavilov, Presidente dell'Accademia delle Scienze della Unione Sovietica rispondeva il 16 settembre ultimo scorso in questi termini:

«L'Accademia delle Scienze dell'URSS vi è grata del cortese invito a prender parte al Congresso Internazionale organizzato dal Consiglio Nazionale delle Ricerche a Roma in onore del celebre inventore Guglielmo Marconi.

«I meriti del vostro compatriota per lo sviluppo e le grandi applicazioni pratiche della radio son noti nel mondo intiero ed altamente apprezzati nell'Unione Sovietica.

«Ma, in realtà, la scoperta della radio data dal 7 maggio del 1895, giorno in cui il fisico russo A.S. Popov ha per la prima volta presentata in una seduta della Società russa di Chimica e di Fisica di Pietroburgo la dimostrazione di un circuito radio ricettore capace di registrare dei segnali. Il 24 marzo successivo egli realizzò per la prima volta col suo circuito una trasmissione radiotelegrafica alla distanza di 250 metri, emettendo e ricevendo coll'alfabeto Morse le parole " Heinrich Hertz ".

(*) Letta nella seduta a Classi riunite del 13 dicembre 1947.

« Questi fatti provano che la radio è stata scoperta dallo scienziato russo Popov. Perciò si è ormai convenuto in URSS di considerare il 7 maggio come la data della scoperta della radio per opera di Popov. Il cinquantenario di questa scoperta fu celebrato nel 1945 e l'Accademia delle Scienze dell'URSS ha pubblicato in quella occasione una " Raccolta dei documenti comprovanti la scoperta della radio per opera di Popov " che vi inviamo insieme alla presente ».

Fin qui il prof. Vavilov.

Da un recente volume del prof. Asby abbiamo appreso che in realtà il 7 maggio del 1945 il Teatro Grande di Mosca era gremito da un eletto pubblico. Sul palcoscenico sedevano scienziati, marescialli, ammiragli, commissari, gerarchi del partito e la stessa figlia di Popov. Venne annunciato che ogni 7 maggio verrà celebrato il *giorno della radio* e che il nome di Popov verrà eternato da un monumento a Leningrado, da una medaglia d'oro da concedersi per invenzioni nel campo della radio, da lapidi nelle varie case in cui Popov ha vissuto e lavorato, da una esposizione della radiotelegrafia a Mosca, da una bibliografia e da un volume intitolato *I cinquanta anni della radio*, dall'attribuzione del nome di Popov ad un museo.

La lettera di Vavilov a me diretta era stata d'altronde di poco preceduta da un atto ufficiale la cui portata non sfuggirà ad alcuno. Nella seduta plenaria del 5 giugno 1947 della Conferenza internazionale delle radiocomunicazioni in Atlantic City il Presidente della Delegazione dell'Unione delle Repubbliche Sovietiche aveva dichiarato che « l'invenzione della radio era stata erroneamente attribuita a Marconi ».

L'affermazione era stata bensì immediatamente contestata dal Delegato Italiano generale Gneme. E il 29 settembre in occasione della inaugurazione in Campidoglio del nostro Congresso, la voce autorevole dell'onorevole Umberto Merlin, Ministro delle Telecomunicazioni, si era levata a proclamare a nome del Governo la indiscutibilità del primato di Guglielmo Marconi.

Ma quel che più importa è che un sereno dibattito ponga in luce, indipendentemente da qualsiasi appassionata rivendicazione, quella verità a cui gli uomini di scienza sogliono e, al di sopra di ogni posizione preconcetta, vogliono rendere testimonianza.

Apriamo perciò il volume degli Atti della sezione di fisica della Società russa per la fisica e la chimica, là dove si trova il verbale della 151ª seduta tenuta il 7 maggio del 1895.

Traduco testualmente:

« A. S. Popov ha fatto la comunicazione: " Del comportamento delle polveri metalliche sotto l'influenza di oscillazioni elettriche ". Partendo dalle esperienze di Branly, l'oratore ha investigato i bruschi cambiamenti che le polveri metalliche subiscono sotto l'azione di oscillazioni elettriche.

« Sfruttando l'alta sensibilità delle polveri metalliche alle più deboli oscillazioni elettriche, l'oratore ha costruito un apparecchio, inteso a dimostrare l'esistenza di rapide oscillazioni nell'elettricità atmosferica. L'apparecchio consiste in un tubo di vetro, riempito di polvere metallica e intro-

dotto nel circuito di un «relais» sensibile. Quando il «relais» funziona mette in azione, mediante la corrente di una batteria, un campanello elettrico, disposto in modo che il suo martelletto batta sia sulla campana che sul tubo di vetro. Quando l'apparecchio si trova nel campo di oscillazioni elettriche, oppure è collegato a un filo che si trova nella sfera di attività delle suddette, allora la resistenza della polvere diminuisce, il «relais» fa passare la corrente della batteria, che mette in azione il campanello. Già i primi colpi sul tubo ristabiliscono la primitiva grande resistenza della polvere, e conseguentemente riportano l'apparecchio al precedente stato di sensibilità alle oscillazioni elettriche.

«Le prime esperienze, compiute dall'oratore col sussidio di una modesta linea telefonica nella città di Kronstadt, dimostrarono che effettivamente l'atmosfera è talvolta sottoposta a rapidi cambiamenti di potenziale. Le esperienze fondamentali di mutamenti nella resistenza delle polveri sotto l'influenza delle oscillazioni elettriche sono state ripetute dall'oratore che ha anche descritto l'apparecchio».

Appare chiaro di qui che in quel tempo Popov non pensava a trasmettere segnali, bensì soltanto a rivelare le scariche atmosferiche.

Ciò è inoppugnabilmente confermato da dichiarazioni dello stesso Popov.

In una lettera indirizzata alla direzione della rivista russa «L'Elettrotecnica» e da questa pubblicata nel fascicolo del 10 dicembre 1897, il Popov parla dei suoi apparecchi che dice installati, fin dal 1895, nell'Istituto Metereologico di Pietroburgo; ed afferma che essi si sono dimostrati «utili a dimostrare le proprietà delle onde hertziane ed adatti per registrare scariche elettriche atmosferiche».

E nell'atto stesso di rivendicare la identità sostanziale di tali apparecchi con quelli di Marconi, chiama questi *ricevitori di Marconi* ed i suoi *registratori di scariche*.

È bensì vero che, in un articolo scritto nel dicembre del 1895 e pubblicato nell'anno successivo negli Atti della stessa Società, Popov aveva espressa «la speranza che il suo apparecchio, dopo ulteriori perfezionamenti, possa essere usato per la trasmissione di segnali a distanza coll'aiuto di oscillazioni elettriche rapide, non appena verrà trovato un generatore di oscillazioni di sufficiente energia».

Ma a quell'epoca sulla collina di Pontecchio si era già ripercossa la eco del colpo di fucile che al giovane Marconi annunziava che il suo sogno stava per realizzarsi.

Il suo sogno: che non era quello di perfezionare i rivelatori di onde elettriche che Righi sperimentava da tempo nel suo istituto e che Popov impiegava come segnalatori di temporali; ma – secondo le parole dello stesso Marconi – era quello di «trasmettere senza fili, mediante le onde di Hertz, a vantaggiosa distanza, un segnale telegrafico qualsiasi, regolarmente registrato».

La personale testimonianza dell'inventore è su questo punto assolutamente esplicita e perentoria.

Nel narrare la storia delle sue battaglie e delle sue vittorie, in un celebre discorso tenuto alcuni anni appresso in Campidoglio, Marconi diceva: « quando in Bologna nel 1895 io pensai di utilizzare le onde elettriche per ottenere un nuovo sistema di telegrafia . . . ».

Qui sta veramente il nodo della questione.

Se si trattasse di stabilire chi per primo ha dato questa o quella forma ad un apparecchio rivelatore di onde hertziane, si potrebbe a lungo discutere ed il nome di Marconi prenderebbe questo o quel posto nella lunga serie di coloro che della elaborazione della moderna tecnica delle telecomunicazioni furono i geniali precursori.

Ma non è di ciò che si tratta, bensì di sapere chi per primo intravvide la possibilità della telegrafia senza fili, chi per primo ebbe fede nella possibilità di sostituire un siffatto sistema di telegrafia alla ordinaria telegrafia su filo, chi per primo trovò in quella fede la forza di lottare contro tutte le diffidenze, di vincere tutti gli ostacoli.

E questi fu incontestabilmente Guglielmo Marconi.

Consentite che a conferma del mio asserto io vi porti la più singolare delle prove.

Tutti sanno che la maggiore difficoltà che si frappone ad una precisa indicazione della data della scoperta marconiana dipende da ciò che Marconi non si preoccupò di prendere data comunicando il risultato dell'esperienza di Pontecchio ad una qualsiasi accademia o pubblicandone la descrizione in una qualsiasi rivista.

Solo assai più tardi, nel giugno del 1896, quando, emigrato in Inghilterra, aveva potuto passare a realizzazioni concrete, Marconi chiese il suo primo brevetto.

Ora questo modo di procedere dimostra in termini inequivocabili che l'inventore sapeva quel che faceva, e si preoccupava fin d'allora di assicurare al suo trovato le possibilità di quegli sviluppi nel campo della pratica tecnica a cui scientemente mirava, e che una pubblicità prematura, rendendo il trovato stesso di pubblico dominio, avrebbe potuto sottrarre alla sua personale iniziativa.

L'intima gioia con cui Marconi accoglierà le notizie dei salvataggi di innumeri naufraghi che a lui dovranno la vita, la legittima soddisfazione con cui più tardi vedrà stendersi sul globo intiero la rete delle sue stazioni, sono il logico coronamento ed il meritato premio di quella sua chiara e realistica visione iniziale del problema.

E gli uomini di tutti i paesi, che hanno concordemente riconosciuto in lui lo scopritore delle radiocomunicazioni e che lo hanno acclamato non solo come un grande scienziato, ma come un benefattore dell'umanità, hanno giustamente compreso che l'elemento essenziale della scoperta ed il maggior titolo di gloria dell'uomo, non andava ricercato negli innumeri contributi che con tanta sapienza e con insonne fatica egli aveva pur recato alla tecnica strumentale, bensì nella geniale intuizione che facendogli intravvedere fin dal primo istante le sconfinate possibilità di quella tecnica ed il suo

incomparabile valore umano e sociale, gli aveva data la forza di non lasciarsi smuovere dai pareri contrari e dalla incomprensione dei contemporanei e di mantenere incrollabile la sua fede nella realtà e nella grandezza della sua scoperta.

Alla comunicazione del prof. COLONNETTI *il Socio Lombardi aggiunge le seguenti osservazioni:*

Il prof. Lombardi, il quale per ragioni di insegnamento seguì tutto lo sviluppo della radiotelegrafia con la massima attenzione, e con sincera ammirazione per l'opera di G. Marconi, non ha ragioni da opporre alla solenne rivendicazione della sua priorità nello sviluppo delle segnalazioni a grande distanza mediante onde elettromagnetiche.

Di esse infatti egli solo ardì concepire la possibilità, e seppe confermarla con mezzi rudimentali fin dal 1895, raggiungendo distanze non prima pensate, e superando ostacoli materiali prima ritenuti insormontabili. A giudizio dell'oratore questo merito, che nessuno gli può contestare, e che gli assicura come pioniere un posto inconfondibile nel campo delle telecomunicazioni, non giustifica per Marconi, e tanto meno lo farebbe per Popov, il titolo di *inventore della radiotelegrafia.* Il fondamento di questa si impernia in verità nella classica teoria di Maxwell, e la possibilità pratica di essa venne già confermata nel 1888 dalle brillanti esperienze di Hertz, riprodotte da Lodge e da molti altri. Esse certamente spronarono il Nostro a ritentarle nel 1894. Quale parte nella loro riuscita abbiano avuto i contatti di Marconi col prof. Righi, il quale stava allora sviluppando con incomparabile abilità la tecnica delle oscillazioni elettriche, e di cui Marconi visitò ripetutamente il laboratorio, non è possibile accertare, atteso che il celebre Fisico, ripetutamente interpellato, si schermì dal darne un giudizio preciso, non osando annoverare il giovane visitatore fra i suoi discepoli, e pur confermando per il genio inventivo di lui incondizionata ammirazione. Righi stesso escluse anche la probabilità che Marconi avesse a priori conosciuto le esperienze di Lodge e di Popov, e ritenne che l'idea della telegrafia senza filo abbia potuto nascere in lui spontaneamente, senza il suggerimento di proposte altrui. Marconi ne attribuì addirittura l'origine ad una ispirazione soprannaturale, e consentì che il ricordo ne fosse perpetuato presso il santuario di Oropa con una epigrafe dettata da Emanuele Sella.

L'apprezzamento più autorevole e oggettivo del merito di Marconi fu espresso da Righi in una memorabile intervista con G. de Frenzi (pseudonimo di Luigi Federzoni) pubblicata nel 1903 dal *Giornale d'Italia*, ove il grande scienziato dichiarò di attribuire alla controversa questione di priorità un'importanza molto secondaria di fronte all'abilità spiegata da Marconi nel perfezionare incessantemente gli strumenti, e nel lanciare la scoperta verso lo scopo pratico. Il valore di essa, a giudizio di Righi che ne aveva la massima competenza, stava, più che nella genialità della trovata, in quanto Marconi aveva fatto per trarne pratico profitto; ed in una lettera

aperta allo stesso giornale del 15 marzo 1903, dopo la pubblicazione del suo classico trattato sulla *Telegrafia senza filo*, Righi stesso confermava:

« In tesi generale l'opera di chi trova una utile applicazione pratica è « ben distinta da quella di chi, occupandosi puramente della scienza, ha potuto « con i suoi studi darvi occasione o facilitarne la esecuzione. In particolare « nessuno oserebbe affermare che, senza aver avuto conoscenza delle mie « esperienze sulle onde elettriche, il Marconi non avrebbe potuto concepire « l'idea sua geniale ».

A conferma della sua profonda estimazione Righi proponeva due mesi dopo all'Accademia delle scienze di Bologna la nomina di Marconi a Socio corrispondente nella sezione di scienze fisiche, ed essa veniva approvata a unanimità.

Titolo di gloria per lui, incomparabilmente più alto delle antenne sintonizzate di Pontecchio, contemporanee di quella semplice utilizzata da Popov per segnalazioni metereologiche; dei notevoli perfezionamenti al coherer, ideato dieci anni prima da Calzecchi Onesti e ristudiato nel 1890 da Branly; del detector magnetico di pura invenzione marconiana, ora soppiantato dai moderni ricevitori a valvola; è stata la sua fede incrollabile nella possibilità di superare con le onde elettromagnetiche distanze illimitate, malgrado l'ostacolo offerto dalla rotondità della terra. Del fenomeno Heaviside e Kennelly fornirono più tardi la spiegazione mediante la riflessione degli strati superiori dell'atmosfera, dopo che Marconi l'aveva intuita con geniale percezione, e confermata nel 1901 col memorabile segnale S lanciato attraverso l'Atlantico, raccogliendolo con un semplice filo di antenna affidato à un cervo volante.

Nè Marconi nè Popov hanno pertanto diritto di chiamarsi, nella accezione letterale della parola, *inventori della radiotelegrafia*; ma, mentre questi si è limitato a utilizzare per segnalazioni meteorologiche le proprietà ricettive di una antenna isolata, Marconi dimostrò per il primo l'efficacia in trasmissione e ricezione delle antenne sintonizzate, e perfezionò meglio di ogni altro la tecnica delle radiocomunicazioni. Il meraviglioso sviluppo di questa ne fece lo strumento più efficace delle moderne telecomunicazioni, e conferisce in questo campo all'Italia il titolo più alto di benemerenza fra tutte le altre nazioni.

NOTE DI SOCI

Teoria dei numeri. — *Osservazioni sui numeri perfetti.* Nota (*) del Socio G. ARMELLINI.

1. In questa Nota mi propongo di semplificare alcune dimostrazioni ed insieme di fare altre osservazioni generali sopra le proprietà dei numeri perfetti, applicandole anche alle ricerche di Sylvester (1) sui numeri perfetti ternari. Ma, per completezza e per comodità dei lettori, credo anzitutto utile di riassumere, con la massima brevità, alcune nozioni fondamentali, di cui dovrò valermi sia in questa Nota, sia in eventuali Note successive.

2. Secondo un'antica definizione, che sembra originata dalla scuola pitagorica, si chiama numero *perfetto* ogni intero positivo N che risulti eguale alla somma S dei propri divisori, comprendendo in S l'unità ed escludendovi ovviamente il numero stesso; così per esempio 6 e 28 sono perfetti, giacchè si ha $1+2+3=6$ ed $1+2+4+7+14=28$. Se invece S supera N, il numero si chiama *piuccheperfetto*; se è inferiore ad N, si dice *imperfetto*.

Ovviamente un numero perfetto N non può essere primo, ed è anche facile vedere che non può essere eguale alla potenza di un numero primo α. Infatti, poichè i divisori di α^a sono $1, \alpha, \alpha^2 \cdots \alpha^{a-1}$, si ha

$$(1) \qquad N-S=\alpha^a-(1+\alpha+\alpha^2+\cdots\alpha^{a-1})=\alpha^a-\frac{\alpha^a-1}{\alpha-1}=\frac{\alpha^a(\alpha-2)+1}{\alpha-1}$$

quantità certamente diversa da zero, essendo α primo ed almeno eguale a 2.

Ne segue che ogni numero perfetto N sarà necessariamente eguale al prodotto di potenze di *più* numeri primi e, per brevità, noi diremo che N è *binario, ternario*, ecc. secondo che i suoi fattori primi *distinti* sono due, tre, ecc. Fin ad ora, si conoscono *soltanto* numeri perfetti binari.

Premesse queste definizioni, indichiamo con $\alpha, \beta, \gamma \cdots \lambda$ i fattori primi distinti di N, disposti in ordine *crescente* ($\alpha<\beta<\gamma\cdots<\lambda$), onde avremo $N=\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots\lambda^l$. Poichè la somma dei divisori di N, *compreso* il numero stesso, è notoriamente data dal prodotto $(1+\alpha+\cdots\alpha^a)(1+\beta+\cdots\beta^b)\cdots\cdots(1+\lambda+\cdots\lambda^l)$, se N è perfetto, sarà

$$(2) \qquad 2N=2\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots\lambda^l=(1+\alpha+\cdots\alpha^a)(1+\beta+\cdots\beta^b)\cdots(1+\lambda+\cdots\lambda^l)$$

od anche

$$(3) \qquad 2=\left(1+\frac{1}{\alpha}+\cdots\frac{1}{\alpha^a}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}+\cdots\frac{1}{\beta^b}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\lambda}+\cdots\frac{1}{\lambda^l}\right)$$

(*) Presentata nella seduta del 10 gennaio 1948.

(1) Cfr. «Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences», to. CVI, p. 403 e sgg.; id. p. 522 e sgg. (1888).

da cui si ricava con trasformazioni immediate

$$2 < \frac{\alpha\beta\gamma\cdots\lambda}{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)\cdots(\lambda-1)} \tag{4}$$

Si vede facilmente che, se N è perfetto o piuccheperfetto e se esso si moltiplica per un intero positivo qualsiasi k, il numero risultante $N' = Nk$ sarà necessariamente *piuccheperfetto*. Ne segue che nessun numero perfetto può essere multiplo di un altro numero perfetto o piuccheperfetto, ad esempio di 6, di 28, ecc.

3. Premesse queste nozioni, ricordiamo che le proprietà fondamentali dei numeri perfetti possono riassumersi, secondo noi, nei due teoremi seguenti, dovuti sostanzialmente ad Eulero e che qui riportiamo con dimostrazioni modificate e semplificate.

TEOREMA I. – *Se un numero perfetto è binario, esso è necessariamente pari e viceversa, ed è dato dalla formola*

$$N = 2^a(2^{a+1}-1). \tag{5}$$

purchè $2^{a+1}-1$ sia primo.

Reciprocamente se $2^{a+1}-1$ *è un numero primo,* N *risulta perfetto.*

Dimostrazione. – Se N è binario, la (4) ci dà

$$2 < \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)} \tag{6}$$

ed essendo α e β primi e $\alpha < \beta$, si vede immediatamente che la (6) non può essere soddisfatta se si ha $\alpha > 2$; dunque dovrà essere $\alpha = 2$ e quindi N pari.

Viceversa, supponiamo che N sia pari e cioè che il primo fattore α sia eguale a 2. Avremo allora dalla (2), ricordando che si ha $1 + 2 + \cdots 2^a = 2^{a+1} - 1$:

$$2^{a+1}\beta^b\gamma^c\cdots\lambda^l = (2^{a+1}-1)(1+\beta+\cdots\beta^b)(1+\gamma+\cdots\gamma^c)\cdots(1+\lambda+\cdots\lambda^l). \tag{7}$$

Ne segue che, se $2^{a+1}-1$ è primo, esso deve coincidere con qualcuno dei fattori primi $\beta, \gamma\cdots\lambda$ e, se non è primo, non può ammettere altri fattori primi diversi da $\beta, \gamma\cdots\lambda$; in ogni caso quindi $2^{a+1}-1$ deve essere maggiore, od al più eguale a β. Ora dalla (7) si ricava

$$\left(1+\frac{1}{\beta}+\cdots\frac{1}{\beta^b}\right)\left(1+\frac{1}{\gamma}+\cdots\frac{1}{\gamma^c}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\lambda}+\cdots\frac{1}{\lambda^l}\right) = \tag{8}$$

$$= \frac{2^{a+1}}{2^{a+1}-1} = 1 + \frac{1}{2^{a+1}-1} \leqq 1 + \frac{1}{\beta}$$

e quindi, sarà necessariamente $b = 1$ ed inoltre $c = d = \cdots l = 0$; dunque N sarà binario ed il secondo fattore primo β risulterà eguale a $2^{a+1}-1$ e comparirà in N elevato alla prima potenza. Avremo cioè:

$$N = 2^a(2^{a+1}-1) \tag{9}$$

essendo $2^{a+1}-1$ primo. Reciprocamente, si vede immediatamente dalla (2), che, se $2^{a+1}-1$ è primo, N risulta perfetto.

Teorema II. – *Un numero perfetto non binario (se esiste) sarà necessariamente dispari e conterrà tutti i suoi fattori primi elevati a potenze pari; tranne uno ed un solo fattore che vi comparirà con esponente dispari. Questo fattore, che chiameremo fattore caratteristico, avrà la forma* $4m+1$ *ed il suo esponente avrà pure la forma* $4n+1$, *essendo* m *ed* n *interi positivi.*

Dimostrazione. – Supponiamo che N sia un numero perfetto *non* binario. Per il teorema precedente, N sarà necessariamente *dispari* e cioè avremo $\alpha > 2$.

Ne segue che l'ultimo membro della (2) ammetterà, tra i suoi divisori, il fattore 2 elevato soltanto alla prima potenza; dunque *una ed una sola* delle sommatorie $1+\alpha+\alpha^2+\cdots\alpha^a$ ecc. sarà pari. Ma queste sommatorie sono composte di addendi tutti dispari; dunque una ed una sola di queste sommatorie potrà contenere un numero pari di addendi, e perciò uno ed uno solo degli esponenti potrà essere dispari.

Supponiamo allora, per fissare le idee, che sia dispari l'esponente l e cioè che si abbia $l=2i+1$. Avremo

$$(10) \qquad 1+\lambda+\lambda^2+\cdots\lambda^l=(1+\lambda)(1+\lambda^2+\lambda^4+\cdots\lambda^{2i})$$

Ora $1+\lambda$ è certamente pari, essendo λ primo e diverso da 2, e quindi il primo membro della (10) sarà divisibile per 2. Ma esso *non* deve essere divisibile per 4, e perciò si richiede:

a) Che $1+\lambda$ non sia multiplo di 4, onde dovrà aversi $\lambda=4m+1$.

b) Che la sommatoria $1+\lambda^2+\lambda^4+\cdots\lambda^{2i}$ non sia pari e quindi, essendo λ dispari, che essa risulti composta di un numero dispari di addendi. Quindi i sarà *pari* ed in conseguenza si avrà $l=2i+1=4n+1$.

4. Passiamo ora a dimostrare un'altra proprietà dei numeri perfetti non binari, che non sembra sia stata fin ad ora rilevata e che certamente fu ignorata dal Sylvester, giacchè altrimenti egli se ne sarebbe servito nelle sue ricerche [2] sopra l'inesistenza di numeri perfetti ternari e quaternari, dove tale proprietà semplifica il procedimento, permettendo senza altro di escludere molti casi in esame. A tale scopo dimostriamo il seguente

Teorema III. – *Se N è un numero perfetto non binario e se esso ammette il numero* 5 *tra i suoi fattori primi, allora ammetterà almeno un fattore primo terminante con la cifra* 1, *oppure il suo fattore caratteristico terminerà con* 1 *o con* 9.

Dimostrazione. – Supponiamo che uno dei fattori primi di N, per esempio β, sia eguale a 5; la (2) mostra allora che una almeno delle sommatorie al secondo membro, per esempio $1+\gamma+\gamma^2+\cdots\gamma^c$ sarà multipla di 5; ciò che esige che γ sia diversa da 5 e che $\gamma^{c+1}-1$ sia multiplo di 5, avendosi identicamente: $\gamma^{c+1}-1=(\gamma-1)(1+\gamma+\gamma^2+\cdots\gamma^c)$.

(2) Cfr. Mem. cit. in «Comptes Rendus», to. CVI. Per la letteratura sull'argomento cfr. Dickson, *A History of the theory of numbers* (New York, Stechert, 1934) vol. I, dove si trova una miniera d'importanti notizie storiche su molti lavori di cui furono oggetto questi curiosi numeri.

Supponiamo ora che γ *non* sia fattore caratteristico: allora c sarà pari, ed in conseguenza $c+1$ sarà dispari e quindi eguale a $4i+t$ dove i e t sono interi e l'intero t è eguale ad 1 oppure a 3. Avremo dunque

$$\gamma^{4i+t} = 5k+1 \tag{11}$$

essendo k intero.

D'altra parte, il teorema di Fermat ci dice che $a^{p-1}-1$ è divisibile per p quando p è primo, onde risulterà

$$\gamma^4 = 5h+1 \tag{12}$$

ed elevando ambo i membri alla potenza i

$$\gamma^{4i} = 5k'+1 \tag{13}$$

essendo h e k' interi. Avremo dunque, sottraendo (13) da (11):

$$\gamma^{4i}(\gamma^t-1) = 5(k-k'). \tag{14}$$

Ora γ è primo e diverso da 5, onde γ^{4i} sarà certamente primo con 5 e quindi γ^t-1 dovrà essere divisibile per 5. Ma t è eguale ad 1 od a 3 e γ dispari; onde γ terminerà necessariamente con la cifra 1.

Facciamo ora l'ipotesi che γ sia fattore caratteristico. Allora si avrà $c=4n+1$ e quindi $c+1=4n+2$. Ripetendo lo stesso ragionamento, troviamo che γ^2-1 dovrà essere divisibile per 5 e quindi γ terminerà con la cifra 1, o con la cifra 9. C. d. d.

Notiamo che il fatto che $\gamma^{c+1}-1$ sia divisibile per 5 è condizione necessaria, ma non sufficiente, affinchè $1+\gamma+\gamma^2+\cdots\gamma^c$ sia divisibile per 5. Perchè ciò si verifichi, terminando γ con la cifra 1, occorre inoltre evidentemente che il numero dei termini della sommatoria sia multiplo di 5. In conseguenza, se γ non è caratteristico, essendo c pari, dovrà aversi $c=4+10k$, con k intero; se invece γ è caratteristico, essendo $c=4n+1$, dovrà essere $c=9+20k$. Qualora poi γ sia caratteristico e termini con la cifra 9, poichè identicamente si ha $1+\gamma+\gamma^2+\cdots\gamma^c=(1+\gamma)(1+\gamma^2+\gamma^4+\cdots\gamma^{4n})$ la sommatoria risulta sempre divisibile per 5 qualunque sia n.

5. – Dobbiamo ancora osservare che, se N non è binario, il suo fattore più basso α *non può essere caratteristico*. Infatti, se α fosse caratteristico, per la (2) e la (10) il numero N sarebbe multiplo di $\frac{1+\alpha}{2}$; numero certamente intero (essendo α primo e maggiore di 2) e minore di α. Quindi N ammetterebbe un divisore più piccolo del minore dei suoi fattori primi, ciò che è assurdo.

Anche questo criterio di selezione, non enunciato dal Sylvester, risulta vantaggioso.

Osserviamo in fine che due numeri perfetti diversi N ed N' *non* possono avere in comune *soltanto* il fattore caratteristico, giacchè, se ammettono ambedue per fattore caratteristico γ, sono evidentemente ambedue divisibili per i divisori di $\frac{1+\gamma}{2}$. Così pure, si vede immediatamente che N ed N'

non possono avere in comune *soltanto* un fattore primo non caratteristico, elevato alla *medesima* potenza nei due numeri, ecc.

6. *Inesistenza di numeri perfetti ternari.* – Vediamo ora come il nostro criterio di selezione, dato dal teorema III, semplifichi la dimostrazione del Sylvester [3] sull'inesistenza di numeri perfetti ternari.

Cerchiamo infatti se è possibile che il numero $N = \alpha^a \beta^b \gamma^c$ sia perfetto ed a tal fine ricordiamo che, secondo la (4), dovrà aversi

$$(15) \qquad 2 < \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)}.$$

Poichè N è certamente dispari, e quindi $\alpha > 2$, si trova subito che soltanto tre terne sono ammissibili; e cioè la terna 3, 5, 7; la terna 3, 5, 11, e la terna 3, 5, 13. Sylvester esamina tutte e tre queste terne; ma il nostro teorema ci dice subito che la *prima e l'ultima debbono essere escluse*; onde basterà studiare la terna 3, 5, 11.

Sylvester dimostra che questa terna è impossibile; ma, in luogo della sua dimostrazione, proponiamo la seguente che ci sembra più facile.

Posto $N = 3^a \cdot 5^b \cdot 11^c$, si vede anzitutto che, essendo 5 il fattore caratteristico (perchè è l'unico della forma $4m + 1$) gli esponenti a e c debbono essere pari e b dispari; anzi a non potrà essere eguale a 2, giacchè essendo $1 + 3 + 3^2 = 13$, N ammetterebbe allora 13 come fattore.

Ora, essendo per ipotesi N perfetto, la (2) ci dà

$$(16) \qquad 2 \cdot 3^a \cdot 5^b \cdot 11^c = (1 + 3 + \cdots 3^a)(1 + 5 + \cdots 5^b)(1 + 11 + \cdots 11^c)$$

da cui si trae con facili riduzioni

$$(17) \qquad 2^5 \cdot 3^a \cdot 5^{b+1} \cdot 11^c = (3^{a+1} - 1)(5^{b+1} - 1)(11^{c+1} - 1).$$

Ma $3^{a+1} - 1$ non è divisibile per 3, come pure non lo è il binomio $11^{c+1} - 1$, essendo c pari. Quindi $5^{b+1} - 1$ dovrà essere divisibile per 3^a e perciò, essendo a almeno eguale a 4, l'esponente b non potrà essere eguale ad 1.

In conseguenza, essendo b dispari, a e c pari ed a almeno eguale a 4, il numero N sarà multiplo del numero $N' = 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11^2 = 1225125$. Ma la somma dei divisori di N' (escluso il numero stesso) è eguale a 1285383, onde N' è piuccheperfetto. Ne segue che N, essendo multiplo di un numero piuccheperfetto, non potrà certamente essere perfetto; quindi anche questa terna va esclusa e risulta immediatamente dimostrata l'*inesistenza di numeri perfetti ternari.*

7. Sylvester ha fatto anche [4] un breve esame dei numeri perfetti non binari nel caso che non contengano il fattore 3 e, servendosi della (4), ha trovato che essi (se esistono) debbono avere almeno *otto* fattori primi distinti.

(3) Cfr. SYLVESTER, *Sur les nombres parfaits*, in «Comptes Rendus», to. CVI, p. 403.

(4) Cfr. SYLVESTER, *Sur une classe speciale de diviseurs etc.* in «Comptes Rendus», to. CVI, p. 446 e sgg. (1888).

Ma egli erra ponendo questi numeri sotto la forma $N = 3k \pm 1$, giacchè *soltanto* il segno superiore è possibile. Possiamo infatti dimostrare il seguente

TEOREMA IV. - *Non esistono numeri perfetti della forma* $N = 3k - 1$.

Dimostrazione. - Se N è un numero perfetto binario, la (9) ci dice che l'esponente a deve essere *pari*, eccettuato il caso specialissimo in cui sia $a=1$ e quindi $N=6$. Infatti, se a fosse dispari, $a+1$ sarebbe pari ed allora, avendosi $a+1=2b$, il numero $2^{a+1}-1$ risulterebbe eguale al prodotto $(2^b-1)(2^b+1)$ e non potrebbe perciò essere primo. Essendo a pari, 2 risulta congruo con l'unità rispetto al modulo 3 ed altrettanto avviene per $2^{a+1}-1$, onde anche N è congruo con l'unità rispetto a 3 e cioè può porsi sotto la forma $N = 3k + 1$.

Passando ora al caso di N non binario, osserviamo anzitutto che, se esso contiene il fattore 3, ha evidentemente la forma $N = 3k$. Supponiamo quindi che N non contenga 3 e chiamiamo per esempio con λ il suo fattore caratteristico. La (10) mostra allora che il binomio $1+\lambda$ non può essere multiplo di 3, onde λ dovrà necessariamente avere la forma $\lambda = 3h + 1$.

Ciò posto, per il Teorema II, possiamo porre

$$N = \lambda^l T^2 \tag{18}$$

dove T contiene fattori primi tutti diversi da 3, onde dividendolo per 3, darà per resto 1 oppure 2. In conseguenza il suo quadrato T^2, diviso per 3, darà per resto l'unità. Ma abbiamo ora visto che λ è congruo con l'unità rispetto al modulo 3; dunque lo sarà anche λ^l e perciò anche il numero N; e cioè avremo $N = 3k + 1$. Ovviamente, essendo N dispari, l'intero k sarà poi certamente pari.

Osserviamo pure che avendo il fattore caratteristico λ la forma $4m + 1$ ed essendo (quando N non è divisibile per 3) anche $\lambda = 3h + 1$, sarà necessariamente $\lambda = 12s + 1$.

Supponiamo ancora che N *non* sia divisibile per 3 e consideriamo anzitutto i suoi fattori primi della forma $3i - 1$, i quali (non essendo compreso tra essi il fattore caratteristico) saranno tutti elevati a potenze *pari*. Ora si vede subito che, se α ha la forma $3i - 1$ e se l'esponente a è pari, la sommatoria $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots \alpha^a$ è congrua con l'unità rispetto al modulo 3. Consideriamo invece un fattore, per esempio β, della forma $3i + 1$; allora, qualunque sia l'esponente b, la sommatoria $1 + \beta + \beta^2 + \cdots \beta^b$ riesce congrua con $1 + b$ rispetto a 3.

In conseguenza, se chiamiamo con $p_1 p_2 \cdots p_q$ gli esponenti di quei fattori primi di N che hanno la forma $3i + 1$ e ricordiamo che si ha necessariamente $N = 3k + 1$, la 2) ci mostra *che il prodotto* $(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_q)$ *è congruo con* 2 *rispetto al modulo* 3.

Ne segue che, se l'unico fattore della forma $3i + 1$ è il fattore caratteristico λ e se indichiamo con l il suo esponente, deve essere $l = 3r + 1$ e quindi, essendo l necessariamente della forma $4n+1$, risulta $l = 12t+1$; e cioè, in tal caso, tanto il fattore caratteristico λ quanto il suo esponente l hanno forma analoga.

Meccanica. — *Moltiplicatore critico λ_{cr} di una distribuzione di carico su una vôlta autoportante.* Nota II (*) di G. KRALL e di D. CALIGO.

VÔLTE AUTOPORTANTI A DIRETTRICE SEMICIRCOLARE CONTINUE SU PIÙ CAMPATE. – L'espressione degli sforzi T_1, T_2, S rimane immutata rispetto alla variabile ψ, non, naturalmente, rispetto alla x. Tale distribuzione, fermo restando per $g = \text{cost}$ l'andamento parabolico, dipende dal rapporto delle luci delle singole campate e dal rapporto di R_0 rispetto ad una di queste luci. Ove si fissi l'attenzione su una campata di lunghezza L e con riguardo ad eguali condizioni di vincolo agli estremi, quindi, ad esempio, per la centrale tra 3 campate $L_1, L_2 = L, L_3 = L_1$ si può porre, h essendo una costante numerica,

$$T_1 = -\frac{gL^2}{R_0}\left(\xi - \xi^2 - \frac{1}{h}\right)\cdot \cos\psi$$

mentre rimangono inalterate le espressioni (15) di T_2 e di S nella centrale.

Il tirante di bordo della campata centrale prende lo sforzo

$$Z = gL^2\left(\xi - \xi^2 - \frac{1}{h}\right).$$

In tali relazioni h è funzione dei rapporti $L : R_0$ e $m = L_1 : L$. Si ha in ogni caso un valore di h inferiore (quindi a vantaggio della stabilità) ponendo

$$h = 2\,\frac{3 + 2m}{1 + m^3}\,\frac{\left(\frac{L}{2R_0}\right)^2 + \frac{3}{3m + 2m^2}}{\left(\frac{L}{2R_0}\right)^2}.$$

Detta espressione sarebbe rigorosa per il tubo cilindrico circolare continuo autoportante sulle tre campate considerate. Per la vôlta semicircolare ci si avvicina alla realtà – più difficilmente apprezzabile in rigore – sostituendo $2R_0$ con R_0. Se non si tenesse conto delle deformazioni conseguenti al taglio (che si manifestano negli effetti attraverso il rapporto $L : 2R_0$) si avrebbe senz'altro

$$h = 2\,\frac{3 + 2m}{1 + m^3} \qquad \text{(generalmente } m = 1\text{)}.$$

Merita rilevare che, per infinite campate, eguali ed egualmente caricate, si ha sempre $h = 6$, indipendentemente dal rapporto $\frac{L}{R_0}$. Ciò vuol dire che la vôlta incastrata, uniformemente caricata, ha una distribuzione di sforzi indipendente dal rapporto di forma e che le deformazioni dovute al taglio non influiscono: un fatto che sussiste anche per la trave a parete alta, e che non mi sembra essere stato rilevato.

(*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1947.

Fissando l'attenzione su alcuni valori di h ($h = \infty$ corrisponde alla vôlta autoportante semplicemente appoggiata cioè con i timpani liberi di rotare) con riguardo alla *Vôlta a direttrice semicircolare*, assunta per u, v, w la terna

$$(\mathfrak{B}) \qquad u = 0 \quad , \quad v = \Sigma_m \frac{A_m}{m} \sin m\psi \quad , \quad w = \Sigma_m A_m \cos m\psi$$

in concorrenza per il minimo con la terna

$$(\mathfrak{D}) \qquad u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = \Sigma_{m,n} A_{m,n} \frac{1 - \cos 2n\pi \frac{x}{L}}{2} \cos m\psi$$

(appropriata in verità solo per $h = 6$) e con le terne $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{C}$ della Nota I (la $\mathfrak{C}$ appropriata per $h = \infty$) abbiamo desunto per λ_{cr}, dato dalla (20), precisamente

$$\lambda_{cr} = \frac{E}{g}\left(\frac{d_0}{L}\right)^3 \cdot \frac{\pi}{24(1-\nu^2)} \cdot \bar{\lambda}^{(17)},$$

la seguente tabella

Valori di $\bar{\lambda}$ per la vôlta a base semicircolare

$\frac{L}{R_0}$	$\mathfrak{A}$ Appoggio $m=2$	$\mathfrak{B}$ Appoggio o Incastro $m=2$	$\mathfrak{C}$ ($n=1$) $h=\infty$ $m=0\div 2$	$h=6$ $m=0\div 2$	$h=24$ $m=0\div 2$
0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
0,25	0,2104	0,05859	60,7252	347,8086	291,3323
0,30	0,3503	0,1013	51,6443	291,3293	244,0944
0,50	1,3451	0,4688	34,7117	180,1222	151,1755
1	6,3920	3,7500	26,9589	103,9440	87,9710
1,5	14,4185	12,6563	29,3276	87,8613	75,3738
2	26,0156	30,0000	31,1651	89,5278	77,5415
3	64,6036	101,2500	26,3052	115,8755	83,4000
4	131,8960	240,0000	20,7182	153,1752	69,1170
10	1681,9100	3750,0000	8,5010	240,1393	28,6486
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	0	0

(17) Il fattore $\bar{\lambda}$ soddisfa l'equazione, riportata nella Nota I (Vol. I, dicembre 1946), qui riscritta correttamente, tralasciando gli indici m ed n,

$$\bar{\lambda}^2 (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) + \bar{\lambda} (b_{11} a_{22} + b_{22} a_{11} - 2 a_{12} b_{12}) + (a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) = 0.$$

Con l'occasione si rilevino per la Nota citata le seguenti correzioni: p. 1283, r. 22, leggi: $-\min$; p. 1289, nelle 2ª definizioni, leggi $(\ )^*$ non $(\ )'$; p. 1290, r. 27, leggi: $\beta = \psi$, p. 1292, r. 2, leggi: 2 *fattore* e non esponente.

Per la

Vôlta cicloidica ($R = a\cos\psi$), *semplicemente appoggiata*:

considerate concorrenti le terne

$$(\mathfrak{A}') \qquad u = -\Sigma_m \frac{A_{2m}}{L}\int R(\psi)\,\mathrm{sen}\,2m\psi\,d\psi \quad , \quad v = \frac{x}{L}\Sigma_m A_{2m}\,\mathrm{sen}\,2m\psi \quad ,$$

$$w = \frac{x}{L}\Sigma_m\, 2m\, A_{2m}\cos 2m\psi\,;$$

$$(\mathfrak{B}') \qquad u = 0 \quad , \quad v = \Sigma_m \frac{A_{2m}}{2m}\,\mathrm{sen}\,2m\psi \quad , \quad w = \Sigma_m A_{2m}\cos 2m\psi\,;$$

$$(\mathfrak{D}') \qquad u = 0 \quad , \quad v = \Sigma_n A_n\,\mathrm{sen}\,n\pi\frac{x}{L}\cdot\mathrm{sen}\,\psi \quad , \quad w = \Sigma_n A_n\,\mathrm{sen}\,n\pi\frac{x}{L}\cos\psi\,;$$

e per la

Vôlta cicloidica, incastrata:

concorrenti le terne ($\mathfrak{B}$) e

$$(\mathfrak{D}'') \qquad u=0 \;,\; v=\Sigma_n A_n \frac{1-\cos 2n\pi\frac{x}{L}}{2}\cdot\mathrm{sen}\,\psi \;,\; w=\Sigma_n A_n \frac{1-\cos 2n\pi\frac{x}{L}}{2}\cos\psi\,.$$

terne che ovviano tutte le conseguenze della singolarità ai bordi derivanti dall'annullarsi del raggio di curvatura, abbiamo ricavata la seguente tabella per λ

Valori di $\bar{\lambda}$ per la vôlta a base cicloidica

$\frac{L}{a\pi}$	$\mathfrak{A}$ Appoggio $m = 1 \div 2$	$\mathfrak{B}$ Appoggio o Incastro $m = 1 \div 2$	$\mathfrak{D}$ $h=\infty$ $n=1$	$h=6$ $n=1$	$h=12$ $n=1$	$h=24$ $n=1$	$h=48$ $n=1$
0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
0,25	5,8691	1,6192	30,6497	1122,942	148,150	103,310	89,731
0,30	8,0600	2,7980	25,5414	935,785	123,459	86,092	74,776
0,50	18,7137	12,9539	15,3249	561,471	74.075	51,655	44,865
1	68,1771	103,6308	7,6624	280,735	37,038	25,828	22,433
1,5	173,737	349,7541	5,1083	187,157	24,692	17,218	14,955
2	364,016	829,0468	3,8312	140,368	18,519	12,914	11,216
3	1112,158	2798,033	2,5541	93,578	12,346	8,609	7,478
4	2539,117	6632,374	1,9156	—	—	—	—
10	38030,025	103630,8	0,7662	—	—	—	—
∞	$+\infty$	$+\infty$	0	0	0	0	0

Osservazione I. – Si è trascurato sempre nel calcolo di $\bar{\lambda}$ il contributo del lavoro estensionale W_e che non si annulla per la terna ($\mathfrak{C}$) o ($\mathfrak{D}$) mentre

si annulla per la (21) o (38). Il considerarlo porta a così elevati valori di λ_{cr} da togliere ad essi addirittura ogni pratico significato. L'entità, tanto sensibilmente diversa, dipende dal fatto già accennato che W_r è proporzionale a $\frac{d_o}{L}$, W_f a $\left(\frac{d_o}{L}\right)^3$. Il perchè si possa e debba praticamente trascurarlo è noto.

Osservazione II. - La nozione di carico critico è essenziale giacchè ad essa si collega anche la nozione di resistenza delle vôlte rispetto ad una perversa azione della *viscosità dei calcestruzzi* che se non tenuta presente può portare talvolta a paurosi avallamenti (imbozzature) i quali altro non sono se non la ripetizione, in 2 dimensioni, di quanto avviene per un'asta soggetta a sforzo assiale ed inflessa come già ho dimostrato in questi « Rendiconti ».

L'avallamento è tanto meno sensibile quanto più è grande λ_{cr}.

L'inflessione w prodotta da una causa qualsiasi cresce infatti nel tempo secondo la relazione

$$w \sim \frac{w_0}{1 - \varkappa}\left(1 + \frac{1}{\varkappa}\left[e^{\frac{\alpha}{3}\varkappa\left(t^{-1/3}-1\right)} - 1\right]\right)$$

essendo, per un calcestruzzo ordinario, t contato in anni, $\alpha \sim 3$ e in ogni caso

$$\varkappa = \frac{1}{\lambda_{cr}},$$

con λ_{cr} moltiplicatore critico dello sforzo assiale. Se questo è N_o, e l'asta è semplicemente appoggiata,

$$\varkappa = \frac{N_o L^2}{\pi^2 EI}$$

con EI coefficiente di resistenza flessionale, L distanza tra gli appoggi.

Per trovare formule analoghe per le vôlte autoportanti occorrerebbe mettere in campo la loro *resistenza flessionale*. Ciò è possibile solo attraverso sistemi complicati di equazioni differenziali di ordine molto elevato sui quali purtroppo non saprei utilmente soffermarmi. Già i presenti calcoli, condensati nelle modeste tabelle qui riportate, hanno richiesto un lavoro per noi eccezionale tanto per condurli a buon fine quanto per controllarli materialmente e per discriminare tra una lunga serie i risultati più interessanti e saggiare varie *terne* che qui non sono neanche accennate. Non si osa quindi mettere certo in dubbio che la presente Nota costituisca poco più di un primo passo nella difficile problematica dei moltiplicatori critici λ_{cr} per dette vôlte, problematica che, forse, non sarà mai esplorata come meriterebbe. Non è infatti assai usuale in tecnica quella persistenza al calcolo che pare essere una dote esclusiva degli astronomi classici; le loro problematiche però - e qui alludo ad esempio a quella dei 3 corpi ed ai celebri lavori di Strömgreen che ad esso si riferiscono – trattano problemi che in certo senso sono problemi del pensiero sicchè, allora, tutto si spiega. Nel caso nostro, quando appena aleggia il pericolo dell'instabilità si provvede con qualche costola di

irrigidimento secondo le direttrici, così si evita l'ardimento estetico per non arrischiarsi in un campo che si sa inesplorato o quasi e che l'assillo della pratica porta a prendere al largo. Dopo qualche infortunio sono tranquillamente apparse così, nell'ambito delle luci notevoli, le *vôlte ortotrope* – con nervature lungo le direttrici, tutte di non molto difficile esecuzione, anche se noiose per l'impermeabilizzazione, o certe orditure a canestro, con uno spessore dell'ordine del metro, che hanno avuto una eccessiva rigidità ed altrettanta fortuna.

Se l'orditura è ortotropa occorre riprendere l'espressione di W_f della $(2a)$ sostituendola con la forma, che si deve considerare provvisoria, che già ho adottata per i cilindri ortotropi delle costruzioni subacquee,

$$2\,W_f = \frac{E\,d_o^3}{12\,(1-\nu^2)} \int_\Omega \{\varkappa_1^2 + (1+j)\,\nu\,\varkappa_1\,\varkappa_2 + j\,\varkappa_2^2 + (1+j)\,(1-\nu)\,\varkappa_{12}^2\}\,d\Omega$$

con

$$j = \left(\frac{d_o^*}{d_o}\right)^3 \qquad d_o^* = d_o \sqrt[3]{\frac{12\,\mathfrak{J}}{b d_o^3}}$$

essendo $\mathfrak{J}$ il momento di inerzia di una nervatura collaborante con la lastra di larghezza b, b intervallo tra nervatura e nervatura, che si potrà assumere dell'ordine di 1/10 della corda. Poichè d_o interviene alla 3ª potenza direttamente nelle espressioni di λ_{cr} l'efficacia della nervatura è evidentemente fondamentale.

Osservazione III. – Rileverò che in certe vôlte fortemente bombardate ed avallate per carico critico (quelle che non furono letteralmente schiantate) conseguentemente alla depressione successiva allo scoppio, amplificata negli effetti dal carattere ermetico del fabbricato, e vôlte che sempre più andavano avallandosi, (come per un fenomeno postumo di viscosità, nel senso che la deformazione andava aumentando con il tempo), l'applicazione di una nervatura centrale, quasi a guisa di busto ortopedico, è apparsa molto efficace per rimetterle in efficienza. Dette vôlte, molto ribassate, ellittiche ($2a = 25$ m. $b = 5$ m. L = 20,00 m.), costruite nel 1938 su miei disegni, per due capannoni lunghi ognuno circa m. 200, subirono il bombardamento nel 1943; la riparazione e ricostruzione venne iniziata alla fine del 1945.

Incidentalmente raccontai di quelle inflessioni progressive ad un illustre collega, il prof. Roš dell'« Empa » di Zurigo; mi disse che un tanto non lo stupiva affatto giacchè una celebre tra le vôlte autoportanti, l'Auditorium di Madrid, crollò per avallamento progressivo più di sei mesi dopo che una bomba era scoppiata in un suo intorno non proprio prossimo. Conclusi che, se anche a questa si fosse applicato il busto ortopedico, come ho fatto per le vôlte di cui dissi, la si sarebbe certamente salvata.

Anche per vôlte di cui i getti fossero per disavventura parzialmente gelati o confezionati con materiali che esaltano *la viscosità*, quali sono indubbiamente le sabbie e i *misti* micacei, l'introduzione di qualche costola è provvidenziale per innalzare il moltiplicatore critico. In genere, appena sorge

qualche dubbio sulla *stabilità qualitativa* – formazione di qualche avallamento – occorre troncare gli indugi e con qualche cucitura applicare il busto. Naturalmente, ciò sia detto solo per strutture che hanno sofferto per eventi eccezionali, che per strutture ex novo, i dubbi hanno da esser solo sul disegno, ed allora è meglio toglierli sin dall'inizio.

La soddisfazione per questo rimedio applicato a strutture che hanno sofferto per azioni belliche è stata generale: per le vôlte, per il cliente e per il costruttore, massimamente quando, il consiglio di applicarlo apparve in sulle prime dato invano e non so ben quali costosi accorgimenti o improvvide demolizioni si erano andate in suo luogo prevedendo e parzialmente attuando in tutto il loro non lieto aspetto economico.

Io credo che questi vaghi accenni diano alla quistione qui trattata un interesse sensibile e possano destare le forze necessarie per continuare nelle presenti indagini.

Concludendo rileverò che, in ogni caso, le vôlte autoportanti sono strutture di grandi risorse che giustificano le più grandi speranze. Le risorse aumentano quando la loro bombatura è cospicua. Certe vôlte napolitane che io avevo disegnate nel 1935 nell'U. T. della S. A. I. Ferrobeton, colpite in pieno da bombe di piccolo calibro *scoppiate all'estradosso* si sono forate senza dar luogo ad inconvenienti; altre a Genova (copertura di una grande sala a tracciare), sono state infilate da proiettili d'artiglieria che lasciarono solo dei fori abbastanza netti. Naturalmente è stato in simili casi sempre possibile lo sfogo dei gas sicchè non si sono formate sovrappressioni eccessive e conseguenti *perdite di forma*. Le quali, anche se appena sensibili, aumentano nel tempo – pur quando la viscosità sembrerebbe esser esaurita – sino a comprometterne gravemente l'esistenza della struttura.

Vôlte semicircolari rovesciate ho previste ad uso di serbatoio, (L. = 15, m., 2 $R_o = 6{,}00$ m., $s = 8$ cm.), la *tenuta* risultò perfetta, la stabilità alla apertura, che non mi riuscì valutare nel breve tempo che occorse per seguirle, garantita con una nervatura centrale chiusa; vôlte autoportanti ellittiche per solai, pareggiate con cretonati leggeri, per coperture di serbatoi interrati, quindi con pesanti rifianchi di terra, tutte [18] sopportarono egregiamente i loro carichi attraverso l'eventuale introduzione di qualche ortotropia, anche isolata, confortante là dove l'ignoranza non mi lasciava, sia pure grossolanamente, apprezzare il fatidico λ_{cr}, croce e delizia di tanti anni di ricerche.

Esempio: sia L=20,00 m., R=10,00 m., d_o=10 cm., $E=3{,}10^6$ to. m^{-2}, $\nu = 0{,}125$, p. s. = 2,5 to. m^{-3}. Si ha dalla terna $(\mathfrak{A})$, $\bar{\lambda} = 26{,}015$ e quindi

$$\lambda_{cr} = \frac{3 \cdot 10^6}{0{,}250} \cdot \left(\frac{10}{2000}\right)^3 \cdot \frac{\pi}{24(1-\nu^2)} \cdot 26{,}015 = 5{,}189.$$

Ciò significa che, per un carico di $5{,}189 \cdot 0{,}250 = 1{,}297$ to. m^{-2} si avrebbe instabilità. L'azione di un eventuale incastro risulta assai lieve in quanto, in tal caso, la vôlta cederebbe secondo la terna $(\mathfrak{B})$ anzichè secondo la terna

(18) G. KRALL, *Le vôlte autoportanti*. «Tecnica Italiana», ser. I, n. 3; Trieste 1946.

(𝔄) (che dà un valore $\bar{\lambda} = 30{,}00$ invece di 26,015) e detta terna è indipendente dai vincoli agli estremi.

Come ho già rilevato, se fosse $L = 30{,}00$ m., allora $L : R_0 = 3$ e per il semplice appoggio si ha (sulla Terna (𝔈)) $\bar{\lambda} = 26{,}305$ in luogo di $\bar{\lambda} = 26{,}015$, quindi pressappoco lo stesso valore. Il moltiplicatore critico λ_{cr} si riduce quindi nel rapporto $(20 : 30)^3$ a meno di non aumentare lo spessore nel rapporto 30 : 20. Se l'incastro è completo ($h = 6$) $\bar{\lambda} = 115{,}875$ ed il carico critico risulta, per quanto precede, $1{,}297 \cdot 115{,}875 : 26{,}305 = 5{,}713$ to. m^{-2}. Come si vede un valore circa 4,4 maggiore. Per una vôlta cicloidica di campata $L = 20{,}00$ m. e semiapertura $a\pi = 10{,}00$ m., fermi restando gli altri valori prima considerati, occorre garantire un incastro almeno con il coefficiente $h \simeq 12$ per tenersi nelle condizioni della vôlta circolare semplicemente appoggiata. Si trova infatti in tal caso $\bar{\lambda} = 24{,}69$ in luogo di $\bar{\lambda} = 26{,}015$.

A titolo conclusivo rileverò che è bene tener sempre presente il fattore $(d_0 : L)^3$ prima di interpretare le tabelle. Così ad esempio, se per $L : R_0 = 0{,}50$ (quindi per $L = 0{,}50 \times 10 = 5{,}00$ m.) risulta sulla terna (𝔅) $\bar{\lambda} = 0{,}4688$ in luogo di $\bar{\lambda} = 26{,}015$ corrispondente a $L = 20{,}00$ m.; il carico critico $g\lambda_{cr}$ è

$$g\lambda_{cr} = 1{,}297 \cdot \frac{0{,}4688}{26{,}015} \cdot \left(\frac{20{,}00}{5{,}00}\right)^3 = 1{,}490 \text{ to. } m^{-2},$$

un valore non molto discosto dal primitivo come è ben naturale, trattandosi della terna (𝔅). Sulle piccole luci comincia, per gli spessori che si considerano praticamente, a farsi sentire il regime flessionale che aumenta in ogni caso il λ_{cr}. Ma, c'è ancor molto da dire sul regime privo di flessione, prima di affrontare, con qualche successo, difficoltà, di ben altro calibro di quelle qui considerate, collegate al problema flessionale delle vôlte autoportanti.

Chimica. — *Sull'esaltamento dell'attività batteriostatica del 2-mercapto-benzotiazolo e di suoi derivati da parte dei sali di Bunte (sali dei S-esteri dell'acido tiosolforico)* (*). Nota di G. Bargellini e E. Del Pianto, presentata (**) dal Socio G. Bargellini.

Nel corso di una serie di esperienze riguardanti l'attività batteriostatica nei confronti dello Stafilococco aureo del 2-mercapto-benzotiazolo e di alcuni suoi derivati (1), abbiamo potuto osservare che l'attività di questi composti viene esaltata quando essi si trovino in presenza di etiltiosolfato di sodio. Pensando che il fenomeno osservato, se studiato più a fondo, avrebbe potuto fornirci qualche indicazione circa il meccanismo di azione di questi batteriostatici, abbiamo ritenuto utile soffermarci sull'argomento.

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica dell'Istituto Chimico della Università di Roma, Centro di Chimica Generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1948.

(1) I primi risultati di tali esperienze sono stati riassunti in una precedente Nota su questi stessi « Rendiconti », vol. IV, fasc. 1, 1948.

Ricordiamo che l'etiltiosolfato di sodio è un estere dell'acido tiosolforico e che composti di questo tipo, rispondenti alla formula generale R—S—SO_2—ONa in cui R è un radicale alchilico, vengono chiamati sali di Bunte essendo stati preparati per la prima volta da questo Autore [2]. Tali sali trovano impiego per la preparazione di altri composti organici solforati [3, 4, 5].

Nella presente Nota ci limitiamo a riferire sull'attività batteriostatica nei confronti del solo Stafilococco aureo. Ci siamo serviti del metodo delle diluizioni usando, come terreno di coltura, un brodo contenente, oltre ai comuni sali, l'1 % di estratto carneo standardizzato per batteriologia (Acas) e l'1 % di peptone. La semina è stata eseguita sempre con la stessa quantità di batteri (cc. 0,045 di brodocoltura di 24 ore per cc. 6 di terreno). Il pH del brodo era 7 e la temperatura di sviluppo 37° C. Lo sviluppo batterico è stato seguìto fino alla 48ª ora al nefelometro di Pulfrich usando tubi da saggio del diametro di mm. 16, illuminazione cuneiforme e filtro colorato L_1.

Dopo aver constatato che l'etiltiosolfato di sodio non esercita, da solo, alcuna attività batteriostatica nei confronti dello Stafilococco aureo neppure alla concentrazione, veramente notevole, di gr. 0,03 per cc., abbiamo preso in esame l'effetto di questo sale di Bunte sull'attività batteriostatica dei tre mercapto-benzotiazoli già precedentemente studiati [1]. I risultati sono riassunti nella tabella seguente:

Composto esaminato	concentrazione (gr./cc.) alla quale si ha inibizione dello sviluppo		$\frac{a}{b}$
	a terreno semplice	*b* terreno contenente mg. 0,785 per cc. di etiltiosolfato di sodio	
2-mercapto-benzotiazolo	$0{,}28 \times 10^{-4}$	$0{,}83 \times 10^{-5}$	3,37
6-nitro-2-mercapto-benzotiazolo . . .	$0{,}25 \times 10^{-4}$	$0{,}12 \times 10^{-4}$	2,08
6-ammino-2-mercapto-benzotiazolo . .	$0{,}18 \times 10^{-4}$	$0{,}16 \times 10^{-4}$	1,12

Risulta perciò che l'etiltiosolfato di sodio, alla concentrazione di mg. 0,785 per cc., esalta in modo notevole le attività batteriostatiche del 2-mercapto-benzotiazolo e del 6-nitro-2-mercapto-benzotiazolo, le quali vengono rispettivamente triplicata e raddoppiata, mentre esalta molto poco l'attività del 6-ammino-2-mercapto benzotiazolo.

Abbiamo inoltre notato che l'azione esaltante è in relazione con la quantità di sale di Bunte presente. La fig. 1 riporta appunto le curve di svi-

(2) H. Bunte, « Ber. », *7*, 646 (1874).
(3) Brev. Bayer e Co. D.R.P.: « Ber. », *22*, 115 (1889).
(4) D. T. Gibson, « J. Chem. Soc. », *1930*, 12 (1930).
(5) H. E. jr. Westlake e G. Dougherty, « J. Amer. Chem. Soc. », *63*, 658 (1941).

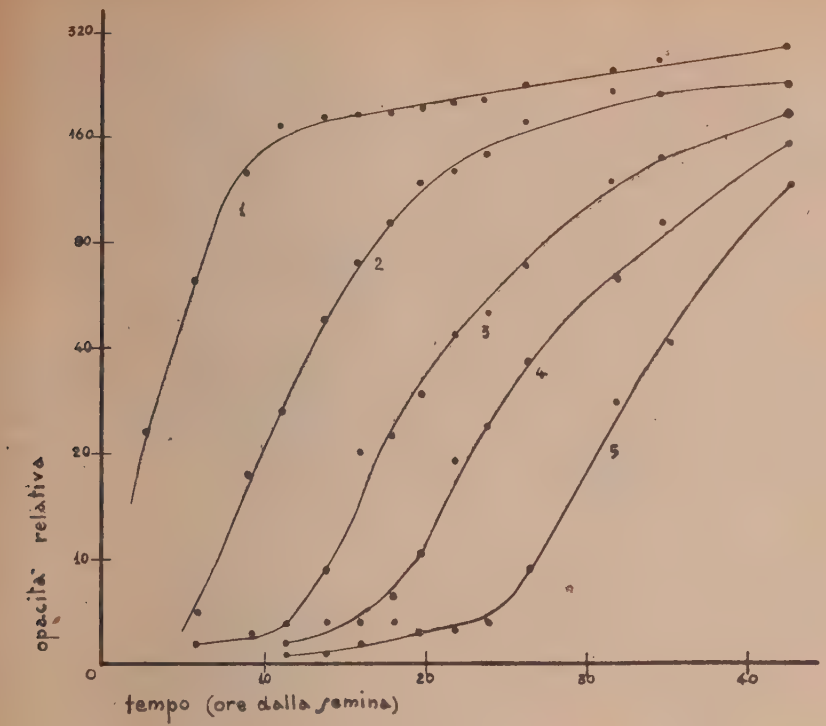


Fig. 1. – Curve di sviluppo dello Stafilococco aureo a concentrazioni eguali di 2–mercapto–benzotiazolo (gr. 0,23 × 10⁻⁵ cc.) e differenti di etiltiosolfato sodico (1: mg. 0,0; 2: mg. 0,192; 3: mg. 0,392; 4: mg. 0,588; 5: mg. 0,785 per cc.).

luppo dello Stafilococco aureo (riferite come curve di intorbidamento del terreno di coltura [6]) a concentrazione fissa di 2–mercapto–benzotiazolo e a concentrazioni progressivamente crescenti di etiltiosolfato sodico.

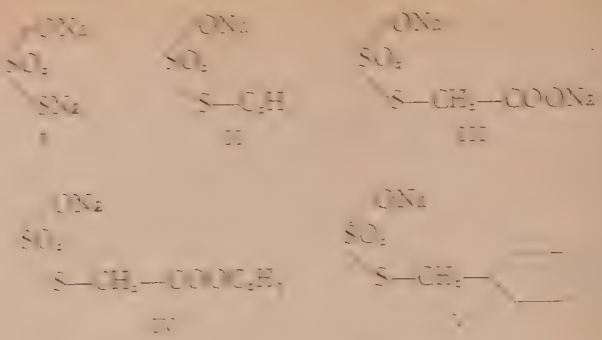
Appare evidente che, almeno nell'intervallo delle concentrazioni usate, l'azione esaltante aumenta con l'aumentare della quantità di sale di Bunte presente.

Di notevole interesse ci sembra soprattutto il fatto che l'etiltiosolfato sodico faccia risentire il suo effetto anche a sviluppo colturale già avanzato; la fig. 2 mostra come l'arresto dello sviluppo batterico sia quasi immediato e completo.

Ci proponiamo di indagare in futuro più a fondo su tale comportamento e sulla sua eventuale relazione col numero dei batteri presenti.

Per approfondire il meccanismo di azione dell'etiltiosolfato di sodio (II) abbiamo eseguito le esperienze, oltre che con il semplice tiosolfato (I) anche con l'acetotiosolfato di sodio (III), l'acetotiosolfato–etilsodico (IV) e il benzil–tiosolfato di sodio (V)

(6) Per opacità relativa intendiamo la differenza tra l'opacità letta e quella iniziale.



Abbiamo così potuto osservare che mentre il mercaptide di sodio non esercita alcuna azione esaltante sull'attività batteriostatica del 2-mercapto-benzotiazolo nei confronti dello Stafilococco aureo, tale azione è invece posseduta da tutti gli altri composti.

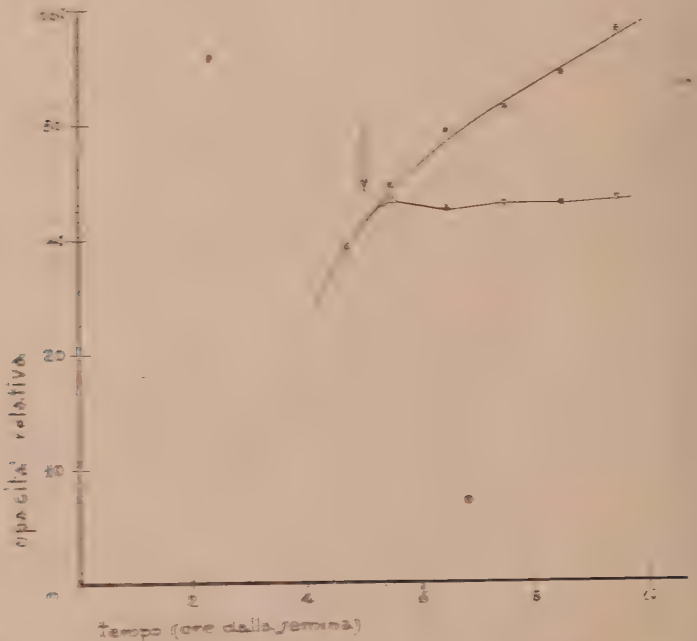


Fig. 1. – Curve di sviluppo dello stafilococco aureo in presenza di gr. 0,23 × 10⁻⁵ per cc. di 2-mercapto-benzotiazolo e con l'aggiunta rispettivamente di mg. 1,6 per 1 di solfidrato di sodio e sviluppo alla semina.

Fino ad ora abbiamo potuto mettere in evidenza l'azione esaltante esercitata dai mercapto-benzotiazoli in quanto altri batteriostatici quali la penicillina, la streptomicina ed alcuni chinoni: tricochinone, acido lapacico

e tenantrenchinone si sono dimostrati indifferenti alla presenza dei sali di Bunte.

Da questa serie di esperienze possiamo trarre le seguenti conclusioni:

1° l'etiltiosolfato di sodio, che non esercita da solo alcuna azione sullo sviluppo dello Stafilococco aureo, è capace di esaltare in grado notevole l'attività batteriostatica del 2-mercapto-benzotiazolo, in grado alquanto minore quella del 6-nitro-2-mercapto-benzotiazolo e in grado minimo quella del 6-ammino-2-mercapto-benzotiazolo;

2° tale azione esaltante aumenta, almeno entro certi limiti, con la quantità di etiltiosolfato di sodio presente;

3° essa si fa sentire anche a sviluppo batterico avanzato;

4° è posseduta, oltre che dall'etiltiosolfato di sodio, anche da altri sali analoghi al salé di Bunte;

5° si esplica sui mercapto-benzotiazoli e non su altri batteriostatici quali la penicillina, la streptomicina, ed alcuni chinoni.

Chimica organica. — *Contributo allo studio delle strutture elettroniche dei chinoni e delle forme chinoidi. – I. Forme orto e para chinoidi* *. Nota di G. B. BONINO e M. ROLLA presentata ** dal Socio G. B. BONINO.

Lo studio dei chinoni, ed in genere delle forme chinoidi, ha assunto oltre al suo naturale significato chimico, una spiccata importanza biochimica alla quale hanno assai contribuito le ricerche dei Biologi e dei Chimici di questi ultimi anni [1]. La classica chimica organica con i suoi schemi grafici ha certamente posto le basi per una comprensione del chimismo di queste sostanze e di queste forme. Più recentemente le teorie mesomeriche ed elettroniche hanno contribuito a rendere meno rigidi ed anzi tendenzialmente più « plastici » gli schemi classici, mentre i mezzi di indagine chimico-fisici ci hanno permesso di valutare le distanze fra gli atomi nelle varie molecole, e ci hanno mostrato l'aspetto delle sostanze chinoniche dal punto di vista elettrochimico ossido-riduttivo, permettendoci di addentrarci sulla « cinematica » delle ossiriduzioni chinoniche con mezzi eleganti, quale quello per esempio dei semichinoni di Michaelis [2]. Con nonostante oggi non si è ancor penetrato a fondo il problema delle strutture chinoniche né si è giunti ad una soddisfacente conoscenza dei diversi livelli elettronici, e non si è in altre parole inquadrato il problema delle forme chinoniche e chinoidi nella

* Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica Fisica ed Elettrochimica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico G. Ciamician dell'Università di Bologna.

** Nella seduta del 10 gennaio 1948.

(1) Vedi per esempio O. HOFFMANN, *Die Biochemie der Chinone*. « Experientia », III 4 p. 137 (1947).

(2) MICHAELIS, « Chem. Rev. », 16, 243 (1935).

nuova teoria quantomeccanica della valenza. Ricerche di questo tipo non sono solo importanti per lo studio dei chinoni propriamente detti, ma hanno vivo interesse anche per lo studio delle cosidette strutture chinoidi. Strutture queste sulle quali anche la chimica organica formale ha fissato la propria attenzione nello studio generale delle sostanze aromatiche a nuclei condensati [3]. Anzi merita di essere ricordata l'importanza attribuita dal Fieser alle strutture chinoidi nell'interpretazione dei rapporti tra costituzione chimica ed azione biologica nello studio degli idrocarburi cancerogeni [4].

Abbiamo perciò voluto iniziare uno studio delle forme benzochinoidi utilizzando i procedimenti quanto–meccanici ed in particolare seguendo il metodo generale degli orbitali preconizzato e sviluppato da Hund, Mulliken, Hückel, Lennard Jones, ecc. [5]. Questo metodo è stato da noi applicato in alcuni lavori di una serie parallela già in parte pubblicati negli anni 1939–1940 [6].

Nel caso del benzolo si può dimostrare, anche con semplici considerazioni gruppistiche come ha fatto uno di noi [7], che dei 24 orbitali elettronici di valenza riferibili agli atomi di carbonio che costituiscono l'anello benzenico, soltanto 18 sono simmetrici al piano dell'anello stesso, mentre gli altri 6 sono antisimmetrici a detto piano. Questo gruppo di 6 orbitali antisimmetrici (chiamati, nei lavori di Hückel, orbitali p_z) può essere trattato a sè e risolve il problema delle cosidette « quarte valenze dell'atomo di carbonio » nell'anello benzenico. Anche per i nuclei « aromatici condensati » (naftalina, antracene, ecc.) si può utilizzare un analogo risultato, considerando rispettivamente sistemi di 10 e 14 orbitali p_z antisimmetrici al piano dove giacciono gli atomi di carbonio « aromatici ».

Il problema della perturbazione di questi « orbitali antisimmetrici » porta a considerare gli elettroni come moventisi nel campo selfconsistente generato dagli altri elettroni e dai nuclei atomici disposti nello spazio secondo una determinata simmetria, che ovviamente coincide con la simmetria dello scheletro molecolare. Questa simmetria, se può in genere essere posta ipoteticamente sulla base delle formule di struttura della chimica organica ordinaria, è oggi anche fisicamente accessibile attraverso alle discussioni degli spettri molecolari Raman ed ultrarossi ed alle caratteristiche di simmetria delle varie oscillazioni molecolari rivelate dagli stessi spettri.

Sia:

$$v(r) = \Sigma_f v_f(r_f)$$

(3) Vedi per esempio FRIES, « Ann. », *454*, 121, 927; FIESER, *Theory of The Structure and reactions of aromatic compounds*: in GILLMANN, « Organic Chemistry », vol. I, p. 52, 149 (1937).

(4) Vedi per esempio FIESER, *Carcinogenic Activity, Structure, and Chemical Reactivity of polynuclear aromatic Hydrocarbons*. « The American Journal of Cancer », vol. 34, p. 37 (1938).

(5) Vedi per una messa a punto sintetica, LENNARD JONES, « Proc. Roy. Soc. », London. A. *158*, 280 (1937).

(6) BONINO, « Gaz. Chim. Ital. », *69*, 418 (1939); « Ber. », *71*, 129 (1938); M. ROLLA, « Boll. Fac. Chim. Ind. », Bologna, 1/2 (1940).

(7) BONINO, « Ber. », *71*, 129 (1938).

la energia potenziale globale e sia v_f l'energia potenziale di un elettrone p_z alla distanza r dall'atomo f (carbonio). Questa energia è dovuta sia all'attrazione del resto atomico, sia all'effetto medio di tutti gli altri elettroni. Se ψ_f è la funzione d'onda dell'elettrone p_z considerato nel campo di potenziale v_f e se W_o è la sua corrispondente energia, si deve verificare la nota equazione della meccanica ondulatoria

$$\left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2 + v_f\right]\psi_f = W_o\,\psi_f \qquad ; \qquad \nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\,.$$

La funzione d'onda globale Ψ nel campo $v(r)$ si esprimerà in approssimazione di ordine O come una combinazione lineare delle ψ_f : $\Psi = \Sigma_f c_f \psi_f$. I coefficienti c_f e le energie W_j totali del sistema elettronico perturbato soddisferanno alla loro volta alla solita equazione:

$$\left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2 + v\right]\Psi = W_j\Psi.$$

I vari livelli energetici W_j si ottengono risolvendo la cosiddetta « equazione secolare » del problema.

Se vogliamo applicare questo metodo al caso dei chinoni e delle forme chinoidi dobbiamo partire con lo stabilire la simmetria di queste molecole e di queste forme. Le considerazioni chimiche, riassunte nelle classiche formule di struttura dei chinoni, si accordano con i risultati delle indagini röntgenografiche [8], per mostrarci la molecola *p*-benzochinonica come piana e cioè con 6 atomi di carbonio e 2 atomi di ossigeno nello stesso piano. Considerazioni teoriche analoghe a quelle già svolte da uno di noi nel caso del benzolo [9] portano alla conclusione che nella forma piana del parabenzochinone potremo avere 8 orbitali elettronici antisimmetrici al piano molecolare, 6 corrispondenti ai 6 atomi di carbonio e 2 ai due atomi di ossigeno. Analoghe conclusioni (se pur con simmetrie diverse) si avranno per l'orto-benzochinone.

L'equazione secolare è data perciò da una equazione algebrica di ottavo grado che si ottiene annullando il determinante secolare di ottavo ordine che viene così schematizzato:

$$\text{(1)} \qquad \text{Determ.}\,|\,H_{fg} - W d_{fg}\,| = 0$$

dove

$$H_{fg} = \int \psi_f^* \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2 + v\right]\psi_g\, d\tau \qquad (\psi_f^* = \text{complesso coniugato di } \psi_f).$$

Tutti i termini H_{fg} riferentisi ad atomi non contigui vengono considerati, come al solito, trascurabili. Si dimostra allora che i termini $(H_{fg} - W d_{fg})$ di cui occorre tener conto, sono:

(8) Robertson, « Chem. Rev. », *16*, 430 (1935).
(9) Bonino, « Ber. », loc. cit.

$$H_{fg} - W d_{fg} = \begin{cases} \alpha + \Delta W = \varepsilon & \text{per} \quad g = f \\ -\beta_{fg} & \text{per} \quad g = f \pm 1 \\ \text{zero} & \text{per} \quad f \neq g \neq f \pm 1 \end{cases} \qquad d_{fg} = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad f = g \\ 0 & \text{per} \quad f \neq g. \end{cases}$$

Ponendo: $\rho = \dfrac{\Delta W + \alpha}{\beta} = \dfrac{\varepsilon}{\beta}$ ne viene $\Delta W = -\alpha + \rho\beta$.

La risoluzione dell'equazione secolare (1) appare immediatamente alquanto complessa ed indeterminata finchè non si possono fare delle ipotesi sufficienti sulle quantità α (integrali coulombiani) e sulle quantità β (integrali di risonanza). È necessario perciò procedere ad ulteriori semplificazioni. In tutti i problemi analoghi trattati dai precedenti AA. nei casi dei nuclei aromatici ad anelli condensati si pone senz'altro $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_i = \alpha$, e cioè si tengono uguali tutti gli integrali coulombiani. Questo, in via di prima approssimazione, è permesso se, come dimostra Hückel [10], si verifica:

$$\frac{|\alpha_g - \alpha_f|}{|\beta_{gf}|} \ll 1.$$

Resta da valutare le quantità β_{fg}. Le citate ricerche di Robertson, che ha applicato il metodo di Fourier–Patterson all'analisi della struttura molecolare del parachinone, hanno mostrato che in questa molecola (eccettuati i legami C—H) si possono distinguere due tipi di legami e cioè un tipo di legame «corto» corrispondente ai legami C = O ed ai legami C – C, ed un tipo di legami «lunghi» corrispondenti ai legami semplici C—C. Bisogna anche notare che i legami doppi C = C e C = O (e cioè di tipo «corto») nel parachinone risultano di lunghezza diversa.

Non ci sembra quindi sufficiente affrontare il problema della struttura delle forme chinoniche considerando tutti i legami di uguale lunghezza come appare in un tentativo di Seel [11].

Preferiamo piuttosto seguire il metodo di procedere utilizzato da Lennard Jones nello studio di catene polieniche e della naftalina, introducendo nei calcoli due valori dell'integrale di risonanza, uno corrispondente ai cosiddetti «legami lunghi» e l'altro ai «legami corti». Chiameremo perciò con β_d l'integrale di risonanza medio per i «legami corti» e con β_s l'integrale di risonanza relativo ai «legami lunghi».

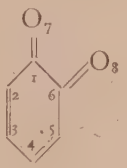
Non conoscendo a priori i singoli valori dei β, si risolveranno le equazioni secolari in funzione del rapporto β_d/β_s. Trattando il problema con una certa generalità, onde poterne applicare i risultati (se pur in via semiquantitativa) non solo alle molecole dei chinoni veri e propri ma anche allo studio delle forme chinoidi, sarà anzi utile poter constatare come variano le energie di risonanza elettronica, le energie minime di eccitazione ed i valori dei vari livelli elettronici al variare del rapporto β_d/β_s.

(10) HÜCKEL, «Zeit. f. Phys.», *70*, 265 (1931); *76*, 632 (1932).
(11) «Zeit. Phys. Chem.», B *51*, 229 (1942).

In questo primo lavoro daremo le risoluzioni generali delle equazioni secolari ed i calcoli dei livelli. In un prossimo lavoro, partendo dalle distanze interatomiche osservate nella molecola del parabenzochinone, calcoleremo i valori degli integrali di risonanza relativi ai due tipi di legami e da questi, utilizzando i risultati della presente Nota, potremo calcolare (secondo la nostra approssimazione) i livelli e la distribuzione della nuvola elettronica nelle molecole del parabenzochinone e dell'orto-benzochinone.

Per maggior chiarezza riferiamoci ai seguenti schemi chinonici a posizioni numerate

parabenzochinone
(o in genere forma parabenzochinoide)



ortobenzochinone
(o in genere forma ortobenzochinoide)

Si ponga:

parachinone
- β_d = integrale di risonanza medio per i legami 1–7, 4–8, 2–3, 5–6
- β_s = integrale di risonanza medio per i legami 1–2, 3–4, 4–5, 1–6

ortochinone
- β_d = integrale di risonanza medio per i legami 1–7, 6–8, 4–5, 2–3
- β_s = integrale di risonanza medio per i legami 1–6, 1–2, 3–4, 5–6.

Le rispettive equazioni secolari si scriveranno dunque:

1° per le forme parabenzochinoidi:

	(7)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(8)	
(7)	ε	β_d	0	0	0	0	0	0	
(1)	β_d	ε	β_s	0	0	0	β_s	0	
(2)	0	β_s	ε	β_d	0	0	0	0	
(3)	0	0	β_d	ε	β_s	0	0	0	$= 0$
(4)	0	0	0	β_s	ε	β_s	0	β_d	
(5)	0	0	0	0	β_s	ε	β_d	0	
(6)	0	β_s	0	0	0	β_d	ε	0	
(8)	0	0	0	0	β_d	0	0	ε	

2° per le forme ortochinoidi:

$$\begin{array}{c|cccccccc} & (7) & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (8) \\ (7) & \varepsilon & \beta_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1) & \beta_d & \varepsilon & \beta_s & 0 & 0 & 0 & \beta_s & 0 \\ (2) & 0 & \beta_s & \varepsilon & \beta_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (3) & 0 & 0 & \beta_d & \varepsilon & \beta_s & 0 & 0 & 0 \\ (4) & 0 & 0 & 0 & \beta_s & \varepsilon & \beta_d & 0 & 0 \\ (5) & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_d & \varepsilon & \beta_s & 0 \\ (6) & 0 & \beta_s & 0 & 0 & 0 & \beta_s & \varepsilon & \beta_d \\ (8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_d & \varepsilon \end{array} = 0.$$

Se si pone

$$\frac{\varepsilon_i}{\beta_s} = \xi_i \quad ; \quad \frac{\beta_d}{\beta_s} = \eta$$

le equazioni possono essere poste sotto una forma più comodamente accessibile al calcolo.

La risoluzione delle due equazioni secolari relative alle forme para ad orto benzochinoidi è stata eseguita dall'Istituto per le applicazioni del calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche diretto dall'illustre prof. Picone, che teniamo a ringraziare nel modo più vivo e caloroso. L'Istituto per le applicazioni del calcolo ci ha fornito delle equazioni generali risolutive, che ci permettono di calcolare per ciascun valore del rapporto η i valori delle ξ_i.

Se poniamo $x_i = \xi_i^2$ e $y = \eta^2$ le equazioni generali risolutive delle due equazioni secolari sovrascritte risultano le seguenti

ortochinone e forme ortochinoidi: $(x-y)^4 - 4x(x-y)^2 + 4x(x-y) - x = 0$

parachinone e forme parachinoidi: $(x-y)[(x-y)^3 - 4x(x-y) + 4x] = 0.$

In questa prima Nota riproduciamo alcuni risultati corrispondenti a valori di y inferiori o eguali a 2. Questi risultati che hanno un interesse per lo studio delle strutture chinoidi più che per i chinoni propriamente detti e per i quali occorre introdurre nei calcoli valori di $y > 2$ ci saranno utili per ulteriori indagini sugli idrocarburi a nuclei condensati ed in particolare su idrocarburi cancerogeni.

Riportiamo nelle seguenti tabelle in funzione di β_s i valori delle energie dei vari livelli elettronici per il problema delle forme para ed orto benzochinoidi nell'intervallo $y = 1$ fino a $y = 2$. Nella tabella I sono calcolati i valori dell'energia dei vari livelli leganti ed antileganti per la forma ortochinoide e nella tabella II sono dati i risultati per la forma parachinoide.

Tabella I.

Struttura ortochinoide.

y	η	$\xi_i = \frac{\varepsilon_i}{\beta_s}$: livelli di antilegame				livelli di legame			
		ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8
1,0	1,0000	2,1935	1,2949	1,1935	0,2949	0,2949	— 1,1935	— 1,2949	2,1935
1,1	1,0488	2,2354	1,3295	1,2354	0,3295	— 0,3295	1,2354	— 1,3295	2,2354
1,2	1,0954	2,2759	1,3636	1,2759	0,3636	— 0,3636	— 1,2759	1,3636	— 2,2759
1,4	1,1832	2,3532	1,4303	1,3532	0,4303	— 0,4303	— 1,3532	— 1,4303	— 2,3532
2,0	1,4142	2,5615	1,6180	1,5615	0,6180	— 0,6180	— 1,5615	1,6180	— 2,5615

Tabella II.

Struttura parachinoide.

y	η	$\xi_i = \frac{\varepsilon_i}{\beta_s}$: livelli di antilegame				livelli di legame			
		ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8
1,0	1,0000	2,1790	1,4811	1,0000	0,3111	— 0,3111	— 1,0000	1,4811	— 2,1700
1,1	1,0488	2,2137	1,5100	1,0488	0,3451	— 0,3451	— 1,0488	— 1,5100	— 2,2137
1,2	1,0954	2,2557	1,5389	1,0954	0,3786	— 0,3786	— 1,0954	— 1,5389	2,2557
1,4	1,1832	2,3353	1,5964	1,1832	0,4443	— 0,4443	— 1,1832	— 1,5964	— 2,3353
2,0	1,4142	2,5483	1,7634	1,4142	0,6293	— 0,6293	— 1,4142	1,7634	— 2,5483

Considerando due elettroni su ogni livello « legante » nello stato fondamentale delle molecole si può calcolare facilmente dalle tabelle I e II l'energia di risonanza « pro elettrone p_z » sempre espressa in funzione di β_s:

Tabella III.

Valori dell'energia media di risonanza pro elettrone nelle forme orto e parachinoidi.

y	1	1,2	1,4	2
Forme ortochinoidi	1,24 β_s	1,32 β_s	1,39 β_s	1,59 β_s
Forme parachinoidi	1,24 β_s	1,32 β_s	1,39 β_s	1,59 β_s

TABELLA IV.

Valori dell'energia minima di eccitazione.

γ =	1	1,2	1,4	2
Forme ortochinoidi	0,5898 β_s	0,7272 β_s	0,8606 β_s	1,2360 β_s
Forme parachinoidi	0,6222 β_s	0,7573 β_s	0,8886 β_s	1,2580 β_s

A parità dei valori di β_s e cioè dell'integrale di risonanza del legame del « tipo lungo », si vede che le energie medie di risonanza delle due forme orto e parachinoidi sono uguali. Sarebbe perciò difficile ricercare in una differenza dell'energia di risonanza degli elettroni p_z a parità dei valori di γ le differenze di stabilità delle due forme orto e parachinoidi. Per una discussione più approfondita occorrerebbe quindi avere più precise informazioni sulle distanze interatomiche nelle molecole corrispondenti alle due forme.

Le forme ortochinoidi mostrano viceversa a parità del valore β_s una più piccola energia minima molecolare di eccitazione. Le differenze però non sono notevoli.

Bisogna concludere dunque che per trovare delle significative differenze tra le energie medie di risonanza elettronica e tra le energie minime di eccitazione delle due forme orto e parachinoidi bisognerebbe ammettere delle notevoli differenze tra le lunghezze dei rispettivi legami e quindi dei rispettivi valori degli integrali di risonanza nelle due forme. Determinazioni sperimentali di distanze interatomiche sarebbero in questo campo fortemente auspicabili.

Nel caso limite ideale nel quale si abbia $\gamma = 1$ si vede dalle tabelle che l'energia media di risonanza pro elettrone ammonta a 1,24 β_s. Siccome per $\gamma = 1$ si ha $\beta_s = \beta_d = \beta$ e questo valore β coincide perciò allora con quello relativo al calcolo della molecola del benzolo e della naftalina, si può osservare che l'energia media di risonanza pro elettrone sarebbe in questo caso notevolmente inferiore a quella « aromatica », che si calcola per il benzolo (1,33 β) e per la naftalina (1,37 β). Essa però è superiore all'energia media di risonanza pro elettrone corrispondente ad una semplice coniugazione olefinica di tipo butadienico (1,12 β) e si avvicina al caso ideale dell'energia media di risonanza pro elettrone in un sistema di 4 doppi legami in catena ciclooctotetraenica regolare o di tre doppi legami in catena cicloeptatrienica pure regolare [12]. Giova pure ricordare che l'energia di risonanza dedotta da Wheland [13] dai calori molecolari di combustione per il parachinone ammonta a sole 16 calorie per molecolagrammo mentre per il benzolo

(12) HÜCKEL, « Zeit. f. Phys. », *76*, 636 (1932).

(13) WHELAND, *The theory of resonance*, New York, 1947, p. 69.

ammonta a 41 calorie e per la naftalina a 77 calorie, ciò che corrisponde ad un valore medio pro elettrone di 2 calorie nel parabenzochinone, 7 calorie circa nel benzolo e 7,7 calorie nella naftalina.

Dunque sperimentalmente l'energia media di risonanza pro elettrone nel chinone si mostra nettamente inferiore a quella dei nuclei aromatici veri e propri.

In prossime Note mostreremo come partendo dai valori delle distanze interatomiche C—C, C=C e C=O si possa giungere a valori ragionevoli di β_s e di β_d con i quali fissare i rapporti β_d/β_s, che possono permettere di giungere a conclusioni pratiche nello studio quantomeccanico delle strutture elettroniche dell'orto e del parabenzochinone.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra un teorema di approssimazione per le superficie continue in forma parametrica.* Nota (*) di L. CESARI, presentata dal Socio M. PICONE.

1. Sia S una superficie continua e sia

$$(1)\quad S: \quad x = x(u,v) \quad , \quad y = y(u,v) \quad , \quad z = z(u,v) \quad , \quad (u,v) \in Q \, ,$$

una sua rappresentazione sul quadrato fondamentale $Q \equiv [0 \leq u \leq 1 \, , \, 0 \leq v \leq 1]$ del piano uv. Sia L (S) l'area secondo Lebesgue della superficie S, siano Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 le tre trasformazioni piane (superficie piatte) nelle quali la superficie S si proietta sui piani coordinati yz , zx , xy. Sia poi G (S) l'area di Geocze della superficie S che si definisce attraverso le note funzioni di poligono $g(\pi) , g_r(\pi) , r = 1 , 2 , 3$. Siano poi T (S) l'analoga area e $t(\pi) , t_r(\pi) , \tau_r(\pi) , r = 1 , 2 , 3$, le relative funzioni di poligono precedentemente introdotte. Per tutte le definizioni rimando alla mia precedente Nota (1) su questi « Rendiconti » in cui esse sono state richiamate. Sia inoltre $\eta(I)$ l'oscillazione della rappresentazione (1) della superficie S sopra un insieme qualsiasi I di Q (2).

Ho dimostrato altrove che, per ogni superficie continua S, è $G(S) = L(S)$ e, se $L(S) < +\infty$, anche $T(S) = G(S) = L(S)$ (3). Ho dimostrato inoltre numerose altre proprietà geometriche delle superficie continue, per le

(*) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1947.

(1) L. CESARI, *Sull'area secondo Lebesgue delle superficie continue*, I, questi «Rendiconti», ser. VIII, vol. III, pp. 486–95; inoltre L. CESARI, *Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica*. « Boll. U. M. I. », ser. II, Anno IV (1942), pp. 109–117.

(2) Loc. cit., in (1).

(3) L. CESARI, a) *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica*. « Memorie Accademia d'Italia », vol. XIII, n. 24 (1943), pp. 1323–1481 e part. p. 1401; b) *Una uguaglianza fondamentale per l'area delle superficie*, id. vol. XIV, n. 29 (1944), pp. 891–951.

quali mi sono valso; tra l'altro, dei seguenti « teoremi di approssimazione » I e II che richiamo.

TEOREMA I [4]. - *Sia* S *una superficie continua; sia la* (1) *una sua rappresentazione e siano* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *le relative trasformazioni piane. Ad ogni numero* $\varepsilon > 0$ *arbitrario si può far corrispondere un gruppo di poligoni semplici* $[\pi_i, i = 1, 2, \cdots, n]$ *interni a* Q *a due a due senza punti interni in comune, tali che, se* C_{ri}, $r = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \cdots, n$, *sono le curve piane continue e chiuse immagini delle poligonali* π_i^* *costituenti la periferia di* π_i, *rispetto alle trasformazioni* Φ_r, *risulta*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} C_{ri} \right| < \varepsilon, \quad r = 1, 2, 3, \qquad \eta(\pi_i) < \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} t(\pi_i) > T(S) - \varepsilon, \qquad \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i) > T(\Phi_r) - \varepsilon, \quad r = 1, 2, 3,$$

$$\sum_{i=1}^{n} g(\pi_i) > G(S) - \varepsilon, \qquad \sum_{i=1}^{n} g_r(\pi_i) > G(\Phi_r) - \varepsilon, \quad r = 1, 2, 3.$$

Siano ora

$$(2) \quad \begin{cases} S: & x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v) \in Q, \\ S_p: & x = x_p(u,v), \quad y = y_p(u,v), \quad z = z_p(u,v), \quad (u,v) \in Q, \quad p = 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

superficie continue di area finita secondo Lebesgue.

Diremo Φ_r, Φ_{pr}, $r = 1, 2, 3$, $p = 1, 2, \cdots$, le trasformazioni piane relative alle superficie S, S_p. Sia $[\pi_i, i = 1, 2, \cdots, n]$ un gruppo di poligoni semplici di Q, a due a due senza punti interni in comune, siano $c_{ri}, c_{ri}^{(p)}$, $r = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $p = 1, 2, \cdots$, le curve continue e chiuse immagini delle poligonali π_i^*, costituenti la periferia di π_i, rispetto alle trasformazioni Φ_r, Φ_{pr}. Se I è un insieme di punti di Q, diciamo $\eta(I)$, $\eta^{(p)}(I)$ le oscillazioni delle (2) sull'insieme I. Indichiamo infine con G (S), T (S), $g(\pi)$, $t(\pi)$, ecc. le già indicate funzioni per la superficie S e G (S_p), T (S_p), $g^{(p)}(\pi)$, $t^{(p)}(\pi)$, ecc. quelle per le superficie S_p, $p = 1, 2, \cdots$

Vale il seguente

TEOREMA II [5]. - *Se le* (23) *sono superficie continue di area finita secondo Lebesgue, se* $\lim_{p \to \infty} L(S_p) = L(S)$ *e se, uniformemente in* Q, *risulta*

$$\lim_{p \to \infty} x_p(u,v) = x(u,v), \qquad \lim_{p \to \infty} y_p(u,v) = y(u,v), \qquad \lim_{p \to \infty} z_p(u,v) = z(u,v),$$

allora ad ogni numero $\varepsilon > 0$ *arbitrario si può fare corrispondere un intero* $\bar{p}$ *e un gruppo di poligoni semplici* $[\pi_i, i = 1, 2, \cdots, n]$ *di* Q, *a due a due senza punti interni in comune, tali che*

(4) Loc. cit. in (3), *a*), p. 1376.
(5) Loc. cit. in (3), *a*), p. 1384.

$$(3)\quad \begin{cases} \left|\sum_{i=1}^{n} C_{ri}\right| < \varepsilon, \quad r = 1,2,3, & \eta(\pi_i) < \varepsilon, \quad i = 1,2,\cdots,n, \\ \sum_{i=1}^{n} g_r(\pi_i) > G(\Phi_r) - \varepsilon, \quad r = 1,2,3, & \sum_{i=1}^{n} g(\pi_i) > G(S) - \varepsilon, \\ \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i) > T(\Phi_r) - \varepsilon, \quad r = 1,2,3, & \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i) > T(S) - \varepsilon \end{cases}$$

e, per ogni $p \geq \bar{p}$, *anche*

$$(4)\quad \begin{cases} \left|\sum_{i=1}^{n} C_{ri}^{(p)}\right| < \varepsilon, \quad r = 1,2,3, & \eta^{(p)}(\pi_i) < \varepsilon, \quad i = 1,2,\cdots,n, \\ \sum_{i=1}^{n} g_r^{(p)}(\pi_i) > G(\Phi_{pr}) - \varepsilon, \quad r = 1,2,3, & \sum_{i=1}^{n} g^{(p)}(\pi_i) > G(S_p) - \varepsilon, \\ \sum_{i=1}^{n} t_r^{(p)}(\pi_i) > T(\Phi_{pr}) - \varepsilon, \quad r = 1,2,3, & \sum_{i=1}^{n} t^{(p)}(\pi_i) > T(S_p) - \varepsilon, \\ \sum_{i=1}^{n} |\tau_r^{(p)}(\pi_i) - \tau_r(\pi_i)| < \varepsilon, \quad r = 1,2,3, & \sum_{i=1}^{n} |t^{(p)}(\pi_i) - t(\pi_i)| < \varepsilon. \end{cases}$$

In altro lavoro avrò occasione di utilizzare ulteriormente il teorema II in questioni riguardanti la nozione di integrale sopra una superficie e perciò mi sembra opportuno di dare, nella presente Nota, una nuova e più rapida dimostrazione del teorema II. Più precisamente dimostrerò la seguente proposizione III che, tenuto conto del teorema I, è alquanto più generale della II.

TEOREMA III. – *Se le* (2) *sono superficie continue di area finita secondo Lebesgue, se* $\lim L(S_p) = L(S)$ *e se, uniformemente in* Q, *risulta:*

$$\lim_{p\to\infty} x_p(u,v) = x(u,v), \quad \lim_{p\to\infty} y_p(u,v) = y(u,v), \quad \lim_{p\to\infty} z_p(u,v) = z(u,v)$$

allora, ad ogni numero $\varepsilon > 0$ *arbitrario, si può far corrispondere un altro numero* $\gamma > 0$ *tale che, comunque fissato un gruppo di poligoni semplici* $[\pi_i,\ i = 1,2,\cdots,n]$ *di* Q *a due a due senza punti interni in comune e tali che,*

$$(5)\quad \begin{cases} \left|\sum_{i=1}^{n} C_{ri}\right| < \gamma, \quad r = 1,2,3, & \eta(\pi_i) < \gamma, \quad i = 1,2,\cdots,n, \\ \sum_{i=1}^{n} g_r(\pi_i) > G(\Phi_r) - \gamma, \quad r = 1,2,3, & \sum_{i=1}^{n} g(\pi_i) > G(S) - \gamma, \\ \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i) > T(\Phi_r) - \gamma, \quad r = 1,2,3, & \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i) > T(S) - \gamma \end{cases}$$

si può determinare un intero $\bar{p}$ tale che, per ogni $p > \bar{p}$ risulta anche

$$(6)\quad \begin{cases} \left|\sum_{i=1}^{n} C_{ri}^{(p)}\right| < \varepsilon, \quad r = 1,2,3, \quad , \qquad \eta^{(p)}(\pi_i) < \varepsilon, \quad i = 1,2,\cdots,n, \\ \sum_{i=1}^{n} g_r^{(p)}(\pi_i) > G(\Phi_{pr}) - \varepsilon, \quad r = 1,2,3, \qquad \sum_{i=1}^{n} g^{(p)}(\pi_i) > G(S_p) - \varepsilon, \\ \sum_{i=1}^{n} t_r^{(p)}(\pi_i) > T(\Phi_{pr}) - \varepsilon, \quad r = 1,2,3, \qquad \sum_{i=1}^{n} t^{(p)}(\pi_i) > T(S_p) - \varepsilon, \\ \sum_{i=1}^{n} |\tau_r^{(p)}(\pi_i) - \tau_r(\pi_i)| < \varepsilon, \quad r = 1,2,3, \qquad \sum_{i=1}^{n} |t^{(p)}(\pi_i) - t(\pi_i)| < \varepsilon. \end{cases}$$

2. Dimostrazione del teorema III. - Dalle ipotesi e dal teorema da me dimostrato nel mio precedente lavoro di questi « Rendiconti »[6], risulta che, insieme alle relazioni $\lim_{p\to\infty} |S_p, S| = 0$, $\lim_{p\to\infty} L(S_p) = L(S)$, debbono valere necessariamente anche le seguenti $\lim_{p\to\infty} L(\Phi_{pr}) = L(\Phi_r)$, $r = 1,2,3$.

Da un mio precedente teorema[7] segue che le funzioni caratteristiche

$$\Psi(x,y;\Phi_r) \quad r = 1,2,3, \qquad \Psi(x,y;\Phi_{pr}), \quad r = 1,2,3, \quad p = 1,2,\cdots.$$

sono equiassolutamente integrabili e quindi esiste un numero $\tau > 0$ tale che, per ogni insieme misurabile h, $h \subset K_r$, $|h| < \tau$, risulta

$$\iint_h \Psi(x,y;\Phi_r)\,dx\,dy < \frac{\varepsilon}{18}, \qquad \iint_h \Psi(x,y;\Phi_{pr})\,dx\,dy < \frac{\varepsilon}{18},$$

$$r = 1,2,3, \quad p = 1,2,\cdots.$$

Possiamo inoltre supporre $\tau \leq \varepsilon$. Consideriamo ora un qualunque gruppo di poligoni $[\pi_i, i = 1,2,\cdots,n]$ di Q a due a due senza punti interni in comune, tali che

$$(7)\quad \begin{cases} \left|\sum_{i=1}^{n} C_{ri}\right| < \frac{\tau}{2} \quad r = 1,2,3, \qquad \eta(\pi_i) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad i = 1,2,\cdots,n, \\ \sum_{i=1}^{n} g_r(\pi_i) > G(\Phi_r) - \frac{\varepsilon}{3}, \quad r = 1,2,3, \qquad \sum_{i=1}^{n} g(\pi_i) > G(S) - \frac{\varepsilon}{3}, \\ \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i) > T(\Phi_r) - \frac{\varepsilon}{3}, \quad r = 1,2,3, \qquad \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i) > T(S) - \frac{\varepsilon}{3}. \end{cases}$$

(6) Loc. cit. in (1), primo lavoro citato.
(7) Loc. cit. in (3), p. 1348.

Poniamo $E_r = \sum_{i=1}^{n} C_{ri}$, $r = 1, 2, 3$, ed osserviamo che l'insieme E_r di punti di K_r è chiuso e quindi per ogni numero reale $t > 0$ l'insieme $(E_r)_t$ dei punti di K_r che distano da E_r meno di t è aperto e $\lim_{t \to 0} (E_r)_t - E_r$, $\lim_{t \to 0} |(E_r)_t| = |E_r|$. Esiste perciò un numero $\rho_r > 0$ tale che $|(E_r)_{\rho_r}| < |E_r| + \frac{\tau}{2} < \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} = \tau$.

Sia p un intero tale che, per ogni $p \geq \bar{p}$, si abbia

$$\| S_p, S \| < \min\left[\rho_1, \frac{\bar{\varepsilon}}{3}\right], \quad |L(S_p) - L(S)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad L(\Phi_{pr}) - L(\Phi_r) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad r = 1, 2, 3,$$

e quindi, essendo

$$L(S) = G(S) = T(S), \quad L(S_p) = G(S_p) = T(S_p), \quad p = 1, 2, \cdots,$$

$$L(\Phi_r) = G(\Phi_r) = T(\Phi_r), \qquad r = 1, 2, 3,$$

$$L(\Phi_{pr}) = G(\Phi_{pr}) = T(\Phi_{pr}), \quad r = 1, 2, 3, \; p = 1, 2, \cdots,$$

anche

$$T(S_p) - T(S) | < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |T(\Phi_{pr}) - T(\Phi_r)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad r = 1, 2, 3, \; p \geq \bar{p}.$$

Intanto, per ogni $p \geq \bar{p}$, risulta

$$\eta^{(p)}(\pi_i) \leq \bar{\eta}(\pi_i) + 2 \| S_p, S \| < \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{8}$$

D'altra parte le curve $C_{ri}^{(p)}$ sono interamente contenute in $(E_r)_{\rho_1}$ e quindi

$$\left| \sum_{i=1}^{n} C_{ri}^{(p)} \right| < |(E_r)_{\rho_1}| < \tau \leq \varepsilon. \tag{9}$$

Di più, in tutti i punti (x, y) di $K_r - (E_r)_{\rho_1}$ risulta

$$O(x, y; C_{ri}) = O\left(x, y; C_{ri}^{(p)}\right) \tag{10}$$

e quindi, essendo

$$\tau_r(\pi_i) = \iint_{K_r} O(x, y; C_{ri})\, dx\, dy, \qquad t_r(\pi_i) = |\tau_r(\pi_i)|,$$

$$\tau_r^{(p)}(\pi_i) = \iint_{K_r} O\left(x, y; C_{ri}^{(p)}\right) dx\, dy, \qquad t_r^{(p)}(\pi_i) = |\tau_r^{(p)}(\pi_i)|,$$

$$r = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad p = 1, 2, \cdots,$$

si ottiene, per ogni $p = \bar{p}$,

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{n} \left| t_r(\pi_i) - t_i^{(p)}(\pi_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \tau_r(\pi_i) - \tau_r^{(p)}(\pi_i) \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \iint_{K_r} O(x, y; C_{ri})\, dx\, dy - \iint_{K_r} O\left(x, y; C_{ri}^{(p)}\right) dx\, dy \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \iint_{(E_r)_{Q_1}} O(x, y; C_{ri})\, dx\, dy - \iint_{(E_r)_{Q_1}} O\left(x, y; C_{ri}^{(p)}\right) dx\, dy \right| \leq$$

$$\leq \iint_{(E_r)_{Q_1}} \sum_{i=1}^{n} \left| O(x, y; C_{ri}) \right| dx\, dy + \iint_{(E_r)_{Q_1}} \sum_{i=1}^{n} \left| O\left(x, y; C_{ri}^{(p)}\right) \right| dx\, dy \leq$$

$$\leq \iint_{(E_r)_{Q_1}} \Psi(x, y; \Phi_r)\, dx\, dy + \iint_{(E_r)_{Q_1}} \Psi(x, y; \Phi_{pr})\, dx\, dy < \frac{\varepsilon}{18} + \frac{\varepsilon}{18} = \frac{\varepsilon}{9}.$$

Ne consegue, sempre per ogni $p \geq \bar{p}$,

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{n} \left| t(\pi_i) - t\left(\pi_i^{(p)}\right) \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \left[\sum_{r=1}^{3} t_r^2(\pi_i) \right]^{1/2} - \left[\sum_{r=1}^{3} t_r^{(p)}(\pi_i) \right]^{1/2} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{3} \sum_{i=1}^{n} \left| t_r(\pi_i) - t_r^{(p)}(\pi_i) \right| < 3\,\frac{\varepsilon}{9} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalmente, per ogni $p \geq \bar{p}$,

$$(13)\qquad \begin{cases} 0 \leq T(\Phi_{pr}) - \sum_{i=1}^{n} t_r^{(p)}(\pi_i) = [T(\Phi_{pr}) - T(\Phi_r)] + \left[T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i) \right] + \\ + \left[\sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i) - \sum_{i=1}^{n} t_r^{(p)}(\pi_i) \right] \leq T(\Phi_{pr}) - T(\Phi_r) + \left| T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i) \right| + \\ + \sum_{i=1}^{n} \left| t_r(\pi_i) - t_r\left(\pi_i^{(p)}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \\ 0 \leq T(S_p) - \sum_{i=1}^{n} t^{(p)}(\pi_i) = [T(S_p) - T(S)] + \left[T(S) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i) \right] + \\ + \left[\sum_{i=1}^{n} t(\pi_i) - \sum_{i=1}^{n} t^{(p)}(\pi_i) \right] \leq T(S_p) - T(S) + \left| T(S) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i) \right| + \\ + \sum_{i=1}^{n} \left| t(\pi_i) - t^{(p)}(\pi_i) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{cases}$$

Dalle relazioni:

$$(14)\qquad \begin{cases} G(S_p) = T(S_p), \quad G(\Phi_{pr}) = T(\Phi_{pr}), \quad t^{(p)}(\pi_i) \leq g^{(p)}(\pi_i), \\ t_r^{(p)}(\pi_i) \leq g_r^{(p)}(\pi_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad r = 1, 2, 3, \quad p = 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

e dalle (13) e (14), segue, infine, per ogni $p \geq \bar{p}$,

$$(15)\quad \begin{cases} 0 \leq G(\Phi_{pr}) - \sum_{i=1}^{n} g_r^{(p)}(\pi_i) \leq T(\Phi_{pr}) - \sum_{i=1}^{n} t_r^{(p)}(\pi_i) < \varepsilon, & r = 1, 2, 3 \\ 0 \leq G(S_p) - \sum_{i=1}^{n} g^{(p)}(\pi_i) \leq T(S_p) - \sum_{i=1}^{n} t^{(p)}(\pi_i) < \varepsilon. \end{cases}$$

Le (8), (9), (11), (12), (13), (15), che valgono tutte per ogni $p \geq \bar{p}$, assicurano le (6) del teorema III.

Il teorema III è così dimostrato ove si ponga $\gamma = \min\left[\frac{\tau}{2}, \frac{\varepsilon}{3}\right]$.

Matematica. — *Sulla continuità degli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni*(*). Nota I (**) di LANDOLINO GIULIANO, presentata dal Corrisp. G. SANSONE.

1. È ormai classico il seguente teorema di Tonelli (1):

Supposta la funzione $f(x, y, y')$ *continua insieme con le sue derivate parziali* $f_{y'}, f_{y'y'}, f_{y'x}$ (2), *per la continuità dell'integrale* $I_C \equiv \int_C f(x, y, y')\,dx$ *su ogni curva assolutamente continua* $C: y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, *è necessario e sufficiente che sia*:

$$f(x, y, y') \equiv P(x, y) + y' Q(x, y).$$

Se dalle curve assolutamente continue del piano (x, y) si passa alle curve assolutamente continue

$$C: \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \quad a \leq x \leq b$$

dello spazio ed agli integrali

$$\int_C f(x, y, z, y', z')\,dx$$

si prova, analogamente al caso piano, che, *supposta la* $f(x, y, z, y', z')$ *funzione continua insieme con le sue derivate parziali* $f_{y'}$ *e* $f_{z'}$, *per la continuità dell'integrale ora scritto su tutte le curve* C *indicate, è necessario che si abbia*:

$$f(x, y, z, y', z') = M(x, y, z) + y' N(x, y, z) + z' P(x, y, z).$$

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(**) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1947.

(1) L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. I. Zanichelli, Bologna (1922), p. 369, n. 143, e p. 385, n. 149.

(2) Si osservi che l'ipotesi dell'esistenza e della continuità delle derivate parziali $f_{y'y'}$, $f_{y'x}$ è inutile per stabilire che la condizione indicata nel testo è necessaria (cfr. L. TONELLI, *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*. « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », s. II, vol. III, 1934, pp. 401-450).

Da un esempio molto semplice dato da E. J. McShane risulta che tale condizione non è sufficiente, anche se si suppone che le funzioni $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$ e $P(x, y, z)$ ammettano le derivate parziali di tutti gli ordini [3]. Il Tonelli si propose pertanto di approfondire la ricerca delle condizioni necessarie per la continuità dell'integrale

$$(1) \qquad \int_C \{ M(x, y, z) + y' N(x, y, z) + z' P(x, y, z) \} dx$$

nella classe delle curve sopra indicate e pervenne al teorema seguente.

Riferito lo spazio (x, y, z) ad una terna di assi cartesiani ortogonali e detto *campo* A un insieme di punti dello spazio (x, y, z) il quale contenga tutti i suoi punti di accumulazione posti al finito e sia dotato di punti interni, noi supponiamo che per ogni punto (x, y, z) di A siano definite tre funzioni reali $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$ e $P(x, y, z)$ soddisfacenti alle seguenti ipotesi:

1° esse siano continue in tutto il campo A,

2° esistano, finite e continue, in tutto il campo A, le derivate parziali N_x, N_z, P_x, P_y.

TEOREMA. - *Affinchè l'integrale* (1) *sia funzione continua della curva assolutamente continua* C *su tutte le curve assolutamente continue appartenenti al campo* A, *è necessario che si abbia*:

$$N_z = P_y$$

in tutti i punti interni al campo A *e in quelli che sono di accumulazione di punti interni* [4].

Il Tonelli, nel lavoro ora ricordato [4], pose la questione di indagare se la condizione necessaria su indicata è anche sufficiente. *A tale domanda si risponde affermativamente nella presente Nota* [5], nella quale ci si limita a considerare le curve assolutamente continue *completamente interne* ad A. Il caso delle curve *appartenenti* ad A sarà trattato in una prossima Nota di questi « Rendiconti ».

Il ragionamento di cui ci siamo serviti è di natura elementare e si può generalizzare agli integrali dipendenti da curve nello spazio n-dimensionale e a quelli dipendenti anche dalle derivate di ordine superiore.

2. Da un risultato di McShane segue immediatamente che, sotto le *sole* ipotesi di continuità per le funzioni $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$ e $P(x, y, z)$

(3) E. J. MCSHANE, *Existence theorems for ordinary problems of the Calculus of Variations*. Parte I. « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », s. II, vol. III, 1934, pp. 183-211, p. 211.

(4) L. TONELLI, *Su gli integrali continui del Calcolo delle Variazioni*. « Scritti matematici offerti a L. Berzolari ». Pavia, 1936, pp. 283-289.

(5) M. PICONE nel suo recente volume, *Lezioni di Analisi Funzionale*, litografie, Tumminelli, 1947, pp. 151-154, stabilisce per i funzionali in forma ordinaria dipendenti da curve dello spazio n-dimensionale ($n > 2$), la loro continuità nella classe di tutte le curve continue con tangente variabile in modo continuo mentre qui consideriamo il caso più generale della continuità nella classe di tutte le curve assolutamente continue.

l'integrale (1) è funzione continua di C nella classe delle curve assolutamente continue di lunghezza ugualmente limitata [6]. Si presenta perciò la questione di vedere se, mantenendo per l'integrale (1) le sole ipotesi di continuità ora dette, questa sia oppure no la classe più ampia di curve assolutamente continue su cui l'integrale risulti continuo come funzione di C [7]. *A questo quesito si risponderà affermativamente nella Nota II.* In altre parole, assegnato un campo A dello spazio (x, y, z) e in esso una qualunque classe di curve assolutamente continue tale che di essa faccia parte almeno una curva C_0 per cui qualunque siano i numeri positivi ρ e L, all'intorno (ρ) [8] di C_0 appartengano propriamente curve della classe di lunghezza maggiore di L, si può costruire una funzione $f(x, y, y')$ del tipo $M(x, y, z) + y' N(x, y, z) + z' P(x, y, z)$, con le $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$ e $P(x, y, z)$ funzioni definite e continue in A, tale che l'integrale I_C corrispondente non è continuo, come funzione di C, nella classe assegnata. Dunque, per la continuità di (1) rispetto a classi più vaste di curve, è *necessario* imporre alle funzioni $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$ e $P(x, y, z)$ ulteriori condizioni.

3. Il teorema che vogliamo provare è il seguente:

TEOREMA. – *Se le funzioni* $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$ *e* $P(x, y, z)$ *sono finite e continue insieme alle derivate parziali* N_x, N_z, P_x, P_y *in tutti i punti interni al campo* A *e se in essi vale l'uguaglianza*

$$(\Gamma) \qquad N_z = P_y$$

allora l'integrale [9]

$$I_C = \int_C \{ M(x, y, z) + y' N(x, y, z) + z' P(x, y, z) \} dx$$

(6) Loc. cit. (3), p. 206. Ciò è un corollario immediato di un teorema di semicontinuità di McShane a cui questi pervenne dopo aver premesso un largo studio su un integrale parametrico associato. I ragionamenti di McShane sono sviluppati addirittura per gli spazi n dimensionali. Vedi anche TONELLI, loc. cit. in (2), p. 410. Nel caso piano, Tonelli dà un teorema di semicontinuità (facilmente estendibile agli spazi n-dimensionali) dal quale si può ugualmente dedurre la proposizione in discorso. Per comodità del lettore, daremo, nel n. 4, una dimostrazione diretta, particolarmente semplice, di tale proposizione.

(7) Sono stato condotto a tale interessante aspetto della ricerca di cui mi occupo in seguito alle conversazioni avute con l'amico prof. S. Faedo. Una analoga questione si può porre per i teoremi di semicontinuità di McShane e di Tonelli ricordati in (6). Inoltre, tutto ciò che è oggetto della Nota II si può generalizzare agli integrali dipendenti da curve nello spazio n-dimensionale e a quelli dipendenti anche dalle derivate di ordine superiore.

(8) Vedi sotto, nota (10), α).

(9) Si osservi che su qualunque curva C: $\{ y = y(x), z = z(x), a \leq x \leq b \}$ assolutamente continua, l'integrale (nel senso del Lebesgue)

$$I_C = \int_a^b \{ M[x, y(x), z(x)] + y'(x) N[x, y(x), z(x)] + z'(x) P[x, y(x), z(x)] \} dx$$

ha un valore determinato e finito.

è funzione continua[10] *della curva assolutamente continua* C *su tutte le curve assolutamente continue completamente interne*[11] *al campo* A.

a) Sia $C_0 : \{ y = y_0(x) \ , \ z = z_0(x) \ , \ a_0 \leq x \leq b_0 \}$ una curva assolutamente continua completamente interna al campo A. Sia $\rho_0 > 0$ un numero tale che tutti i punti dello spazio (x, y, z) distanti da C_0 meno di ρ_0 appartengano, come punti interni, ad A.

Consideriamo, dapprima, soltanto le curve $C : \{ y = y(x) \ , \ z = z(x) \ , \ a_0 \leq x \leq b_0 \}$ assolutamente continue definite nello stesso intervallo della C_0 e appartenenti propriamente all'intorno (ρ_0) della C_0.

Si consideri la differenza:

$$(2) \qquad I_C - I_{C_0} = \left\{ \int_C M(x,y,z)\,dx - \int_{C_0} M(x,y,z)\,dx \right\} + \left\{ \int_C N(x,y,z)\,dy + P(x,y,z)\,dz - \int_{C_0} N(x,y,z)\,dy - P(x,y,z)\,dz \right\} = I_1 + I_2 .$$

Per la continuità della funzione $M(x, y, z)$, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un numero $\rho_1 > 0$ $(\rho_1 < \rho_0)$ tale che, per ogni curva C assolutamente continua che noi qui consideriamo appartenente propriamente all'intorno (ρ_1) della C_0, si abbia:

$$(3) \qquad |I_1| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Occupiamoci ora di I_2. Per la condizione (T), esiste una funzione $\varphi(x, y, z)$ la quale, per ogni x di (a_0, b_0), è univocamente definita nel cerchio Ω che ha come centro il punto H' intersezione di C_0 con il piano $x = \text{cost}$ e raggio ρ_0 e avente per differenziale totale rispetto a y e z:

$$N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz .$$

(10) Per comodità del lettore ricordiamo che:

α) una curva assolutamente continua C: $\{ y = y(x) , z = z(x) , a \leq x \leq b \}$ si dice che *appartiene propriamente* all'intorno (ρ) – con ρ numero positivo – di un'altra curva assolutamente continua C_0: $\{ y = y_0(x) , z = z_0(x) , a_0 \leq x \leq b_0 \}$ se è:

1°) $|a - a_0| \leq \rho , |b - b_0| \leq \rho ;$

2°) $\sqrt{\{y(x) - y_0(x)\}^2 + \{z(x) - z_0(x)\}^2} \leq \rho$

per ogni x comune ai due intervalli (a, b) e (a_0, b_0);

3°) $\sqrt{\{y(x) - y_0(a)\}^2 + \{z(x) - z_0(a)\}^2} \leq \rho$

per ogni x minore di a_0 e appartenente ad (a, b);

4°) $\sqrt{\{y(x) - y_0(b)\}^2 + \{z(x) - z_0(b)\}^2} \leq \rho$

per ogni x maggiore di b_0 e appartenente ad (a, b).

β) se C_0 è una determinata curva assolutamente continua appartenente al campo A, si dice che l'integrale I_C è *funzione continua di* C sulla C_0 se, preso ad arbitrio un numero positivo ε, è possibile di determinarne un altro ρ pure positivo, in modo che per tutte le curve assolutamente continue appartenenti al campo A e anche appartenenti all'intorno (ρ) della C_0, valga sempre l'uguaglianza:

$$|I_C - I_{C_0}| < \varepsilon .$$

(11) In una Nota III che sarà pubblicata in questi stessi « Rendiconti » tratteremo della continuità di (1) su *tutte* le curve assolutamente continue di A.

La funzione $\varphi(x, y, z)$ è data da

$$\varphi(x, y, z) = \int_{\widehat{H'H}} N(x, y, z)\, dy + P(x, y, z)\, dz$$

dove $H \equiv (x, y, z)$ è un punto di Ω e l'integrale è calcolato lungo una qualunque curva continua e rettificabile di Ω e congiungente i due punti H' e H. La funzione $\varphi(x, y, z)$ risulta continua come funzione delle tre variabili x, y, z. Inoltre si trova, con calcoli che omettiamo, che la sua derivata parziale rispetto a x è data da

$$\varphi'_x(x, y, z) = \int_{\widehat{H'H}} N_x(x, y, z)\, dy + P_x(x, y, z)\, dz +$$

$$+ \{ - y'_0(x)\, N[x, y_0(x), z_0(x)] - z'_0(x)\, P[x, y_0(x), z_0(x)] \} = \psi(x, y, z) + \chi(x)$$

dove la $\psi(x, y, z)$ è continua come funzione delle tre variabili x, y, z e la $\chi(x)$ è integrabile su (a_0, b_0).

Poichè è, in particolare lungo ogni curva C che noi qui consideriamo:

$$d\varphi(x, y, z) = \varphi'_x(x, y, z)\, dx + N(x, y, z)\, dy + P(x, y, z)\, dz$$

ne viene:

$$(4) \quad I_2 = \int_C d\varphi(x, y, z) - \int_C \varphi'_x(x, y, z)\, dx - \int_{C_0} d\varphi(x, y, z) + \int_{C_0} \varphi'_x(x, y, z)\, dx =$$

$$= \varphi(\overline{Q}) - \varphi(Q) - \int_C \psi(x, y, z)\, dx - \varphi(\overline{Q}_0) + \varphi(Q_0) + \int_{C_0} \psi(x, y, z)\, dx$$

dove abbiamo indicato con Q e $\overline{Q}$ e con Q_0 e $\overline{Q}_0$ il primo e il secondo estremo rispettivamente delle curve C e C_0.

Per la continuità delle funzioni $\varphi(x, y, z)$ e $\psi(x, y, z)$ si ha che in corrispondenza al numero $\varepsilon > 0$ si può determinare un numero $\rho_2 > 0$ ($\varepsilon < \rho_0$) tale che per ogni curva C assolutamente continua da noi considerata appartenente propriamente all'intorno (ρ_2) della C_0 si abbia:

$$(5) \quad \varphi(Q) - \varphi(\overline{Q}) - \varphi(Q_0) + \varphi(\overline{Q}_0) < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$(6) \quad \left| \int_C \psi(x, y, z)\, dx - \int_{C_0} \psi(x, y, z)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Detto ρ il più piccolo dei due numeri ρ_1 e ρ_2 e tenendo presente le (2)-(6) si conclude che in corrispondenza al numero $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\rho > 0$

tale che per qualunque curva C assolutamente continua della classe indicata appartenente propriamente all'intorno (ρ) della C_0 si ha:

$$|I_C - I_{C_0}| < \varepsilon .$$

b) Passiamo ora a considerare tutte le curve assolutamente continue definite o no sullo stesso intervallo della C_0. Si dica $\bar{C}_0$ la curva composta del segmento rettilineo avente per estremi i punti $\left[a_0 - \frac{\rho_0}{2}, y_0(a_0), z_0(a_0)\right]$ e $[a_0, y_0(a_0), z_0(a_0)]$, della curva C_0 e del segmento rettilineo avente per estremi i punti $[b_0, y_0(b_0), z_0(b_0)]$ e $\left[b_0 + \frac{\rho_0}{2}, y_0(b_0), z_0(b_0)\right]$. Se $\bar{\rho} < \frac{\rho_0}{2}$, tutti i punti distanti per meno di $\bar{\rho}$ da $\bar{C}_0$ sono punti interni di A.

Se $C: \{ y = y(x), z = z(x), a \leq x \leq b \}$ è una curva assolutamente continua interna ad A, poniamo, come in *a*):

$$(2') \qquad I_C - I_{C_0} = I_1 + I_2 .$$

Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario fissato. Per la continuità della funzione $M(x, y, z)$, detto M' un numero maggiore del massimo modulo della $M(x, y, z)$ in tutti i punti dello spazio (x, y, z) appartenenti all'intorno (ρ_0) della C_0, si può determinare un numero $\rho_1 > 0$ $(e < \bar{\rho})$ e tale che sia $\rho_1 < \frac{\varepsilon}{8M'}$, in modo che se la C appartiene propriamente all'intorno (ρ_1) della C_0, si abbia:

$$(3') \qquad |I_1| < 2M'\rho_1 + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Sostituendo in *a*) alla C_0 e al numero ρ_0 rispettivamente la C_0 e il numero $\bar{\rho}$, si definisca la funzione $\varphi(x, y, z)$ per la quale si ha:

$$\varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z) + \chi(x)$$

essendo $\psi(x, y, z)$ continua come funzione delle tre variabili x, y, z e $\chi(x)$ integrabile su $\left(a_0 - \frac{\rho_0}{2}, b_0 + \frac{\rho_0}{2}\right)$.

La (4) attualmente si scriverà:

$$(4') \qquad I_2 = \varphi(\bar{Q}) - \varphi(Q) - \int_C \psi(x, y, z)\, dx - \varphi(\bar{Q}_0) + \varphi(Q_0) +$$

$$+ \int_{C_0} \psi(x, y, z)\, dx - \int_a^b \chi(x)\, dx + \int_{a_0}^{b_0} \chi(x)\, dx$$

dove, come in *a*), Q e $\bar{Q}$, Q_0 e $\bar{Q}_0$ rappresentano il primo e il secondo estremo rispettivamente delle curve C e C_0.

Per la continuità della funzione $\varphi(x, y, z)$ si può, in corrispondenza al numero $\varepsilon > 0$, determinare un numero $\sigma > 0$ $(e < b_0 - a_0)$ tale che se B e B′ sono due punti appartenenti all'intorno $(\bar{\rho})$ di C_0 e distanti fra loro per meno di σ, si abbia:

$$|\varphi(B) - \varphi(B')| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

In corrispondenza al $\sigma > 0$ si può determinare un $\rho' > 0$ $(e < \bar{\rho})$ tale che, se la C appartiene propriamente all'intorno (ρ') della C_0 si abbia: $\overline{QQ_0} < \sigma$. Ciò è evidente se è $a \leq a_0$. Se fosse $a_0 < a$, consideriamo la sfera S di centro Q_0 e raggio $\frac{\sigma}{2}$; sia $x_0 > a_0$ l'ascissa del primo punto di C_0 che sta su S e assumiamo $\rho' < x_0 - a_0$; poichè il punto Q viene a distare per meno di $\rho' < \frac{\sigma}{2}$ da un punto interno ad S ne segue $\overline{QQ_0} < \sigma$. Analogamente, si può determinare un numero $\rho'' > 0$ $(e < \bar{\rho})$ in modo che se la curva C appartiene propriamente all'intorno (ρ'') di C_0 si abbia $\overline{\bar{Q}\bar{Q}_0} < \sigma$. Se $\rho_2 > 0$ è il più piccolo dei due numeri ρ' e ρ'' si ha che se la C appartiene propriamente all'intorno (ρ_2) della C_0 risulta:

$$(5') \qquad |\varphi(\bar{Q}) - \varphi(Q) + \varphi(Q_0) - \varphi(\bar{Q}_0)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Analogamente alla (3′) si può determinare un numero $\rho_3 > 0$ $(e < \bar{\rho})$, in modo che se C appartiene propriamente all'intorno (ρ_3) di C_0 sia:

$$(6') \qquad \left| \int_C \psi(x, y, z)\, dx - \int_{C_0} \psi(x, y, z)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Finalmente, si può determinare un numero $\rho_4 > 0$ $(e < \bar{\rho})$ tale che se la C appartiene propriamente all'intorno (ρ_4) della C_0 si abbia:

$$(6'') \qquad \left| \int_a^b \chi(x)\, dx - \int_{a_0}^{b_0} \chi(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Se si dice ρ il più piccolo dei numeri $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ si ha, per le (2′)–(6″) che in corrispondenza al numero $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\rho > 0$ tale che per qualunque curva C assolutamente continua appartenente propriamente all'intorno (ρ) della C_0, si ha:

$$|I_C - I_{C_0}| < \varepsilon.$$

Matematica (Analisi). — *Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti.* Nota II (*) di L. Castoldi, presentata dal Socio L. Berzolari.

4. Stabilito, nella Nota precedente, il risultato fondamentale della nostra ricerca, presenta non minore interesse il problema della effettiva determinazione della caratteristica della matrice $\mathfrak{D}^n_\infty$.

Un fatto notevole, a questo riguardo, che qui ci proponiamo di dimostrare è che *la determinazione della caratteristica di* $\mathfrak{D}^n_\infty$ *si ottiene in effetti mediante la costruzione, attraverso un procedimento che risulterà chiarito dal seguito, di una matrice finita, formata, nella prima orizzontale, dalle* y^i, *e, nelle successive, da loro corrispondenti derivate formanti opportune altre orizzontali di* $\mathfrak{D}^n_\infty$, *scelte, quest'ultime, con conveniente criterio, in numero non superiore a un limite assegnabile dipendente da* m *e da* n.

5. Per dimostrar ciò cominciamo collo stabilire che *se nella matrice* (4) *della Nota I tútte le corrispondenti derivate di un certo ordine* $p+1$ *delle* y^i *sono medesime combinazioni lineari (a coefficienti generalmente funzioni delle* x^r, *delle derivate dei precedenti* p *ordini e delle* y^i *stesse, altrettanto accade delle corrispondenti derivate di ordine* $p+2$ *e quindi di quelle di tutti gli ordini successivi.*

Infatti, considerando le y^i come derivate di ordine nullo, l'ipotesi fatta implicá che sia:

$$(11)\qquad y^i_{j_1,\cdots,i_{p+1}} = \sum_{\tau=0}^{p} \sum \lambda^{\tau;\, i_1\cdots i_{p+1};\, j_1\cdots j_\tau}\, y^i_{j_1\cdots j_\tau},$$

la sommatoria interna del secondo membro estendendosi a tutte le combinazioni complete dei τ indici $j_1, \cdots, j_\tau$. Derivando quest'ultima rispetto ad una qualunque delle x^r, si ha:

$$y^i_{j_1\cdots i_{p+1}\, i_{p+2}} = \sum_{\tau=0}^{p} \sum \lambda^{\tau;\, i_1\cdots i_{p+1};\, j_1\cdots j_\tau}_{i_{p+2}}\, y^i_{j_1\cdots j_\tau} +$$

$$+ \sum_{\tau=0}^{p} \sum \lambda^{\tau;\, i_1\cdots i_{p+1};\, j_1\cdots j_\tau}\, y^i_{j_1\cdots j_\tau\, i_{p+2}},$$

la quale, esprimendovi le derivate dell'ordine $p+1$ $y^i_{j_1\cdots j_p\, i_{p+2}}$ mediante le derivate degli ordini inferiori attraverso le (11) stesse, dimostra senz'altro l'asserto.

6. Premesso ciò, formiamo la matrice

$$(12)\qquad \mathfrak{D}^n_{m-1} = \left\| \begin{array}{cccc} y^1 & y^2 & \cdots & y^n \\ y^1_{j_1} & y^2_{j_1} & \cdots & y^n_{j_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^1_{m} & y^2_{m} & \cdots & y^n_{jm} \end{array} \right\|$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1947.

formata, nella prima riga, colle y^i, e, nelle successive, colle loro derivate prime; indi cancelliamo in essa (in uno qualunque dei diversi eventuali modi in cui ciò può essere realizzabile) tutte le orizzontali *contenenti effettive derivate*, la cui soppressione lascia immutata la caratteristica della matrice.

Sia

$$(13) \qquad \Delta^n_{N_1+1} = \left\| \begin{array}{cccc} y^1 & y^2 & \cdots & y^n \\ y^1{}_{/1} & y^2{}_{/1} & \cdots & y^n{}_{/1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^1{}_{/N_1} & y^2{}_{/N_1} & \cdots & y^n{}_{/N_1} \end{array} \right\|$$

la matrice ottenuta.

A partire da essa, formiano la matrice.

$$(14) \qquad \mathfrak{D}^n_{N_1+1+\binom{m+1}{2}} = \left\| \begin{array}{cccc} & \Delta^n_{N_1+1} & & \\ y^1{}_{/12} & y^2{}_{/12} & \cdots & y^n{}_{12} \\ y^1{}_{13} & y^2{}_{/13} & \cdots & y^n{}_{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^1{}_{/m-1,m} & y^2{}_{m-1,m} & \cdots & y^n{}_{/m-1,m} \end{array} \right\|$$

formata aggiungendo alla (13), in successive righe, tutte le $\binom{m+1}{2}$ corrispondenti derivate seconde delle y^i; indi procediamo su essa come precedentemente, cancellando cioè (in uno qualunque dei modi possibili) tutte le righe *contenenti derivate seconde* la cui soppressione non muta la caratteristica della matrice.

Detta $N_1 + N_2 + 1$ (con $N_2 \geqq 0$) la caratteristica della matrice $\Delta^n_{N_1+N_2+1}$ ottenuta, indi applicando di nuovo il procedimento indicato, si perverrà certo ad un ordine finito p di derivazione per cui tutte le righe contenenti derivate di ordine $p+1$ vanno soppresse, in quanto medesime combinazioni lineari delle precedenti [1].

Il numero $N_1 + N_2 + \cdots + N_p + 1$ *delle righe della matrice* $\Delta_{N_1 N_2 + \cdots + N_p + 1}$ *fornisce allora ovviamente la cercata caratteristica di* $\mathfrak{D}^n_\infty$.

Va osservato che, nonostante una certa arbitrarietà nel procedimento costruttivo indicato, inerente alla scelta delle orizzontali che di volta in volta vanno soppresse, i numeri $N_1, N_2, \cdots, N_p$ hanno carattere invariantivo e intrinseco alla natura delle funzioni assegnate.

7. Il procedimento descritto è suscettibile di una notevole semplificazione, basata sul fatto che, *se nella matrice* $\Delta^n_{N_1+N_2+\cdots+N_q+1}$ $(1 \leqq q < p)$ *compaiono soltanto derivate rispetto alle variabili* $x^{r_1}, x^{r_2}, \cdots, x^{r_t}$ *(con* $t < m$*), è sempre possibile determinare la scelta delle orizzontali da sopprimere in*

(1) Ciò accade necessariamente giacchè ogni riga non cancellata fa aumentare di una unità la caratteristica della matrice in costruzione, e tale caratteristica non può diventare maggiore di n.

$\mathfrak{D}''_{N_1+\cdots+N_q+\binom{m+q}{q+1}+1}$ *in modo che la corrispondente matrice* $\Delta_{N_1+N_2+\cdots+N_{q+1}+1}$ *non contenga derivate rispetto a variabili diverse da quelle indicate.* In altre parole: nella costruzione della matrice $\Delta_{N_1+N_2+\cdots+N_{q+1}+1}$ si possono senz'altro trascurare le orizzontali di $\mathfrak{D}^n_\infty$ relative a gruppi di indici tra cui non figurino soltanto $r_1, r_2, \cdots, r_t$.

Per giustificare tale procedimento semplificativo osserviamo che l'ipotesi fatta può esprimersi colla relazione:

$$y^i{}_{i_1\cdots i_q} = \sum_{\tau=0}^{t} \sum \lambda^{\tau; i_1\cdots i_q; r_{k_1}\cdots r_{k_\tau}} \cdot y^i{}_{r_{k_1}\cdots r_{k_\tau}},$$

dove $r_{k_1}, \cdots, r_{k_\tau}$ è un gruppo di τ indici presi generalmente con ripetizione tra $r_1, \cdots, r_t$, e $i_1, \cdots, i_q$ un gruppo di q indici tra cui uno almeno diverso da $r_1, \cdots, r_t$. Derivando quest'ultima rispetto ad una qualunque variabile $x^{i_{q+1}}$, otteniamo:

$$y^i{}_{i_1\cdots i_q i_{q+1}} = \sum_{\tau=0}^{q} \sum \lambda^{\tau; i_1\cdots i_q; r_{k_1}\cdots r_{k_\tau}}_{i_{q+1}} y^i{}_{r_{k_1}\cdots r_{k_\tau}} +$$

$$+ \sum_{\tau=0}^{q} \sum \lambda^{\tau; i_1\cdots i_q; r_{k_1}\cdots r_{k_\tau}} y^i{}_{r_{k_1}\cdots r_{k_\tau} i_{q+1}}$$

la quale, se i_{q+1} è uno degli indici $r_1, \cdots, r_t$ prova senz'altro che le derivate di ordine $q+1$ fatte rispetto a variabili tra cui una almeno diversa dalle $x^{r_1}, \cdots, x^{r_t}$ e una almeno presa tra quest'ultime, si esprimono linearmente mediante derivate dello stesso ordine e di ordine inferiore fatte rispetto a queste sole variabili. Se invece i_{q+1} è diverso dagli indici $r_1, \cdots, r_t$, la precedente relazione dimostra, qualora si applichi la proprietà ora ottenuta alle derivate dell'ultima sommatoria del secondo membro, che tale proprietà è vera anche per le derivate fatte rispetto a variabili tutte distinte da $x^{r_1}, \cdots, x^{r_t}$.

L'applicazione del procedimento descritto, a partire dalle derivate prime ha come conseguenza che, attenendosi ad esso, *nessuna delle successive matrici* Δ, *e neppure quindi, in particolare, l'ultima* $\Delta_{N_1+\cdots+N_p+1}$ *contiene derivate rispetto a variabili diverse da quelle che compaiono già in* Δ_{N_1+1}.

Da ciò segue che, mentre è $N_1 \leqq m$, $N_1 \leqq n-1$, $p \leqq n-1$, a formare la matrice $\Delta_{N_1+\cdots+N_p+1}$ non può certo concorrere un numero di orizzontali di $\mathfrak{D}^n_\infty$ maggiore di

$$1 + N_1 + \binom{N_1+1}{2} + \cdots + \binom{N_1+p-1}{p},$$

nè quindi, a fortiori, maggiore di

$$(15) \qquad N = 1 + (n-1) + \binom{n}{2} + \binom{n+1}{3} + \cdots + \binom{2n-3}{n-1}, \text{ se è } n-1 < m,$$

o di

$$(15') \qquad N' = 1 + m + \binom{m+1}{2} + \cdots + \binom{n+m-2}{n-1}, \quad \text{se è } m \leqq n-1.$$

8. Stabilito tutto ciò, e designata come *Matrice Wronskiana* delle funzioni y^i una qualsiasi delle particolari matrici $\Delta^n_{N_1+\ldots+N_p+1}$ definite nel numero precedente [2], possiamo ormai enunciare senz'altro il

TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè tra n funzioni y^i di m variabili x^r, analitiche in tutto un comune campo di definizione* G, *sussistano h relazioni lineari indipendenti, omogenee a coefficienti costanti, è che sia $n-h$ il numero delle righe della matrice Wronskiana sopra definita.*

Prima di passare a discutere a quali limitazioni vada soggetto il precedente enunciato nel caso in cui si lasci cadere l'attuale ipotesi di analiticità delle funzioni considerate, vogliamo soffermarci per poco su alcuni casi particolari:

1° Se è $m = n-1$ e $N_1 = m$, la matrice Wronskiana è quadrata, e il suo determinante

$$(16) \qquad |\Delta^n_{(n-1)+1}| = \begin{Vmatrix} y^1 & y^2 & \cdots & y^n \\ y^1_{/1} & y^2_{/1} & \cdots & y^n_{/1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^1_{/n-1} & y^2_{/n-1} & \cdots & y^n_{/n-1} \end{Vmatrix}$$

risulta pertanto non nullo. Abbiamo così che il *non annullarsi del determinante* (16) *è condizione necessaria e sufficiente* per l'indipendenza lineare delle funzioni assegnate.

2° Se è $m = 1$, la matrice Wronskiana assume la forma:

$$(17) \qquad \Delta^n_{p+1} = \begin{Vmatrix} y^1 & y^2 & \cdots & y^n \\ y^1_{/1} & y^2_{/1} & \cdots & y^n_{/1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^1_{/(1)^p} & y^2_{/(1)^p} & \cdots & y^n_{/(1)^p} \end{Vmatrix}$$

la quale, per $p = n-1$, si identifica colla matrice del noto determinante Wronskiano. In questo caso ($p = n-1$) è implicito nel precedente teorema generale il seguente enunciato: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè n funzioni y^i di una variabile x, analitiche in tutto un comune campo di definizione* G *siano linearmente dipendenti è che il determinante Wronskiano sia nullo identicamente in* G *e che, se h è la sua caratteristica tale sia anche, in* G, *la caratteristica della matrice formata colle sue prime h orizzontali.*

Quest'ultimo enunciato ovviamente generalizza e completa il notissimo teorema del Wronskiano.

(2) Si noti, che una certa, inessenziale, arbitrarietà può rimanere nella costruzione della matrice Wronskiana, dipendentemente dalle eventuali diverse possibili scelte delle derivate prime che entrano in $\Delta^n_{N_1+1}$.

Matematica. — *A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: dimostrazione nel caso di vertici di prima categoria.* Nota (*) di G. Scorza Dragoni, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

Questa Nota fa seguito a quelle, pubblicate negli stessi « Rendiconti » e ricordate in seguito con N. I) ed N. II), aventi come titolo: *A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate*, e come sottotitoli rispettivi: *considerazioni preliminari* e *proposizioni preliminari*. Essa naturalmente rispetta le convenzioni introdotte in N. I) ed N. II). In particolare: λ *e* ν *sono sempre due archi elementari di traslazione* per la traslazione generalizzata t del piano π; e $\Sigma(\lambda)$ *è sempre uno dei due campi adiacenti alla traiettoria* $\sigma(\lambda)$, generata da λ. Inoltre n è il numero dei lati di λ ed m quello dei vertici di λ di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$.

1. Un lemma. – Sia, dunque, λ un arco elementare di traslazione di t; $P'P'_1$ un sottosegmento di λ; R' il punto corrente nell'interno di $P'P'_1$; r' la semiretta di origine R' normale a $P'P'_1$ e rivolta verso $\Sigma(\lambda)$, nel partire da R'; p' e p'_1 siano le semirette equiverse alle precedenti e di origini rispettive in P' e P'_1.

Ferme queste notazioni, si supponga che P' *preceda* P'_1 *(nel verso positivo di* λ*), mentre* r'*, percorsa a partire da* R'*, non possa incontrare ulteriormente* λ *senza prima incontrare* $t^{-1}(\lambda)+t(\lambda)$*; e che* p' *contenga un punto* P'' *di* $t^{-1}(\lambda)$ *tale, che sia* $t(\lambda)\cdot P'P'' = 0$*, mentre* p'_1 *ne contiene uno,* P''_1*, di* $t(\lambda)$ *tale, da aversi* $t^{-1}(\lambda)\cdot P'_1P''_1 = 0$. *Allora* $P'P'_1$ *contiene, nell'interno, punti fondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$.

Questo lemma è dimostrato nel n. 22 di M. I). Esso permette di esaurire la dimostrazione dei teoremi del n. 6 di N. I), almeno nei casi più semplici.

2. Il teorema fondamentale per $n = 1, 2, 3, 4$ ed $m = 0$. – Le deduzioni relative al caso che λ abbia al più quattro lati, e sia sprovvisto di vertici di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$, sono sviluppate nei nn. 21, 23 e 24 di M. I). Qui darò qualche rapidissimo cenno.

1) Se $n = 1$; e quindi $\lambda = Q_0Q_1$ [con $Q_1 = t(Q_0)$], basta applicare il lemma precedente, facendovi $P' = P'' = Q_0$ e $P'_1 = P''_1 = Q_1$, per riconoscere che esistono punti *interni* a λ, fondamentali per $\Sigma(\lambda)$.

2) Se $n = 2$, $m = 0$, $\lambda = Q_0Q_1 + Q_1Q_2$, basta porre nel lemma precedente $P' = P'' = Q_0$, $P'_1 = Q_1$, $P''_1 = Q_2$ e poi $P' = Q_1$, $P'' = Q_0$, $P'_1 = P''_1 = Q_2$, per riconoscere che ogni lato di λ contiene nell'*interno* punti fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$.

(*) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1947.

3) Se $n = 3$, $m = 0$ e $\lambda = Q_0 Q_1 + Q_1 Q_2 + Q_2 Q_3$, il lemma precedente per $P' = Q_1$, $P'' = Q_0$, $P_1' = Q_2$, $P_1'' = Q_3$ dice che $Q_1 Q_2$, cioè il nucleo di λ, contiene nell'interno punti fondamentali per $\Sigma(\lambda)$.

Se $n = 4$, $m = 0$ e $\lambda = Q_0 Q_1 + Q_1 Q_2 + Q_2 Q_3 + Q_3 Q_4$, è sempre lecito supporre $Q_1 Q_2$ maggiore di $Q_3 Q_4$, previo lo scambio eventuale degli uffici di t e t^{-1}. Fatta questa ipotesi, sia G la proiezione ortogonale (interna a $Q_1 Q_2$) di Q_4 su $Q_1 Q_2$.

4) Se è $GQ_4 \cdot t^{-1}(\lambda) = 0$, il solito lemma con $P' = Q_1$, $P'' = Q_0$, $P_1' = G$ e $P_1'' = Q_4$ dice che $Q_1 G$ (e quindi anche il nucleo di λ) contiene nell'interno punti fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Se è $GQ_4 \cdot t^{-1}(\lambda) \neq 0$, sia Γ il rettangolo con tre vertici in Q_1, Q_2 e Q_3 e sia M un punto di $t^{-1}(\lambda) \cdot \Gamma$ a distanza minima da $Q_1 Q_2$; anzi, quello per cui è minima anche la distanza da $Q_2 Q_3$. Denotino M_1 ed M_2 le proiezioni ortogonali rispettive di M su $Q_1 Q_2$ e $Q_2 Q_3$; M_1 è interna a $Q_1 Q_2$ (a meno che non sia $M = Q_0$), M_2 a $Q_2 Q_3$.

5) Se è $t(\lambda) \cdot MM_2 = 0$, il lemma del n. 1 per $P' = M_2$, $P'' = M$, $P_1' = Q_3$, $P_1'' = Q_4$ dice che nell'interno di $M_2 Q_3$ (e quindi anche nell'interno del nucleo di λ) esistono punti fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Se è $t(\lambda) \cdot MM_2 \neq 0$, sia Γ^* il rettangolo con tre vertici in Q_1, Q_2 ed M_2. E sia N uno dei punti di $\Gamma^* \cdot t(\lambda)$ a distanza minima da $Q_0 Q_1$; anzi, quello di questi a distanza minima da $Q_1 Q_2$. Denoti N_1 la proiezione ortogonale di N su $Q_1 Q_2$; di guisa che $N_1 \neq Q_1$.

6) Se M_1 è interno a $Q_1 N_1$, oppure se N_1 è interno a $Q_1 M_1$, basta porre $P' = M_1$, $P'' = M$, $P_1' = N_1$, $P_1'' = N$, oppure $P' = Q_1$, $P'' = Q_0$, $P_1' = N_1$, $P_1'' = N$ nel lemma del n. 1, per concludere sempre che il nucleo di λ contiene nell'interno punti fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$.

7) Se è $M_1 = N_1$, il segmento MN taglia la propria immagine nella t, a norma della I) di N. II). Di qui e dalla X) della stessa N. II) segue allora che i punti del segmento $Q_1 M_1$, abbastanza vicini ad M_1, sono fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$; epperò anche in questo caso il nucleo di λ contiene dei punti, fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$ ed interni al nucleo stesso.

3. Il teorema fondamentale nel caso $n \geq 5$ ed $m = 0$. – Sia $n \geq 5$ e $\lambda = Q_0 Q_1 + Q_1 Q_2 + \cdots + Q_{n-1} Q_n$ con $m = 0$. E, oltre ai risultati del n. precedente, si ammetta di sapere che (se $n > 5$) un arco elementare di traslazione λ^*, con meno di n e più di *quattro* lati, sprovvisto di vertici di seconda categoria rispetto a uno, $\Sigma(\lambda^*)$, dei campi adiacenti alla $\sigma(\lambda^*)$, abbia il nucleo dotato di punti fondamentali o metafondamentali per λ^* e $\Sigma(\lambda^*)$. Allora questi punti sono interni al nucleo di λ^*, a norma dell'ultimo teorema del n. 5 di N. I).

Sia R il punto corrente *interno* a $Q_2 Q_3$; r la semiretta di origine R, normale a λ e volgentesi verso $\Sigma(\lambda)$ nel partire da R. Inoltre, se $E = (t^{-1}(\lambda) + \lambda + t(\lambda)) \cdot (r - R) \neq 0$, sia S il più vicino ad R dei punti di E; se $e = \lambda \cdot (r - R) \neq 0$, sia T il punto di e più prossimo ad R. Se $E = 0$ (oppure $e = 0$), il simbolo RS (od RT) rappresenti la stessa semiretta r.

Ciò premesso, sia K *quel* punto, *interno* a $Q_2 Q_3$, che soddisfa alle condizioni seguenti:

a) la lunghezza, $\overline{KQ_2}$, *di* KQ_2, *non supera quella*, $\overline{Q_0 Q_1}$, *di* $Q_0 Q_1$;

b) se R *è interno a* KQ_2, T *esiste e appartiene a* $Q_0 Q_1$; *se* $R = K$, T *esiste* (*ed appartiene a* λ); *se* R *è interno a* KQ_3, T *o non esiste, o non appartiene a* $Q_0 Q_1$.

Ebbene, si ponga H uguale al punto T che corrisponde ad $R = K$; A uguale all'analogo punto S (certo esistente al pari di T); e si indichi con s il segmento KA. Allora, come è stato osservato nel n. 25 di M. I):

c) se $H \neq Q_0$ *ed* $n = 5$, *è anche* $H = Q_5$; *se è* $H \neq Q_0$ *ed* $n \geq 6$, *è anche* $H = Q_6$.

8) Ciò premesso, se $s \cdot t(s)$ contiene punti distinti da A, K, $t(A)$ e $t^{-1}(K)$, K è un punto fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, a norma della X) di N. II. E in questo caso – che, a norma della I) di N. II, si presenta sempre, se $A \subset t^{-1}(\lambda)$ e se $t(A)$ è interno all'arco di $\sigma(\lambda)$ di estremi A e K, oppure se $A \subset t(\lambda)$ con $t^{-1}(A)$ interno allo stesso arco di λ –, in questo caso, dico, il **nucleo di λ contiene punti fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$.**

9) Le s.e $t(s)$ hanno punti comuni, ma non comuni punti interni simultaneamente ad s e $t(s)$, s è un segmento di traslazione [cfr. M. I), nota (19); ved. anche M. IV), n. 22] e $s \cdot \lambda = K$. Epperò basta ricordare le XVI) e XV) di N. II per concludere che K è punto interno al nucleo di λ e) metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Se $s \cdot t(s) = o$, vi è luogo a distinguere tre alternative, se si rammenta anche quello che si è detto in 8): A appartiene a $t^{-1}(\lambda)$ e $t(A)$ non è interno al sottoarco α di $\sigma(\lambda)$, di estremi A e K; A appartiene a $t(\lambda)$ e $t^{-1}(A)$ non è interno ad α; A appartiene a λ e non coincide né con Q_0 né con Q_n, cioè A **è interno a λ.**

10) Nella prima alternativa, $t(A)$ è diverso da A (perchè t non ha punti uniti) e da K, perchè $s \cdot t \cdot s = o$. Il segmento s ha solo gli estremi su $\sigma(\lambda)$ e sull'arco λ^* staccato su $\sigma(\lambda)$ da A e $t(A)$. Ma λ^* è un arco di traslazione atto a generare $\sigma(\lambda)$, **dunque la spezzata $\nu = s + \lambda \cdot \lambda^*$ è un** arco elementare di traslazione, con almeno *due* e al più $n - 1$ lati. Inoltre, se $\Sigma(\nu)$ è il campo adiacente a $\sigma(\nu)$ contenuto in $\Sigma(\lambda)$, tutti i vertici di ν sono di prima categoria per $\Sigma(\nu)$. Allora: se ν ha *due* lati, il lato $t(A)K$ di ν contiene nell'interno punti fondamentali per ν e $\Sigma(\lambda)$, a norma della 2), e questi sono interni a $Q_2 Q_3$ e quindi fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$, a norma della XIII) di N. II; se ν ha $3, 4, \cdots, n-1$ lati, il nucleo di ν, a norma della 3), delle 4)–7), o dell'ipotesi alla base dell'induzione, **contiene nell'interno punti** fondamentali o metafondamentali per ν e $\Sigma(\nu)$ e quindi tali anche per λ e $\Sigma(\lambda)$, inoltre il nucleo di ν è evidentemente contenuto nel nucleo di λ, donde la **conclusione.**

11) Nella seconda alternativa, $t^{-1}(A)$ appartiene al sottoarco di λ di estremi Q_0 e K ed è diverso da K; l'arco ν ottenuto associando ad s il sottoarco di λ estremi $t^{-1}(A)$ e K è un arco elementare di traslazione, contenuto in $\lambda + \Sigma(\lambda)$, con *almeno* 2 e *al più* 4 lati; inoltre i vertici di ν sono tutti di

prima categoria rispetto a quello, $\Sigma(\nu)$, dei campi adiacenti a $\sigma(\nu)$ che è contenuto in $\Sigma(\lambda)$; mentre, se ν ha due lati, il lato $Kt^{-1}(A)$ appartiene (a KQ_2 cioè) al nucleo di λ, se ν ha 3 o 4 lati, il nucleo di λ contiene quello di ν. Dopo di che è facile concludere come in 10), tenuto presente il n. 2.

12) Resterebbe da esaminare la terza alternativa. Ma in questa è $A = H$; quindi $H = Q_0$. Epperò, a norma della c) e della $A = Q_n$, non può essere nè $n = 5$, nè $n = 6$. Dunque è $n > 6$. Ma nel n. 28 di M. I) si è riconosciuto che le $s \cdot t(s) = 0$, $n > 6$, $m = 0$ sono incompatibili. Perciò la terza alternativa non si può presentare. Sicchè i teoremi del n. 6 di N. I) sono dimostrati.

Matematica. — *Sulle condizioni di appartenenza al radicale per gli elementi di un'algebra legata a un gruppo finito.* Nota di L. LOMBARDO-RADICE, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. Sia G un gruppo d'ordine finito n, p un divisore primo di n, p^r la massima potenza di p che divide n. Sia A l'algebra legata a G in un corpo K a caratteristica p. Sia infine C un sistema completo di elementi coniugati di G ed S_{C,p^s} il sistema composto dagli elementi di G la cui potenza p^s-ma appartiene a C.

Sia:

$$e = \sum a_g \cdot g$$

l'elemento corrente dell'algebra A. Se e è un elemento eccezionale, cioè se appartiene al radicale di A (1), dovrà innanzitutto essere pseudonullo. Allora, per t abbastanza elevato, dovrà essere:

$$e^{p^t} = 0.$$

Sia:

$$s_1 = a_{g'_1} \cdot g'_1 \times \cdots \times a_{g'_{p^t}} \cdot g'_{p^t} = a \cdot g'_1 \times \cdots \times g'_{p^t}$$

un elemento di C nello sviluppo di e^{p^t}.

Elementi di C saranno allora anche:

$$s_2 = a \cdot g'^{-1}_1 \cdot (g'_1 \times \cdots \times g'_{p^t}) g'_1 = a \cdot g'_2 \times \cdots \times g'_{p^t} \times g'_1$$

$$s_{p^t} = a \cdot g'_{p^t} \times g'_1 \times \cdots \times g'_{p^t-1}$$

che sono pure termini dello sviluppo di e^{p^t}.

Due casi si possono allora presentare:

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(1) Ritengo opportuno usare ormai il termine di «radicale», generalmente adottato nella letteratura straniera, invece del termine di «sottoalgebra eccezionale» di cui mi ero servito nei precedenti lavori, seguendo la terminologia di GAETANO SCORZA.

1) Le s rappresentano b^q $(1 \leq q \leq t)$ termini distinti dallo sviluppo di e^{p^t}.

2) Le s rappresentano tutte un unico termine dello sviluppo di $e^{t'}$ ed esattamente la potenza p^t–ma di un elemento g di G.

Se $e^{p^t} = 0$, in esso la somma dei coefficienti relativi a unità di C dovrà essere uguale a zero. Ma, ragionando come a pp. 242–243 della Nota citata in (2), si vede subito che nel caso 1) i termini di e^{p^t} rappresentanti elementi di C si distribuiscono in classi di p^q elementi, tali che gli elementi di una stessa classe hanno il medesimo coefficiente a. Nel caso 2), dovrà essere invece $g \in S_{C,p^t}$.

La somma dei coefficienti relativi a unità di C è allora data in e^{p^t} da:

$$\sum a p^q + \sum_{s \in S_{C,p^t}} a_s = 0 .$$

Sarà allora addirittura:

$$(1') \qquad \sum_{g \in S_{C,p^t}} a_g = 0 .$$

Se l'elemento in questione è poi eccezionale, dovrà essere $h \cdot e$ $(e \cdot h)$ pseudonullo qualsiasi sia h in G; si dovrà avere cioè (come *condizione necessaria*):

$$(1) \qquad \sum_{hg \in S_{C,p^t}} a_g = 0 \quad ; \quad \sum_{gh \in S_{C,p^t}} a_g = 0 \qquad \text{qualsiasi sia } h \in G$$

2. Supponendo, com'è sempre possibile, che t sia multiplo di r, e prendendo $C = u =$ elemento identico, si vede facilmente che le condizioni necessarie di cui alla formula (1) di p. 245 della Nota citata sono le:

$$\sum_{hg \in S_{u,p^t}} a_g = 0 \quad ; \quad \sum_{gh \in S_{u,p^t}} a_g = 0 \qquad \text{qualsiasi sia } h \in G$$

Infatti gli elementi di G la cui p^t–ma potenza (t multiplo di r) è uguale all'elemento identico sono tutti e soli gli elementi il cui periodo è una potenza di p.

(2) Vedi: L. LONBARDO-RADICE: *Intorno alle algebre legate ai gruppi d'ordine finito.* Nota II (« Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Roma », ser. IV, vol. 3, fasc. 3-4, 1939).

Matematica (Geometria). – *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari.* – I. *Intorno del 2° ordine* (*). Nota di M. VILLA, presentata (**) dal Socio L. BERZOLARI.

1. Allo studio delle trasformazioni puntuali fra piani o spazi ordinari, dal punto di vista della geometria proiettiva differenziale, sono dedicati vari lavori recenti. Ricorderò qui soltanto quelli relativi allo studio delle trasformazioni in una coppia regolare di punti corrispondenti (cioè a Jacobiano $\neq 0$) perchè a coppie regolari mi atterrò anche nel seguito.

Dopo la considerazione delle direzioni caratteristiche (o inflessionali) (1), il risultato più importante conseguito in queste ricerche si ottenne con la considerazione delle proiettività caratteristiche fra le coppie di direzioni caratteristiche corrispondenti (2). Nelle trasformazioni puntuali fra due piani le direzioni e le proiettività caratteristiche individuano l'intorno del 2° ordine della trasformazione (3) e, mediante questi enti, si pervenne subito alla determinazione delle trasformazioni quadratiche osculatrici (4). Il Bompiani poi, sempre per le trasformazioni puntuali fra due piani, passando all'intorno del 3° ordine e caratterizzando una delle ∞^2 trasformazioni qua-

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(1) Per $r=2$: BORŮWCA, *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs*, « Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk », Brno, nn. 72 e 85 (1926 e 1927); *Géométrie projective des correspondances analytiques entre deux plans*, « Comptes Rendus », Paris, vol. 184, p. 1518 (1927). Si veda anche: FUBINI e ČECH, *Introduction à la Géométrie projective différentielle des surfaces*. Paris, Gauthier-Villars, p. 160 (1931). Per $r=3$: CREANGA, *Sulla trasformazione degli intorni del 2° ordine di due punti corrispondenti, nelle corrispondenze puntuali fra due spazi euclidei*, « Rendiconti di Matematica », ser. V, vol. I, p. 186 (1940); VILLA, *Sull'approssimazione delle trasformazioni puntuali fra due spazi mediante trasformazioni cremoniane*, « Rendiconti di Matematica », ser. V, vol. III, p. 216 (1942). Per r qualunque: VILLA, *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale*, « Mem. dell'Accademia delle Scienze di Bologna », ser. IX, vol. X, p. 7 (1942); VILLA, *Direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali*, « Boll. dell'Unione Matematica Italiana », ser. III, vol. II, p. 188 (1947). Riguardo al numero delle direzioni caratteristiche per $r > 3$ si veda la nota (12).

(2) VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi*, Nota I. *Le proiettività caratteristiche*. Nota II. *Loro costruzione*, « Rend. dell'Accademia d'Italia », ser. VII, vol. III, p. 718 e vol. IV, p. 1 (1942); VILLA, i lavori cit. nella nota (1); VILLA, *La configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari*, Nota I. *Proprietà generali*, Nota II. *Applicazioni*, « Rend. dell'Accademia d'Italia », ser. VII, vol. IV, pp. 137 e 217 (1942).

(3) Si suppongono le direzioni caratteristiche distinte. Le direzioni e le proiettività caratteristiche di una trasformazione puntuale fra due piani non individuano l'intorno del 2° ordine della trasformazione solo quando due delle tre direzioni caratteristiche coincidono. Si veda: VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali con direzioni caratteristiche coincidenti*, « Rend. dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXXVIII, p. 321 (1944–45).

(4) VILLA, il primo dei lavori cit. nella nota (2).

dratiche osculatrici per mezzo di certe direzioni d'iperosculazione, pervenne a riferimenti intrinseci e quindi ad equazioni canoniche della trasformazione [5]. Nelle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari S_3, una trasformazione puntuale generica non si può osculare, in una coppia regolare di punti corrispondenti, con trasformazioni quadratiche ma lo si può con ∞^9 trasformazioni cubiche che sono state pienamente determinate [6].

Nel presente lavoro riprendo questi problemi ponendomi nel caso generale delle trasformazioni puntuali fra due spazi lineari ad r dimensioni ($r > 1$), risolvendoli pienamente in quanto determino i riferimenti intrinseci e le equazioni canoniche, e inoltre trasformazioni cremoniane osculatrici.

La via qui seguìta per la determinazione dei riferimenti intrinseci differisce profondamente da quella seguìta per $r = 2$ dal Bompiani ed è assai più conveniente. Il concetto è questo: tenuto presente che l'intorno del 2° ordine nella coppia (O , O′) mediante le direzioni caratteristiche offre subito riferimenti intrinseci nelle stelle di centro O e O′, passando all'intorno del 3° ordine, *si consideri qualche* E_3 *piano di centro* O *geometricamente caratterizzato.* È noto che un E_3 piano di centro O determina una proiettività fra il fascio di rette di centro O e la punteggiata avente per sostegno la sua tangente [7]. Segue che mediante siffatte proiettività sulla tangente ad uno degli E_3 piani, geometricamente caratterizzati di cui si è discorso innanzi, si individua intrinsecamente un punto come corrispondente di qualche retta per O intrinsecamente individuata (retta che si ha subito avendosi un riferimento intrinseco nella stella).

Mediante le proiettività caratteristiche, dal riferimento intrinseco in uno degli spazi si passa subito al riferimento intrinseco in quell'altro.

Il presente lavoro si divide in quattro Note.

Nella prima viene studiato l'intorno del 2° ordine della trasformazione, e precisamente vengono studiate le direzioni e proiettività caratteristiche, elementi costituenti la configurazione caratteristica della trasformazione [8].

Nella seconda Nota si considera l'intorno del 3° ordine della trasformazione e applicando convenientemente il concetto sopra esposto, mediante certi punti chiamati *caratteristici*, si perviene, sia per $r = 2$ che per $r > 2$, alla determinazione di riferimenti intrinseci e alle relative equazioni canoniche della trasformazione.

Nella terza Nota si considerano le trasformazioni cremoniane fra due S_r ottenute mediante r reciprocità [9], si dimostra che ne esistono $\infty^{\frac{r^2(r+1)}{2}}$ che

(5) BOMPIANI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi*, «Mem. dell'Accademia d'Italia», ser. VI, vol. XIII, p. 837 (1942).

(6) VILLA, il primo dei lavori cit. nella nota (1).

(7) La proiettività è quella subordinata dalla polarità rispetto ad una (qualsiasi) delle ∞^1 coniche contenenti l'E_3. Si veda: BOMPIANI, *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei*, « Rend. dell'Accademia dei Lincei », ser. VI, vol. XXII, p. 486 (1935).

(8) VILLA, l'ultimo dei lavori cit. nella nota (2).

(9) Queste trasformazioni sono state studiate dal GODEAUX, *Sur une correspondance crémonienne entre deux espaces à r dimensions*, « Rend. dell'Istituto Lombardo di Scienze e

osculano la trasformazione data nella coppia (O , O′) e di queste se ne scrivono anche le equazioni. Inoltre, per $r = 2$, si ritrovano per altra via le direzioni d'iperosculazione già considerate dal Bompiani, ricollegandosi in tal modo ai risultati conseguiti dall'illustre Autore.

Infine nella quarta Nota, determinato il numero delle direzioni caratteristiche indipendenti, si passa all'interpretazione geometrica degli invarianti. Per $r = 2$ non esistono invarianti del 2° ordine, mentre ne esistono $r\left[\frac{r(r-1)}{2} - 1\right]$ per $r > 2$. S'interpretano geometricamente anche invarianti del 3° ordine.

2. Consideriamo una trasformazione puntuale T che muti i punti di un campo C di uno spazio lineare $S_r(x_1, \cdots, x_r)$ ad r dimensioni ($r > 1$) nei punti di un altro spazio lineare $S'_r(y_1, \cdots, y_r)$ ad r dimensioni e riferiamoci ad una coppia (O , O′) di punti corrispondenti, in relazione alla quale l'Jacobiano sia $\neq 0$, ciò che notoriamente assicura la biunivocità di T nell'intorno di tale coppia.

La T subordina fra le direzioni uscenti da O e quelle uscenti da O′ una proiettività ω. Consideriamo gli E_1 di centro O (O′) per cui gli E_2 di flesso che li contengono hanno per corrispondenti in T ancora E_2 di flesso, cioè gli E_1 caratteristici (o inflessionali) di T nella coppia (O , O′). Come apparirà tra poco, gli E_1 (le direzioni) inflessionali uscenti da O (da O′) sono, in generale, $2^r - 1$.

Fra ogni coppia di rette caratteristiche corrispondenti (in ω) la T subordina (nell'intorno del 2° ordine) una corrispondenza approssimata (in tale intorno) da una proiettività perfettamente individuata.

Ho chiamato queste proiettività le proiettività caratteristiche di T in (O , O′) [10].

Per configurazione caratteristica di T nella coppia (O , O′) intendo l'ente costituito dalle direzioni caratteristiche di T in (O , O′) e dalle proiettività caratteristiche di T in (O , O′).

Assumiamo O , O′ come origini delle coordinate nei rispettivi spazi ed assumiamo in S'_r come assi $y_1, y_2, \cdots, y_r$ rispettivamente le rette che corrispondono in ω agli assi $x_1, x_2, \cdots, x_r$. Allora le equazioni di T si possono scrivere

$$y_i = a_i x_i + \sum_{k,n} b^i_{kn} x_k x_n + \cdots \qquad (i, k, n = 1, 2, \cdots, \quad (2.1)$$

Lettere », ser. II, vol. XLIII, p. 116 (1910). Per $r = 3$ si hanno le trasformazioni cubiche studiate diffusamente dal CREMONA. Si veda: *Opere Matematiche di Luigi Cremona*, Hoepli, Milano, vol. III, pp. 64–65 e pp. 245–246 (1917). Si veda anche: LORIA, *Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale del terz'ordine*, « Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino », vol. 26, p. 281 (1890–91). Per r qualunque, nelle trasformazioni in discorso rientrano come caso particolare quelle studiate da VENERONI, *Sopra una trasformazione birazionale fra due* S_r, « Rend. dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », ser. II, vol. XXXIV, p. 640 (1901).

(10) VILLA, i lavori cit. nella nota (2).

dove le a_i , b^i_{kn} sono costanti, $b^i_{kn} = b^i_{nk}$; $a_i \neq 0$ essendo l'Jacobiano $\neq 0$; ed indicando con [3] i termini di grado > 2.

Le coppie di punti di S_r , S_r che si corrispondono nelle proiettività caratteristiche (e quindi appartenenti alle rette caratteristiche) sono quelle soddisfacenti alle seguenti $\binom{r}{2} + r$ equazioni, che costituiscono pertanto le equazioni della configurazione caratteristica

$$(2.2) \qquad \begin{cases} a_k x_k y_i - a_i x_i y_k = 0 & (i \neq k) \\ \sum_{k,n} \frac{1}{a_k} b^i_{kn} x_n y_k - y_i + a_i x_i = 0 & (i , k , n = 1 , 2 , \cdots , r)\ (11). \end{cases}$$

Le equazioni complessive delle rette caratteristiche uscenti da O sono (come scende dalle (2.2) eliminando le y)

$$(2.3) \qquad \frac{\sum_{k,n} b^1_{kn} x_k x_n}{a_1 x_1} = \frac{\sum_{k,n} b^2_{kn} x_k x_n}{a_2 x_2} = \cdots = \frac{\sum_{k,n} b^r_{kn} x_k x_n}{a_r x_r}.$$

Segue che le rette caratteristiche uscenti da O sono, in generale, $2^r - 1$ (12).

Assumendo in S_r come assi $x_1 , x_2 , \cdots , x_r$ r rette caratteristiche (13), si ha

$$(2.4) \qquad b^i_{kk} = 0 \qquad (i \neq k).$$

Nella geometria metrica il riferimento considerato è già intrinseco e le (2.1), sotto la condizione (2.4), sono le equazioni canoniche della trasformazione (14).

(11) Si veda il n. 5.

(12) Infatti le equazioni (2.3) delle rette caratteristiche possono scriversi

$$\begin{vmatrix} \sum_{k,n} b^1_{kn} x_k x_n & \sum_{k,n} b^2_{kn} x_k x_n & \cdots & \sum_{k,n} b^r_{kn} x_k x_n \\ a_1 x_1 & a_2 x_2 & \cdots & a_r x_r \end{vmatrix} = 0$$

e da una formula di SALMON (si veda: C. SEGRE, *Mehrdimensionale Räume*. « Encykl. Mth. Wiss. », Bd. III, T. 2, H. 2, p. 929 (1921 1928) si ricava appunto che l'ordine è $2^r - 1$. Il numero delle direzioni caratteristiche indicato nel penultimo lavoro cit. nella (1) e nell'ultimo lavoro cit. nella (2) è inesatto (per $r > 3$). Le rette caratteristiche in (O, O') possono in particolare essere indeterminate: allora la trasformazione si può osculare (cioè approssimare fino all'intorno del 2° ordine di O, O') con una omografia. Il caso delle direzioni caratteristiche indeterminate è preso in esame in VILLA, nei due ultimi lavori cit. nella (1).

(13) Supponiamo che le direzioni caratteristiche uscenti da O non siano indeterminate e che fra di esse ve ne siano r ($r < 2^r - 1$) non appartenenti ad un iperpiano. Nella geometria affine e proiettiva faremo un'ipotesi un po' più restrittiva. Si veda la nota (15).

(14) Interpretazioni geometriche assai semplici degli r invarianti metrici del 1° ordine a_i e degli $r\binom{r+1}{2}$ invarianti metrici del 2° ordine si ottengono mediante la considerazione della configurazione caratteristica. Si veda: VILLA, l'ultimo dei lavori cit. nella nota (2), n. 5.

Nella geometria affine e proiettiva assumendo come retta $y_1 = y_2 = \cdots = y_r$ la corrispondente in ω della retta $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$, segue

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_r \tag{2.5}$$

(si porrà $a_1 = a$).

Assumendo inoltre come retta $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$ una delle rette caratteristiche [15], per le (2.3), (2.5), si ha

$$\sum_{k,n} b^1_{kn} = \sum_{k,n} b^2_{kn} = \cdots = \sum_{k,n} b^r_{kn} \qquad (k, n = 1, 2, \cdots, r). \tag{2.6}$$

Per le (2.2), l'equazione della proiettività caratteristica fra gli assi x_i, y_i è

$$b^i_{ii} x_i y_i - a y_i + a^2 x_i = 0. \tag{2.7}$$

La proiettività caratteristica fra le rette $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$, $y_1 = y_2 = \cdots = y_r$, per le (2.2), (2.5), (2.6), è

$$\left(\sum_{k,n} b^1_{kn}\right) x_1 y_1 - a y_1 + a^2 x_1 = 0. \tag{2.8}$$

Nella geometria proiettiva, assumiamo come *punti impropri* degli assi $y_1, y_2, \cdots, y_r$ i corrispondenti nelle relative proiettività caratteristiche dei *punti impropri* degli assi $x_1, x_2, \cdots, x_r$. Ciò impone per le (2.7)

$$b^1_{11} = 0. \tag{2.9}$$

Se a $r+1$ punti situati su un iperpiano S_{r-1} e appartenenti a $r+1$ direzioni caratteristiche corrispondono nelle proiettività caratteristiche ancora $r+1$ punti appartenenti a un iperpiano, ciò avviene per ogni gruppo di $r+1$ punti appartenenti ad un iperpiano situati su tali rette e le $r+1$ proiettività caratteristiche sono subordinate da una stessa omografia [16].

Orbene, noi possiamo supporre che la direzione caratteristica da noi scelta come retta $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$, assieme agli assi $x_1, x_2, \cdots, x_r$, non sia nelle condizioni precedenti poichè una tal scelta non è possibile solo quando

(15) Supponiamo qui e nel seguito che le direzioni caratteristiche uscenti da O non siano indeterminate e che fra di esse ve ne siano $r+1$ distinte ($r+1 \leq 2^r - 1$) r qualunque delle quali non appartenenti ad un iperpiano.

(16) Infatti, se al *punto improprio* della $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$ corrispondesse nella relativa proiettività caratteristica il punto improprio della $y_1 = y_2 = \cdots = y_r$, allora, accanto alle (2.9), si avrebbe per la (2.8) la condizione

$$\sum_{k,n} b^1_{kn} = 0.$$

Ma allora le $r+1$ proiettività caratteristiche fra gli assi x_i, y_i e fra le rette $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$, $y_1 = y_2 = \cdots = y_r$ sarebbero subordinate dall'omografia

$$y_i = a x_i.$$

Seguirebbe quindi che a $r+1$ punti qualunque situati su un iperpiano e appartenenti risp. agli assi x_i e alla retta $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$ corrisponderebbero nelle relative proiettività caratteristiche ancora $r+1$ punti appartenenti ad un iperpiano.

esiste un'omografia che oscula la trasformazione data in (O, O'), caso particolare nel quale le direzioni caratteristiche sono indeterminate e che noi abbiamo escluso).

È quindi lecito assumere come punto $(1, -1, \cdots, -1)$ in S_r il punto corrispondente nella proiettività caratteristica (2.8) del *punto all'infinito* di $y_1 = y_2 = \cdots = y_r$. Si deduce dalla (2.8)

$$\sum_{k,n} b^i_{kn} = -a. \tag{2.10}$$

Assumiamo inoltre come punto unità $(1, 1, \cdots, 1)$ in S_r il corrispondente nella proiettività caratteristica (2.8) del *punto all'infinito* di $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$. Si deduce

$$\sum_{k,n} b^i_{kn} = -a^2. \tag{2.11}$$

Dalla (2.10), (2.11) segue

$$a = 1. \tag{2.12}$$

Nella geometria affine nei due spazi si hanno gli *iperpiani all'infinito* ed è lecito, per quanto si è detto, assumere i punti unità nel modo ora indicato [17], sicchè valgono le (2.10), (2.12), mentre non valgono, in generale, le (2.9) [18]. Nella geometria affine si sono così ottenuti riferimenti intrinseci nei due spazi e le equazioni canoniche della trasformazione sono le seguenti

$$y_i = x_i + \sum_{k,n} b^i_{kn} x_k x_n + [3]$$

dove, per le (2.4), (2.6), (2.10), (2.12), $b^i_{kn} = 0$ se $i = k$, $\sum_{k,n} b^i_{kn} = -1$ $(i, k, n = 1, 2, \cdots, r)$ [19].

Nel seguito di questo lavoro ci atterremo esclusivamente alla geometria proiettiva. Nella geometria proiettiva per avere riferimenti intrinseci nei due spazi occorre ancora fissare intrinsecamente l'*iperpiano improprio* in uno

17) Esisterà infatti una retta caratteristica per O che noi possiamo supporre di avere scelta come $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$, per cui nella relativa proiettività caratteristica al punto all'infinito non corrisponde il punto all'infinito. In caso contrario infatti, cioè se in ogni proiettività caratteristica si corrispondessero i punti all'infinito, per quanto s'è detto, esisterebbe un'affinità che oscolerebbe la trasformazione data fino all'intorno del 2° ordine e quindi le direzioni caratteristiche sarebbero indeterminate.

18) Si presenta qui la considerazione dei *punti limiti* delle proiettività caratteristiche i quali determinano le proiettività stesse. Si veda: VILLA, l'ultimo dei lavori cit. nella nota (2), n. 4.

(19) Non vi sono invarianti affini del 1° ordine, mentre ve ne sono $r\left[\binom{r+1}{2} - r\right]$ del 2° ordine. L'interpretazione geometrica di essi non offre difficoltà in virtù dei risultati conseguiti in VILLA, l'ultimo dei lavori cit. nella nota (2), nn. 4, 5. Ad esempio, per $r = 2$, si hanno due invarianti affini (del 2° ordine), e cioè le due coordinate non nulle (esprimibili mediante rapporti semplici) dei punti limiti delle proiettività caratteristiche situati sugli assi x e y.

di essi. Per la scelta fatta fin qui dei riferimenti le equazioni della trasformazione si scrivono

$$y_i = x_i + \sum_{k,n} b^i_{kn} x_k x_n + [3] \tag{2.13}$$

dove, per le (2.4), (2.6), (2.9), (2.11), (2.12),

$$\begin{cases} b^i_{kk} = 0 \text{ (sia per } i \neq k \text{ come per } i = k), \\ \sum_{k,n} b^i_{kn} = -1 \quad (k \neq n), \\ b^i_{kn} = b^i_{nk} \qquad (i, k, n = 1, 2, \cdots, r). \end{cases} \tag{2.14}$$

Analisi. — *Estensione alle successioni di funzioni a variazione limitata di un criterio di Pólya-Cantelli per la convergenza uniforme su intervalli infiniti* (*). Nota di R. CONTI, presentata (**) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. Sia data una successione $\{f_\nu(x)\}$ di funzioni non decrescenti limitate (eccetto al più un numero finito di esse), convergente su di un intervallo infinito, ad esempio su $(a, +\infty)$, verso una funzione $f(x)$ (non decrescente) limitata.

Per una tale successione F. P. Cantelli ha dimostrato (1) che:

(*Necessario e*) *sufficiente per la convergenza uniforme è l'insieme delle due seguenti condizioni*

A: *le funzioni* $f_\nu(x-0)$ *tendano per* $\nu \to \infty$ *verso* $f(x-0)$, *e le* $f_\nu(x+0)$ *verso* $f(x+0)$, *dove*

$$f_\nu(x-0) = \lim_{h \to +0} f_\nu(x-h), \quad ecc.;$$

B: *la successione* $\{f_\nu(+\infty)\}$ *converga verso* $f(+\infty)$, *dove*

$$f_\nu(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f_\nu(x) \quad ; \quad f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Precedentemente il criterio era stato dimostrato da G. Pólya nell'ipotesi della continuità della funzione limite (2).

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(1) Ved. F. P. CANTELLI, *Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità*, «Giornale dell'Ist. It. degli Attuari», IV, n. 3, luglio 1933, pp. 421-424; *Considérations sur la convergence dans le calcul des probabilités*, «Ann. Sc. Inst. Poincaré», 5 (1935), p. 7; cfr. G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, 2ª ed., (Bologna, 1946), p. 454 e sgg. Nella forma riportata da questo A. il teorema si trova in M. FRÉCHET, *Récherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*. (Paris, 1937), p. 275 e sgg.

(2) Ved. G. PÓLYA, *Ueber den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem*, «Math. Zeitschrift», *8* (1920), p. 173. Sempre in tale ipotesi restrit-

Sembra abbastanza naturale che tali condizioni, opportunamente integrate, possano garantire la convergenza anche per le funzioni a variazione limitata, essendo queste un'immediata generalizzazione di quelle non decrescenti sopra considerate.

Se l'intervallo comune alle funzioni in discorso è l'intervallo *finito* (a, b) da un lavoro di C. R. Adams–J. A. Clarkson resulta che è sufficiente a garantire l'uniforme convergenza l'insieme della *cond.* A e della seguente

cond. C: convergenza delle variazioni totali $v_\nu\ b$ delle f_ν in (a, b) verso la variazione totale $v(b)$ della f in (a, b) [3].

Segue inoltre la convergenza uniforme delle $v_\nu(x)$ verso $v(x)$ al variare di x in (a, b).

Mediante l'estensione di una nota disuguaglianza richiamata anche nel lavoro ora citato mostreremo nelle righe seguenti che l'insieme delle *cond.* A, B, e della C opportunamente adattata, assicura l'uniforme convergenza per una successione di funzioni a variazione limitata convergente sull'intervallo $(a, +\infty)$.

Per ciò occorre anzitutto ricordare cosa si debba intendere per «funzione a variazione limitata su $(a, +\infty)$».

2. [4] Se f è a variazione limitata in ogni intervallo (a, x), per ogni $x \geqq a$, viene definita la sua variazione totale $v(x)$; diremo *variazione totale della f su* $(a, +\infty)$ il

$$\lim_{x \to +\infty} v(x).$$

Se questo limite è finito (e quindi $v(x)$ limitata) la f si dirà *a variazione limitata su* $(a, +\infty)$ e si scriverà

$$v(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} v(x).$$

La f resulta limitata perchè è finito

$$f(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Infatti per ogni $x \geqq a$ si hanno le note relazioni:

$$f(x) = f(a) + p(x) - n(x); \tag{1}$$

$$v(x) = p(x) + n(x); \tag{2}$$

tiva e nel caso di un intervallo finito vedasi anche: H. E. Buchanan–T. H. Hildebrand, «Annals of Math.», (2) 9 (1908), pp. 123–126; C. A. Dell'Agnola, «Atti R. Ist. Veneto», LXX, parte 2ª (1910–11), pp. 383–391; G. Vitali, «Boll. Un. Mat. Ital.», *4* (1925), pp. 107–109.

(3) Ved. C. R. Adams–J. A. Clarkson, *On convergence in variation*. «Bull. Am. Math. Soc.», *40* (1934), pp. 413–417; v. in particolare il «Theorem 5» che con le nostre notazioni si enuncia: Supposte le funzioni $f_\nu(x)$, a variazione limitata in (a, b), convergenti verso la funzione limite $f(x)$, per $\nu \to \infty$, la condizione C su (a, b), implica che un punto x di discontinuità per la funzione limite è punto di convergenza uniforme per entrambe le $\{f_\nu(x)\}$ e $\{v_\nu(x)\}$ o per nessuna delle due, in un intorno di x, secondo che è o no verificata la condizione A.

(4) Per questo numero cfr. G. Sansone, loc. cit., p. 127 sgg.

e poichè:

$$0 \leq p(x), n(x) \leq v(x) \leq v(+\infty),$$

saranno finiti:

$$p(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} p(x) \quad ; \quad n(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} n(x),$$

ed allora, per la (1), è finito anche $f(+\infty)$, e si hanno le:

$$(1') \qquad f(+\infty) = f(a) + p(+\infty) - n(+\infty),$$

$$(2') \qquad v(+\infty) = p(+\infty) + n(+\infty).$$

3. Sia ora $\{f_\nu\}$ una successione di funzioni a variazione limitata su $(a, +\infty)$ convergente verso una funzione f. Dimostriamo anzitutto il seguente:

LEMMA. – *La convergenza delle variazioni totali* $v_\nu(+\infty)$ *verso la* $v(+\infty)$ *(cond.* C') *implica la convergenza delle* $v_\nu(x)$ *verso* $v(x)$ *per ogni* $x > a$.

Preso un qualunque intervallo parziale (x, b), con $x < b$, consideriamo il

$$\lim_{\nu \to \infty} v_\nu(x, b);$$

fissato x questo è evidentemente una funzione non decrescente di b, quindi ha un limite per $b \to +\infty$, ed anzi, essendo:

$$v_\nu(x, b) \leq v_\nu(x, +\infty)$$

per ogni ν, e quindi anche:

$$\lim_{\nu \to \infty} v_\nu(x, b) \leq \lim_{\nu \to \infty} v_\nu(x, +\infty),$$

sarà:

$$(') \qquad \lim_{b \to +\infty} \lim_{\nu \to \infty} v_\nu(x, b) \leq \lim_{\nu \to \infty} v_\nu(x, +\infty).$$

D'altronde, indicando con v_ν e v le variazioni totali di f_ν ed f in un qualunque intervallo di $(a, +\infty)$, vale la «relazione di semicontinuità inferiore» (5)

$$(3) \qquad v \leq \lim_{\nu \to \infty} v_\nu.$$

Scritta questa per l'intervallo (x, b):

$$v(x, b) \leq \lim_{\nu \to \infty} v_\nu(x, b),$$

si ha, per $b \to +\infty$:

$$('') \qquad v(x, +\infty) \leq \lim_{b \to +\infty} \lim_{\nu \to \infty} v_\nu(x, b),$$

(5) Ved. ad esempio C. R. ADAMS–J. A. CLARKSON, loc. cit., p. 413.

ed allora, riunendo (') e (''):

$$(3') \qquad v(x, +\infty) \leq \overline{\lim_{\nu \to \infty}} v_\nu(x, +\infty)$$

relazione che estende la (3) agli intervalli infiniti.

Supponiamo ora verificata la *cond.* C: $v_\nu - v \to v - v$.

Per ogni b si può scrivere:

$$v_\nu(x, b) = v_\nu(b) - v_\nu(x)$$

e per $b \to +\infty$:

$$v_\nu(x, +\infty) = v_\nu(+\infty) - v_\nu(x).$$

Di qui, per la C':

$$\lim_{\nu \to \infty} v_\nu(x, +\infty) = v(+\infty) - \overline{\lim_{\nu \to \infty}} v_\nu(x).$$

Ora se le $v_\nu(x)$ non convergessero verso $v(x)$, applicando la (3) all'intervallo (a, x) si avrebbe

$$v(x) < \overline{\lim_{\nu \to \infty}} v_\nu(x),$$

e quindi

$$\lim_{\nu \to \infty} v_\nu(x, +\infty) < v(+\infty) - v(x) = v(x, +\infty),$$

contro la (3').

4. Siamo ora in grado di dimostrare il criterio annunciato:

TEOREMA: *La convergenza d'una successione di funzioni f_ν a variazione limitata su $(a, -\infty)$ verso una funzione limite f è uniforme su $(a, +\infty)$:*

$$1^\circ \quad \lim_{\nu \to \infty} f_\nu(x-0) = f(x-0) \; ; \; \lim_{\nu \to \infty} f_\nu(x+0) = f(x+0) \; , \; a \leq x; \quad \textit{cond. A};$$

$$2^\circ \quad \lim_{\nu \to \infty} f_\nu(+\infty) = f(+\infty) \qquad \textit{cond. B};$$

$$3^\circ \quad \lim_{\nu \to \infty} v_\nu(-\infty) = v(+\infty) \qquad \textit{cond. C}.$$

Per ogni $x \geq a$, possiamo scrivere le note relazioni:

$$(4) \qquad f(x) = \frac{1}{2}[v(x) + f(x) - f(a)] \quad , \quad u(x) = \frac{1}{2}[v(x) - f(x) + f(a)],$$

$$(4_\nu) \qquad f_\nu(x) = \frac{1}{2}[v_\nu(x) + f_\nu(x) - f_\nu(a)] \quad , \quad u_\nu(x) = \frac{1}{2}[v_\nu(x) - f_\nu(x) + f_\nu(a)].$$

Dalla A e dalla convergenza di $v_\nu(x)$ verso $v(x)$ Lemma prec. discende, per ciò che si è detto al n. 1, la convergenza uniforme delle f_ν verso f e delle v_ν verso v in qualunque intervallo (a, x); perciò, poichè dalle (4) e (4_ν) seguono le disuguaglianze

$$|f_\nu - f| \; , \; |u_\nu - u| \leq \frac{1}{2}[|v_\nu - v| + |f_\nu - f| + |f_\nu(a) - f(a)|]$$

si può affermare che anche le p_ν convergono uniformemente verso p e le n_ν verso n in ogni intervallo (a, x); ciò significa che la A è soddisfatta dalla successione $\{p_\nu\}$ rispetto alla p e dalla (n_ν) rispetto alla n.

Inoltre, come dalle (1) e (2) si traggono le (4) e (4_ν), si possono ricavare relazioni analoghe dalle (1') e (2') sostituendo $-\infty$ ad x; dalla C' e dalla B segue allora la convergenza di $p_\nu(-\infty)$ verso $p(-\infty)$ e di $n_\nu(-\infty)$ verso $n(-\infty)$.

Riunendo quanto si è stabilito circa le p_ν rispetto a p e le n_ν rispetto a n, si conclude, applicando a queste il citato criterio di F. P. Cantelli, che le p_ν convergono verso p uniformemente su $(a, -\infty)$ e lo stesso le n_ν verso n.

Poichè

$$|f_\nu - f| \leq |p_\nu - p| + |n_\nu - n| + |f_\nu(a) - f(a)|$$

segue l'asserto [6].

Meccanica. — *Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa.* Nota I di F. LEVI, presentata [*] dal Corrisp. G. COLONNETTI.

Il problema della presa in considerazione del fattore tempo nello studio dell'equilibrio delle costruzioni ha assunto una importanza pratica indiscutibile da quando è stato messo in luce il notevole effetto che ritiro e « fluage » del conglomerato possono avere sul regime statico delle strutture in c. a. L'entità di ambedue questi fenomeni è infatti essenzialmente legata all'età del getto e alla durata di azione del carico.

In questa prima ricerca, noi ci limiteremo ad occuparci degli effetti del « fluage », ossia della deformazione plastica che il conglomerato subisce nel tempo, sotto l'azione di una sollecitazione permanente. Per distinguere chiaramente il fluage dalla deformazione plastica istantanea (o per lo meno molto rapida) che si riscontra quando la tensione raggiunge valori elevati, noi lo denomineremo in seguito « effetto viscoso ».

Dagli studi sperimentali sull'argomento si possono ricavare i seguenti dati, suscettibili di essere posti alla base di uno studio analitico del problema.

— Ad ogni istante, l'entità del fenomeno è proporzionale alla sollecitazione normale unitaria che agisce sull'elemento considerato. Noi esprimeremo analiticamente questa condizione caratterizzando la viscosità mediante un coefficiente $\bar{\varepsilon}_0$ denominato « viscosità specifica » il quale rappresenta la deformazione viscosa unitaria subìta sotto l'azione di una sollecitazione di 1 Kg/cm².

(6) Facendo uso del Lemma del n. 3 la dimostrazione potrebbe ottenersi anche modificando convenientemente quella del citato teorema di CANTELLI.

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1948.

— La legge d'interdipendenza fra viscosità specifica e tempo assume l'andamento caratteristico di un decremento esponenziale. Noi la scriveremo

$$\bar{\varepsilon}_0 = \gamma\,(1 - e^{-\delta t}). \tag{1}$$

Ne segue dunque che, al tempo τ, la deformazione viscosa subìta da un elemento sottoposto ad una sollecitazione costante σ sarà data dall'espressione:

$$\bar{\varepsilon}_v = \sigma \cdot \gamma \cdot (1 - e^{-\delta t}) \tag{2}$$

mentre invece, se la sollecitazione σ varia nel tempo, la deformazione impressa di origine viscosa sarà, al tempo τ:

$$\bar{\varepsilon}_v = \int_0^\tau \sigma\,(t)\,\frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt}\,dt = \int_0^\tau \sigma\,(t)\,\gamma\,\delta e^{-\delta t}\,dt. \tag{3}$$

Nella scelta dei coefficienti γ, δ bisognerà necessariamente tener conto dell'età raggiunta dal getto al momento in cui la viscosità incomincia ad esplicare la sua funzione statica. Nello studio analitico degli effetti della viscosità noi introdurremo l'ipotesi, usualmente adottata nei calcoli delle sollecitazioni dovute al ritiro: noi ammetteremo cioè che le deformazioni trasversali che accompagnano la deformazione longitudinale rispondano, anche in campo viscoso, alla legge che si riscontra in campo elastico.

Sia dunque una qualsiasi struttura omogenea (ossia caratterizzata in tutti i suoi punti dagli stessi valori dei coefficienti elastici) i cui elementi siano assimilabili ad altrettanti solidi di De Saint Venant. Supponiamola sottoposta all'azione da un sistema F di forze esterne ed ammettiamo che il materiale di cui essa è costituita presenti un andamento viscoso caratterizzato dalla (1). Il teorema generale del Colonnetti sull'equilibrio dei sistemi elastici in cui si verificano delle deformazioni impresse afferma che i singoli valori delle componenti di tensione che caratterizzano l'equilibrio sono quelli che rendono minima l'espressione del lavoro di deformazione, compatibilmente con le forze esterne date e le deformazioni impresse [1]. Se si trascura l'effetto del taglio, l'equazione che esprime questa condizione di minimo si riduce a:

$$\int_V \left(\frac{\sigma}{E} + \bar{\varepsilon}_v\right) \vartheta\sigma\, dV = 0$$

in cui E rappresenta il modulo elastico del materiale che costituisce il solido. Questa espressione esprime notoriamente la congruenza della deformazione totale la cui entità è raffigurata dal termine posto fra parentesi. Ma se noi osserviamo che, ad ogni istante, la deformazione viscosa è, per la (2), proporzionale al valore della sollecitazione, e dunque proporzionale alla deformazione elastica, noi possiamo affermare col Colonnetti [2] che l'effetto statico

(1) G. Colonnetti, *Scienza delle Costruzioni*, Einaudi, 1941.

(2) G. Colonnetti, *Deformazioni plastiche e deformazioni viscose*. « Pontificia Academia Scientiarum. Acta », Vol. VI, N. 24.

del fenomeno viscoso sarà sempre identicamente nullo poichè le deformazioni viscose rimarranno sempre congruenti.

Ad un risultato completamente diverso si giunge se si ammette che la struttura, oltre ad essere sollecitata dalle forze F, sia sottoposta anche a certe deformazioni impresse generiche $\bar{\varepsilon}$ (la cui azione noi supporremo sempre assimilabile ad una distorsione di Volterra [3]). In questo caso, l'equazione che caratterizza l'equilibrio sarà:

$$(4) \qquad dL = \int_V \left[\frac{\sigma(\tau)}{E} + \varepsilon + \int_0^\tau \sigma \gamma \vartheta e^{-\vartheta t} dt \right] \vartheta\sigma \cdot dV = 0 .$$

Anche qui, la parentesi rappresenta la deformazione totale ε_T dell'elemento di volume in senso longitudinale, deformazione totale di cui dobbiamo esprimere la congruenza. Questa volta, l'esistenza del termine $\bar{\varepsilon}$ fa sì che la deformazione totale non sia più proporzionale alla σ; se ne deduce che la viscosità avrà sicuramente un effetto statico.

Conviene allora osservare che noi abbiamo sempre il diritto di dedurre dall'espressione della deformazione totale una frazione della deformazione stessa se possiamo affermare *a priori* che detta frazione è sicuramente congruente. Infatti, nelle equazioni con le quali scriveremo che la funzione L assume per l'equilibrio un valore minimo, la somma dei termini relativi a siffatta frazione risulterà sempre identicamente nulla. Nel caso particolare esaminato, noi siamo precisamente in grado di affermare che le deformazioni elastiche dovute ai carichi, e le relative deformazioni viscose, costituiscono un sistema congruente. Noi le dedurremo dunque dall'espressione della deformazione totale; per il che basterà dire che la sollecitazione σ che figura nella (4) è quella dovuta alle deformazioni impresse e al relativo effetto viscoso, indipendentemente dall'effetto delle forze esterne la cui azione potrà dunque venir studiata a parte.

Rimane così dimostrato, in campo viscoso, il principio della sovrapposizione degli effetti fra carichi esterni e deformazioni impresse.

Vediamo ora cosa si può dire sul valore assunto dalla L in corrispondenza dell'equilibrio.

Invece di applicare direttamente il teorema del Colonnetti, noi possiamo esprimere l'equilibrio immaginando di lasciare invariate le sollecitazioni e di far variare le deformazioni. Per qualsiasi variazione di configurazione sicuramente congruente, il lavoro virtuale compiuto dalle sollecitazioni che caratterizzano l'equilibrio dovrà risultare nullo. Fra tutte le variazioni di configurazioni congruenti noi possiamo in particolare scegliere quella, certamente possibile e piccolissima, che il sistema subisce nel passare dallo stato di equilibrio all'istante τ allo stato infinitamente vicino, raggiunto

(3) Questa restrizione non è tuttavia indispensabile nel ragionamento che ci condurrà a stabilire l'equazione (5).

all'istante $\tau + d\tau$. Quanto dire che si dovrà avere, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$(5) \qquad \int_V \sigma(\tau) \frac{d}{dt} \left[\frac{\sigma}{E} + \bar{\varepsilon} + \int_0^t \sigma \gamma \delta e^{-\delta\alpha} dt \right] dV = 0.$$

Questa espressione può dunque venire considerata come l'equazione generale dell'equilibrio viscoso di un solido elastico omogeneo.

Vediamo ora in qual modo la (5) si presti alla risoluzione di problemi concreti.

In un sistema elastico piano, noi possiamo sempre assimilare l'effetto statico di una distorsione di Volterra a quello di due forze R eguali e contrarie applicate alle faccie di un taglio effettuato in corrispondenza della sezione nella quale si realizza la distorsione. Queste forze vanno applicate secondo l'antipolare del centro di rotazione mutuo delle due faccie; la loro intensità deve essere tale che il prodotto del momento della R rispetto al baricentro elastico per il peso elastico sia eguale all'ampiezza della rotazione. Se durante un intervallo di tempo dt, contato a partire dall'istante τ, il materiale di cui il solido è costituito presenta un effetto viscoso caratterizzato dalla (1), tutto avviene come se il solido avesse un modulo più basso. Per ottenere la stessa distorsione, sarà ancora necessaria una forza applicata secondo la stessa linea d'azione poichè una variazione del modulo non muta nè la posizione del baricentro elastico nè le altre caratteristiche dell'ellisse di elasticità ma di intensità minore. Questo ragionamento si può naturalmente ripetere ad un istante qualsiasi. In altri termini, la tensione σ nel punto generico e dunque anche una qualsiasi delle incognite iperstatiche è funzione lineare e omogenea della R con coefficiente di proporzionalità costante nel tempo.

Quanto dire che noi possiamo sempre esprimere la sollecitazione come funzione lineare e omogenea di una sola incognita iperstatica X_i scelta ad arbitrio. Scriveremo perciò

$$\sigma = A X_i$$

dove il coefficiente A varia naturalmente da punto a punto. Sostituiamo allora nella (5), viene:

$$\int_V \left[\frac{A}{E} \frac{dX_i}{dt} + A \gamma \delta X_i e^{-\delta t} \right] \sigma(\tau) dV = 0$$

e dunque

$$\frac{dX_i}{dt} \int_V A \sigma(\tau) dV + E \gamma \delta X_i e^{-\delta t} \int_V A \sigma(\tau) dV = 0.$$

Equazione che si riduce ovviamente alla seguente semplicissima equazione differenziale (valida per qualsiasi incognita isperstatica):

$$\frac{dX_i}{dt} - E\gamma\delta X_i e^{-\delta t} = 0. \tag{6}$$

Separando le variabili, viene:

$$\frac{dX_i}{X_i} = -E\gamma\delta e^{-\delta t}\, dt$$

e, integrando:

$$\operatorname{Log} X_i = E\gamma e^{-\delta t} + C$$

il valore della costante si calcola facilmente osservando che per $t = 0$ l'incognita deve assumere il valore che le compete quando nel solido considerato si realizza la distorsione $\bar{\varepsilon}$ in regime elastico (ossia in assenza di qualsiasi effetto viscoso). Sia X_{iE} questo particolare valore. Si dovrà dunque avere

$$\operatorname{Log} X_{iE} = E\gamma + C \qquad C = \operatorname{Log} X_{iE} - E\gamma$$

e dunque

$$\operatorname{Log} X_i = E\gamma e^{-\delta t} + \operatorname{Log} X_{iE} - E\gamma.$$

Passando ai numeri

$$X_i = X_{iE}\, e^{-E\gamma(1-e^{-\delta t})}. \tag{7}$$

Espressione che stabilisce la legge di variazione delle incognite iperstatiche in funzione del tempo, qualunque sia il grado di iperstaticità del sistema.

La (7) si presta ad alcune importanti osservazioni.

Anzitutto si nota che l'effetto statico del fenomeno viscoso può venire assimilato, nel caso dei solidi omogenei, a quello di una variazione del modulo elastico il quale, nella valutazione delle sollecitazioni dovute ad una deformazione impressa, deve dunque essere considerato come una funzione del tempo della forma:

$$D = \frac{E}{e^{E\gamma(1-e^{-\delta t})}} \tag{8}$$

A tempo indefinito, si avrà dunque:

$$D_\infty = \frac{E}{e^{E\gamma}} = \frac{E}{1 + E\gamma + \dfrac{E^2\gamma^2}{2} + \dfrac{E^3\gamma^3}{6} + \cdots} \tag{9}$$

È interessante osservare che il cosidetto «metodo del modulo di deformazione» [4] che assimila le deformazioni viscose a delle deformazioni elastiche,

[4] F. LEVI. *Sugli stati di coazione determinati in un sistema elastico dalla presenza di deformazioni impresse la cui entità sia funzione del regime statico.* «Atti del Centro Studi sulle coazioni del Consiglio Nazionale delle Ricerche», Torino, 1947.

calcolandone l'entità come se in ciascun punto la sollecitazione rimanes costante nel tempo, conduce ad un valore del modulo:

$$D' = \frac{E}{1 + E\gamma}$$

espressione nella quale si ritrovano, al denominatore, i due primi termin dello sviluppo in serie del divisore $e^{E\gamma}$ che compare nella (9).

Un'altra conseguenza importante della teoria svolta è che, in assenz di forze esterne, l'effetto viscoso nel solido omogeneo lascia ovunque inva riato il segno della sollecitazione. Ne segue che l'effetto viscoso, da solo non muta la posizione del poligono delle pressioni di un arco o la forma de diagramma dei momenti in una trave continua. Naturalmente, questa affer mazione non è più valida in presenza di un sistema di carichi poichè allor la sollecitazione in ciascun punto è rappresentata, in funzione del tempo da una espressione con termine costante.

Geodesia. — *Sopra alcune formule relative alla rappresentazion gaussiana della sfera sul piano.* Nota di A. Marcantoni, presentata (* dal Corrisp. G. Boaga.

1. La proiezione conforme di Gauss di cui, tanto nei problemi più propria mente cartografici quanto nelle applicazioni geodetiche, si è potuto constatar la praticità e la semplicità notevoli, tende ad assumere una diffusione sempr più vasta. Come è noto, essa fu adottata dal nostro I.G.M. nel 1941 col nom di *proiezione di Gauss–Boaga*, in quanto il prof. Boaga, a cui va il merit di questa adozione, introdusse all'uopo procedimenti ed algoritmi del tutt moderni. Recentemente, al Convegno internazionale tenutosi in Firenz dal 27 al 31 ottobre in occasione del 75° anniversario dell'I.G.M., il delegat americano Col. Hough comunicò che anche negli Stati Uniti, ove fino ad ogg si era sempre usata la proiezione conica di Lambert, si era deciso di servir di quella di Gauss.

In relazione a ciò, si ritiene interessante segnalare alcuni risultati che s ottengono applicando detta proiezione alla *sfera*, anzichè all'ellissoide di rota zione. In questo caso, infatti si possono ottenere formule completament in termini finiti, da cui è facile trarre sviluppi già noti ed, eventualmente prolungarli. Dall'altra parte, per esempio, ricorrendo al metodo delle « lat tudini conformi » i risultati si possono generalizzare all'ellissoide, sì da trarn utili applicazioni, per esempio, quando si debba operare con geodetiche molt lunghe, o su punti notevolmente distanziati, in longitudine, dal *meridian centrale* della carta.

2. La proiezione di Gauss per la sfera, come è noto, è una *proiezione d Mercatore trasversa*, in cui, cioè, la funzione dei poli viene svolta dai du

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

punti in cui il meridiano di latitudine $\pm 90^\circ$ incontra l'equatore. Partendo allora dalle equazioni di quest'ultima proiezione, ed applicando i noti metodi per il passaggio dalle proiezioni dirette alle trasverse, si trovano per la proiezione Gaussiana della sfera le equazioni:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \varphi \cos \lambda \quad , \quad \operatorname{Th} y = \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda .$$

Nelle (1) si è assunto l'asse delle x (1° meridiano della carta) rivolto al nord e l'asse delle y (equatore) rivolto all'est, le *coordinate gaussiane* x ed y si intendono commisurate al raggio della sfera, sulla quale φ denota la latitudine e λ la longitudine; inoltre con Sh , Ch , Th si indicano le note funzioni iperboliche. Le (1) sono le equazioni fondamentali della proiezione: da esse si traggono anzitutto le *equazioni reciproche*:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{sen} \varphi = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{Ch} y} \quad , \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{Sh} y}{\cos x}$$

ed in seguito i due principali parametri atti a caratterizzare la proiezione stessa.

Essi sono:

a) *Convergenza dei meridiani*, ossia l'angolo di direzione γ (contato in senso antiorario) del meridiano della carta rispetto all'asse delle x. Notoriamente si ha:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\partial x}{\partial \lambda} : \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

Derivando pertanto rispetto a λ le (1) e tenuta presente la prima delle (2), si ottiene senza difficoltà

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \lambda .$$

b) *Modulo di deformazione lineare*: stante la conformità è indipendente dalla direzione; si presta particolarmente al suo calcolo la formula

$$m = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2} \sec \varphi = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \sec \varphi \sec \gamma$$

che ne fornisce l'espressione lungo il parallelo. In base alle (1) (2) e (3), dopo facili trasformazioni, si ottiene

$$\text{(4)} \qquad m = \cos \gamma \sec \lambda .$$

Nelle applicazioni geodetiche, come è noto, interessa avere i suddetti parametri espressi mediante le coordinate gaussiane x e y: all'uopo introducendo le (1) e (2), si ottiene

$$\text{(3')} \qquad \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} x \operatorname{Th} y$$

$$\text{(4')} \qquad m = \operatorname{Ch} y$$

che forniscono le espressioni volute.

3. I problemi fondamentali che si presentano nelle applicazioni alla Geodesia, come è noto, riguardano lunghezze ed azimut di geodetiche, angoli

fra esse, ecc., da trarre sempre in base agli elementi della rappresentazione piana.

La *lunghezza di un arco di geodetica in funzione delle coordinate gaussiane dei suoi estremi* P_1 e P_2, si ottiene dalla formula che ne dà l'espressione in coordinate geografiche:

$$\cos s = \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$

e introducendo in essa le (1) e (2). Si ottiene così senza difficoltà:

$$(5) \qquad \cos s = \frac{\operatorname{Sh} y_1 \operatorname{Sh} y_2 + \cos(x_2 - x_1)}{\operatorname{Ch} y_1 \operatorname{Ch} y_2}$$

da cui si ha pure con facili trasformazioni

$$(5') \qquad \operatorname{sen}^2 \frac{s}{2} = \frac{\operatorname{Ch}(y_2 - y_1) - \cos(x_2 - x_1)}{2 \operatorname{Ch} y_1 \operatorname{Ch} y_2} = \frac{\operatorname{Sh}^2 \frac{y_2 - y_1}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x_2 - x_1}{2}}{m_1 m_2}.$$

Per il calcolo degli *azimut estremi della geodetica*, che indicheremo con $\alpha_{1\cdot 2}$ ed $\alpha_{2\cdot 1}$, osserviamo che, se con $\beta_{1\cdot 2}$ e $\beta_{2\cdot 1}$ si denotano gli angoli di direzione, rispetto all'asse x, della sua trasformata, o *azimut gaussiani*, si avrà

$$(6) \qquad \alpha_{1\cdot 2} = \beta_{1\cdot 2} + \gamma_1 \quad , \quad \alpha_{2\cdot 1} = \beta_{2\cdot 1} + \gamma_2$$

dove γ_1 e γ_2 sono le convergenze dei meridiani in P_1 e P_2. Tutto si riduce quindi al calcolo di $\beta_{1\cdot 2}$ e $\beta_{2\cdot 1}$. All'uopo, si ricordi che la geodetica sulla sfera ha un'equazione del tipo

$$A \cos\varphi \cos\lambda + B \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda + C \operatorname{sen}\varphi = 0$$

e che quindi, stanti le (1) e (2), l'equazione della trasformata è

$$A \cos x + B \operatorname{Sh} y + C \operatorname{sen} x = 0$$

dove le costanti A, B e C si determinano subito una volta date le coordinate piane (x_1, y_1) ed (x_2, y_2) degli estremi; ciò posto, si avrà

$$\operatorname{tg}\beta_{1\cdot 2} = \left(\frac{dy}{dx}\right),$$

e $\operatorname{tg}\beta_{2\cdot 1}$ si potrà ricavare scambiando gli indici « 1 » e « 2 ». Così operando, si ottiene

$$(7) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\beta_{1\cdot 2} = \dfrac{\operatorname{Sh} y_2 - \operatorname{Sh} y_1 \cos(x_2 - x_1)}{\operatorname{Ch} y_1 \operatorname{sen}(x_2 - x_1)} \\ \operatorname{tg}\beta_{2\cdot 1} = \dfrac{\operatorname{Sh} y_1 - \operatorname{Sh} y_2 \cos(x_2 - x_1)}{-\operatorname{Ch} y_2 \operatorname{sen}(x_2 - x_1)} \end{cases}.$$

Le (7) determinano completamente $\beta_{1\cdot 2}$ e $\beta_{2\cdot 1}$, quando si tenga presente che i segni dei seni e dei coseni coincidono rispettivamente con quelli dei

numeratori e dei denominatori ai secondi membri. Tenendo conto delle (5) e (5′) le (7) dànno pure

$$(7') \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\beta_{1\cdot 2} + \operatorname{tg}\beta_{2\cdot 1}) = \dfrac{\operatorname{Sh}(y_2 - y_1)}{\operatorname{sen}(x_2 - x_1)} \cos^2\dfrac{s}{2} \\ \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\beta_{1\cdot 2} - \operatorname{tg}\beta_{2\cdot 1}) = \dfrac{\operatorname{Sh}(y_2 + y_1)}{\operatorname{sen}(x_2 - x_1)} \operatorname{sen}^2\dfrac{s}{2}. \end{cases}$$

Per il calcolo di s, $\beta_{1\cdot 2}$ e $\beta_{2\cdot 1}$, si possono derivare anche formule atte al calcolo logaritmico, sia per quando si disponga delle comuni tavole logaritmico-trigonometriche, sia per quando si abbiano tavole con i logaritmi delle funzioni iperboliche.

Nel primo caso occorre introdurre un parametro ausiliario, e cioè il *gudermaniano* ϑ dell'argomento y, definito colle relazioni equivalenti

$$(8) \quad \operatorname{sen}\vartheta = \operatorname{Th} y \;,\quad \sec\vartheta = \operatorname{Ch} y \;,\quad \operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{Sh} y \;,\quad y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right).$$

Si constata subito che, mediante le (8), le (5) e (7) si mutano nelle relazioni che legano gli elementi di un triangolo sferico di lati s, $\frac{\pi}{2} - \vartheta_1$ e $\frac{\pi}{2} \vartheta_2$, ed i cui angoli apposti siano rispettivamente $(x_2 - x_1)$, $\frac{\pi}{2} - \beta_{1\cdot 2}$ e $\frac{\pi}{2} + \beta_{2\cdot 1}$. Questa osservazione permette di ricavare senz'altro per il calcolo di queste tre ultime quantità le formule

$$(9) \quad \begin{cases} \operatorname{cotg}\dfrac{\beta_{1\cdot 2} - \beta_{2\cdot 1}}{2} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\vartheta_2 + \vartheta_1)} \operatorname{cotg}\dfrac{1}{2}(x_2 - x_1) \;, \\ \operatorname{cotg}\dfrac{\beta_{1\cdot 2} + \beta_{2\cdot 1}}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\cos\frac{1}{2}(\vartheta_2 + \vartheta_1)} \operatorname{cotg}\dfrac{1}{2}(x_2 - x_1) \\ \operatorname{sen} s = \dfrac{\cos\vartheta_1}{\cos\beta_{2\cdot 1}} \operatorname{sen}(x_2 - x_1) = \dfrac{\cos\vartheta_2}{\cos\beta_{1\cdot 2}} \operatorname{sen}(x_2 - x_1). \end{cases}$$

Quando ci si trovi nel secondo dei casi sopra nominati, l'eliminazione di ϑ_1 e ϑ_2 fatta in base alle (8) porta al nuovo gruppo di formule

$$(9') \quad \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(\beta_{1\cdot 2} + \beta_{2\cdot 1}) = \dfrac{\operatorname{Th}\frac{1}{2}(y_2 - y_1)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_2 - x_1)} \;, \\ \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(\beta_{1\cdot 2} - \beta_{2\cdot 1}) = \operatorname{Th}\dfrac{1}{2}(y_2 + y_1) \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(x_2 - x_1) \\ \operatorname{sen} s = \dfrac{\operatorname{sen}(x_2 - x_1)}{\cos\beta_{2\cdot 1} \operatorname{Ch} y_1} = \dfrac{\operatorname{sen}(x_2 - x_1)}{\cos\beta_{1\cdot 2} \operatorname{Ch} y_2}. \end{cases}$$

Per il calcolo di s si potrà anche utilizzare l'espressione di $\operatorname{tg}\frac{1}{2}s$ che scende dalle (7') e che si riduce subito adatta al calcolo logaritmico.

4. Pure fondamentale nelle applicazioni è il problema del *trasporto delle coordinate e degli azimut gaussiani lungo un arco di geodetica di cui siano date le coordinate e l'azimut (geodetico) iniziale*. Anche per questo problema, come pel precedente, si possono trarre tre diversi gruppi di formule risolutive.

Le formule del primo gruppo discendono direttamente dalla (5) e (7) e forniscono

$$(10)\quad \operatorname{Th} y_2 = \frac{2\operatorname{sen}\beta_{1,2}\operatorname{sen} s + \operatorname{Sh} 2y_1 \cos s}{2\operatorname{Ch}^2 y_1}\ ,\quad \operatorname{sen}\beta_{2,1} = \frac{\operatorname{Th} y_2 \cos s - \operatorname{Th} y_1}{\operatorname{sen} s}\operatorname{Ch}^2 y_2$$

per avere $(x_2 - x_1)$ si può ricorrere alla terza delle (9').

Il secondo gruppo scende dalla considerazione del triangolo sferico fittizio già accennato e da esso si ha:

$$(11)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta_{2,1} + (x_2 - x_1)}{2}\right) = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta_1 + s}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta_1 - s}{2}\right)} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta_{1,2}}{2}\right)\ , \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta_{2,1} - (x_2 - x_1)}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta_1 + s}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta_1 - s}{2}\right)} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta_{1,2}}{2}\right) \\ \cos\vartheta_2 = \dfrac{\operatorname{sen} s}{\operatorname{sen}(x_2 - x_1)}\cos\beta_{1,2} = \dfrac{\cos\vartheta_1}{\cos\beta_{2,1}}\cos\beta_{1,2} \end{cases}$$

atte al calcolo colle comuni tavole logaritmico-trigonometriche.

Infine, il terzo gruppo si ha eliminando colle (6) i gudermaniani ϑ_1 e ϑ_2 ed introducendo per contro un parametro u il cui gudermaniano è $\frac{\pi}{2} - s$, e cioè

$$u = -\ln \operatorname{tg}\frac{s}{2}\ ,\quad \cos s = \operatorname{Th} u,\ \text{ecc.}$$

Si ottiene così

$$(11')\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta_{2,1} + (x_2 - x_1)}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta_{1,2}}{2}\right)}{\operatorname{Th}\frac{u + y_1}{2}}\ , \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta_{2,1} - (x_2 - x_1)}{2}\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta_{1,2}}{2}\right)\operatorname{Th}\frac{u - y_1}{2} \\ \operatorname{Ch} y_2 = \dfrac{\operatorname{Ch} u \operatorname{sen}(x_2 - x_1)}{\cos\beta_{1,2}} = \dfrac{\operatorname{Ch} y_1 \cos\beta_{2,1}}{\cos\beta_{1,2}} \end{cases}$$

utilizzabili vantaggiosamente se si dispone di tavole logaritmiche delle funzioni iperboliche. È per ultimo da osservare che per il calcolo delle *riduzioni angolari*, cioè degli angoli che la trasformata dell'arco di geodetica fa colla corda che ne congiunge gli estremi, detti $\alpha'_{1\cdot 2}$ ed $\alpha'_{2\cdot 1}$ $(= \alpha'_{1\cdot 2} + \pi)$ gli azimut gaussiani della corda stessa, si hanno le relazioni

$$(12) \qquad \varepsilon_{1\cdot 2} = \alpha'_{1\cdot 2} - \beta_{1\cdot 2} \quad , \quad \varepsilon_{2\cdot 1} = \beta_{2\cdot 1} - \alpha'_{2\cdot 1} \, .$$

Colle (12) si completano le formule atte a risolvere i vari problemi concernenti il calcolo e la compensazione delle reti geodetiche coll'ausilio della rappresentazione gaussiana.

BIBLIOGRAFIA

G. BOAGA, *Sulla rappresentazione conforme di Gauss.* I.G.M., Coll. Testi tecnici, Firenze 1941; Note sul « Bollettino Geodetico » dell'I.G.M. 1943, nn. 2–5–6–8; 1947, nn. 1 e 3 e « Rivista del Catasto », 1944, n. 1.

B. BONIFACINO, « Rivista del Catasto », 1944, n. 3.

M. MENESTRINA, « Boll. Geod. » dell'I.G.M. 1942, n. 3.

G. TROMBETTI, ibid. 1943, nn. 6–7–8.

L. DRIENCOURT–J. LABORD, *Projections des cartes Géographiques.* Paris 1932.

P. TARDI, *Traité de Géodésie.* Paris 1934.

Astronomia. — *Sulla radiazione solare ricevuta dai solidi.* Nota di G. VINACCIA, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

L'influenza che il clima può esercitare su di un solido pieno o cavo, a prescindere dalla sua natura e dalle relative proprietà fisiche, è essenzialmente funzione della superficie totale o parziale del solido che ne va soggetta.

Nel caso che tutta la superficie esterna è influenzata da un esponente climatico, come avviene con la temperatura ambientale (radiazione solare diffusa) il rapporto tra l'area della superficie esterna ed il volume del solido ne dà la misura. Tale rapporto che chiamo *coefficiente d'influenza ambientale* è perciò così espresso:

$$\frac{A_t}{V} = C_{i/a} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} A_t = \text{area totale superficie esterna} \\ V = \text{volume} \\ C_{i/a} = \text{coefficiente d'influenza ambientale.} \end{cases}$$

Nel caso invece che l'influenza climatica è limitata ad una parte della superficie del solido, come nel caso dell'insolazione (e del vento), il rapporto è limitato tra l'area della superficie ricevente e il volume del solido:

$$\frac{a_t}{V} = C'_{i/a} \quad \text{dove} \quad a_t = \text{area superficie soggetta all'influenza dello speciale agente climatico.}$$

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1948.

Come è stato detto nel riassunto tre sono i fattori che possono influire sul coefficiente d'influenza ambientale, precisamente la grandezza, la forma e l'orientazione del solido.

1. Influenza della grandezza del solido. – Comincio con l'esaminare l'influenza della grandezza del solido allorchè tutta la sua superficie esterna è soggetta all'agente climatico.

Dalla geometria si ha che per i poliedri regolari simili, il rapporto superficie/volume è inversamente proporzionale allo spigolo, perciò a spigolo doppio corrisponde coefficiente di influenza ambientale metà, a spigolo triplo un terzo e così via. Analogamente avviene per la sfera i cui coefficienti di influenza ambientale sono inversamente proporzionali ai raggi.

Ecco che da ciò si può trarre il principio che: *per ridurre al minimo la influenza della temperatura ambientale (radiazione solare diffusa) occorre dare ad un solido la maggiore grandezza possibile.*

Tale principio ha una grande importanza per l'edilizia dei paesi settentrionali, in quanto permette di difendere i fabbricati dalle bassissime temperature invernali ed economizzare combustibile per il loro riscaldamento. Possiamo avere un'idea della reale importanza di tale difesa, confrontando i quantitativi di carbone consumati stagionalmente per le insopprimibili perdite termiche paretali di due case cubiche una di m. 5 di lato (casa ad un piano) ed una di 30 m. di lato (6 piani).

Siccome i rapporti dei rispettivi coefficienti di influenza ambientale è di 1/6, se nella prima le perdite per metro cubo di fabbricato ammontano a kg. 600 di carbone, nella seconda saranno ridotte a kg. 100.

Il detto principio è di non minore importanza per la zona intertropicale ad alta costante temperatura, dove fabbricati di considerevole mole, a basso coefficiente di influenza ambientale, possono più facilmente e più lungamente conservare temperature di conforto, artificialmente e costosamente realizzate.

Tale principio spiega da noi, come nei grandi fabbricati, segnatamente nei teatri e più ancora nelle chiese, d'inverno troviamo un certo calduccio e in estate un senso di fresco.

In architettura navale per ridurre la quota di attrito per unità di volume e conseguentemente risparmiare forza motrice, così pure in ingegneria aeronautica ci si avvale di tale principio e si tende ad aumentare sempre più il tonnellaggio delle navi e degli aeroplani. Anche l'idraulica applica tale principio, adottando sezioni maggiori, per i canali e le condotte, allo scopo di aumentare le portate.

Infine, con tale principio, i medici spiegano la morte dei lattanti per colpo di calore, frequenti nella Francia meridionale e nel Marocco quando spirano venti eccessivamente caldi.

2. Se l'agente climatico, come la radiazione solare diretta (ed il vento) esercita la sua azione in una precisa direzione allora solo una parte della

superficie esterna del solido ne è colpita, mentre l'opposta ne resta esente.

Anche allora la grandezza del solido esercita la sua influenza sulla determinazione della quota di superficie colpita per unità di volume.

Per dare un'idea di ciò consideriamo l'involvente il solido costituito dalla radiazione solare diretta. È questa una superficie indefinita, più o meno prismatica, la cui linea di tangenza costituisce la separatrice della zona in sole da quella in ombra. L'area della sezione retta di tale involvente dà la misura del flusso solare ricevuto dal solido. Allora se noi sviluppiamo il solido nella direzione della radiazione solare, contenendolo nel detto involvente, si aumenterà il volume e si diminuirà il coefficiente d'influenza ambientale. Un esempio può essere utile a meglio chiarire ciò. Supponiamo il Sole al sorgere, ed un fabbricato di forma parallelepipeda rettangola, con una facciata ortogonale alla direzione della r. s.

È evidente che questa facciata data la sua ortogonalità riceverà la massima intensità della r. s., e non essendovi altre parti del fabbricato insolate, la sua superficie misurerà anche il flusso termico ricevuto dal fabbricato. Conseguentemente la quantità di calore ricevuto dall'unità di volume sarà inversamente proporzionale alla terza dimensione del parallelepipedo, cioè allungandolo nella direzione della r. s. diminuiranno le calorie per unità di volume, il contrario raccorciandolo.

Supponendo invece il Sole allo zenit, con conseguente insolazione limitata alla sola copertura, aumentando l'altezza del parallelepipedo, diminuirà il calore ricevuto dall'unità di volume e viceversa nel caso opposto. Perciò nei paesi intertropicali, segnatamente quelli della fascia circumequatoriale, a Sole alto, e coperture intensamente insolate, convengono i fabbricati multipiani.

3. Il problema così sommariamente esposto sarebbe di semplice e rapida soluzione se la posizione del Sole non mutasse continuamente con l'ora e col giorno. Aggiungasi che l'intensità della r. s. varia con l'altezza del Sole secondo la ben nota legge di Bouguer, e che questi calcoli sono essenzialmente locali in quanto il corso del Sole varia con la latitudine e per la stessa latitudine può venire limitato dall'orografia e dalle condizioni climatiche locali. In tal caso solo esaurienti calcoli analitici possono stabilire la grandezza da dare al solido in uno all'orientazione relativa.

Nel caso invece del vento il problema è più semplice, trattandosi normalmente di ridurre il disperdimento del calore del solido sotto l'azione del vento dominante avente bassa temperatura; allora per realizzare tale difesa basta sviluppare il solido nella direzione del vento.

Naturalmente può presentarsi anche il caso opposto di dover utilizzare un vento fresco per refrigerare un fabbricato, come ad esempio occorre in estate nella sponda settentrionale africana mediante i venti etesii che soffiano dal mare, oppure utilizzare venti caldi per accrescere la temperatura interna di un fabbricato. In tali casi il procedimento da seguire sarà ovviamente il contrario.

4. Influenza della forma. – Sinora ho trattato delle possibilità che offre la grandezza dei solidi nella difesa climatica. Passo ora ad esaminare le possibilità offerte dalla forma dei solidi, cominciando dalla difesa dagli agenti climatici che esercitano la loro azione su tutta la superficie del solido in modo uniforme e precisamente della temperatura ambientale (r. s. diffusa).

Dall'analisi algebrica sappiamo che fra tutti i poligoni isoperimetri quelli che hanno maggiore superficie sono i regolari. Perciò tra i triangoli l'equilatero, tra i quadrilateri il quadrato, ecc. Poi sappiamo che fra tutti i poligoni regolari isoperimetri (che rappresentano i minimi della loro specie) quello di maggiore numero di lati ha maggiore superficie e che il cerchio ne rappresenta il limite. La differenza tra il perimetro del quadrato e la circonferenza del cerchio isoarea è del 12.5 %.

Da ciò consegue che il cilindro retto avente per direttrice il cerchio ha minore quota di superficie laterale del prisma retto di uguale altezza avente per direttrice un poligono regolare isoarea – e tra questi quello a base triangolare ha quota maggiore. Dall'analisi algebrica si ha che tra i parallelepipedi rettangoli di uguale volume quello che ha minore superficie è il *cubo.* Se noi procediamo nell'analisi per altri poliedri regolari, di uguale volume, notiamo che a maggior numero di facce corrisponde minore superficie e che la sfera segna il limite di questi minimi.

Infatti se confrontiamo a parità di volume i coefficienti d'influenza ambientale del tetraedro con il cubo troviamo che il loro rapporto è di 1,27 mentre con la sfera sale a 1,5 ÷.

Perciò, sempre rimanendo tra i solidi regolari di minore superficie di ogni categoria, per realizzare la maggiore difesa dalla temperatura ambientale sono da preferirsi le forme sferiche, cilindriche, prismatiche a molte facce.

Si dirà che nella pratica, tali forme regolari dei solidi non si hanno in quanto essi poggiando per lo meno con una faccia, la superficie soggetta alla influenza atmosferica deve essere ridotta nel conteggio, cioè nel tetraedro di 1/4, nel cubo di 1/6 è così via; conseguentemente vanno ridotti i coefficienti d'influenza ambientale.

La semisfera invece poggiando con la sua sezione piana e dimezzandosi ad un tempo volume e superficie, il coefficiente di influenza ambientale rimane lo stesso.

Da conteggi fatti, la diminuzione di una faccia nei poliedri non annulla le differenze già dette tra i coefficienti d'influenza ambientale. Infatti il rapporto tra il tetraedro a tre facce esterne e il cubo a cinque facce è di 1,27. Il rapporto tra il detto cubo e la semisfera con la sola superficie curva soggetta all'influenza ambientale è di circa 1.30.

Come vedesi la forma dei solidi costituisce un altro mezzo semplice, e duraturo per realizzare un'importante difesa dagli eccessi dalla temperatura ambientale. Ciò spiega il persistere nell'Oriente dall'antichità ad oggi delle coperture voltate, cilindriche e sferiche, così pure spiega il persistere nella zona circumequatoriale delle abitazioni indigene a pianta circolare.

5. Quali vantaggi può offrire la forma, per regolare a necessità l'azione degli agenti climatici esercitantesi solo su una parte della superficie del solido?

Si tratta, come è stato già accennato, dell'insolazione e dei venti. Problema che ha aspetti e finalità diverse a seconda dei luoghi e della stagione. Infatti nei paesi freddi settentrionali occorre captare Sole e calore tutto l'anno, mentre nella zona temperata meridionale tale necessità è limitata alla stagione invernale ed in estate occorre ridurre l'eccesso. Nella zona intertropicale la difesa dalla pletora solare va fatta si può dire quasi tutto l'anno.

Problemi particolari, squisitamente locali, che con la loro soluzione matematica possono definire con sicurezza forme ed orientamento delle stesse.

I risultati che si ottengono da tali calcoli sono spesso sorprendenti, perchè impensati e per la loro importanza.

Fisica. — *Sulla distribuzione di densità negli sciami estesi.* Nota di M. Della Corte, presentata (*) dal Corrisp. L. Tieri.

Recentemente Cocconi (1) ha dimostrato sperimentalmente che gli sciami estesi sia al livello del mare che a m. 2200 di altezza obbediscono ad una legge di distribuzione della densità della forma:

$$(1) \qquad \nu(\Delta)\, d\Delta = K \Delta^{-\gamma}\, d\Delta .$$

Da questa espressione si può calcolare il numero N_n di coincidenze registrate con un dispositivo qualsiasi nell'ipotesi che la superficie coperta dal sistema di contatori sia piccola in confronto all'estensione dello sciame. Indicando con $P_n(\Delta, \sigma)$ la probabilità che il dispositivo dia una coincidenza di ordine n per uno sciame di densità Δ essendo σ la superficie efficace di un contatore, avremo:

$$N_n = K \int_0^\infty \Delta^{-\gamma} P_n(\Delta, \sigma)\, d\Delta$$

e ponendo $\Delta\sigma = x$

$$(2) \qquad N_n = K \sigma^{\gamma-1} \int_0^\infty x^{-\gamma} P_n(x)\, dx .$$

Dalla misura di N_n e dal confronto dei valori ottenuti con contatori di diversa superficie, Cocconi ha stabilito la validità della (1) ed ha determinato i valori numerici di γ e di K.

L'espressione (1) può essere giustificata anche sulla base della teoria della motiplicazione a cascata come ha dimostrato Cocconi applicando i

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(1) G. Cocconi, « Phys. Rev. », 70, 841, 846 (1946).

risultati di un calcolo di Molière [2]. Nel confronto fra teoria ed esperienza, mentre si trova un ottimo accordo per γ si osserva che il valore di K sperimentale è maggiore di quello teorico per un fattore 1, 7 il che sarebbe dovuto, secondo Cocconi, alle approssimazioni introdotte nel calcolo.

Abbiamo ritenuto interessante eseguire alcune misure per vedere se la differenza fra i valori sperimentale e teorico della costante K non sia da attribuirsi, almeno in parte, ad una struttura dello sciame diversa da quella ammessa da Cocconi.

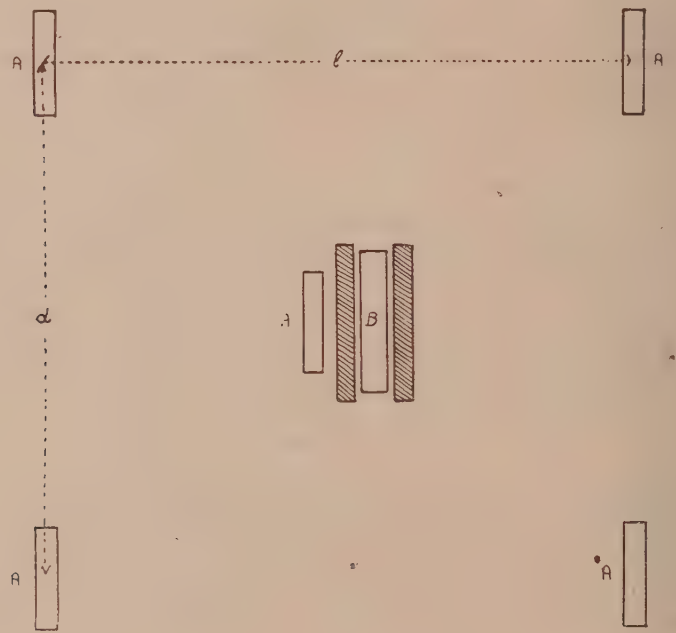


Fig. 1.

A questo scopo sono state misurate con un dispositivo di coincidenze multiple controllate le coincidenze di ordine $n = 3 \cdots 6$ fra tutte le combinazioni possibili di 5 contatori A e il contatore B disposti come in figura 1, nonchè le coincidenze doppie fra il contatore B ed uno qualsiasi dei contatori A posti ai vertici del rettangolo. Le misure sono state eseguite per diversi valori delle distanze l e d in una capanna di legno situata in un'ampia terrazza sul tetto dell'Istituto di Fisica di Arcetri, collocando i contatori immediatamente sotto il tetto di legno della capanna stessa. Lo spessore di tale tetto era di circa 3 gr/cm^2.

I contatori, del tipo ad argon ed alcool con parete di ottone di mm. 0,5 avevano una superficie efficace di m^2 0,0072. Il contatore B, dello stesso tipo, aveva una superficie efficace di m^2 0,015 ed era protetto lateralmente

(2) G. MOLIÈRE, *Heisenberg–Vorträge über Kosmische Strahlung*. Berlin 1943, p. 24.

da cm. 5 di piombo per diminuire il numero delle coincidenze fra esso ed il contatore vicino dovute ad una particella unica avente direzione molto inclinata. La registrazione era simile a quella usata in un precedente lavoro (3). Le coincidenze doppie fra il contatore B ed uno qualsiasi dei contatori A venivano normalizzate in ampiezza e quindi inviate al sistema di condensatori accoppiati dove gli impulsi contemporanei venivano sommati. Opportunamente amplificati gli impulsi erano registrati fotograficamente. Questo sistema di registrazione ha permesso di ottenere in un tempo relativamente breve dei risultati attendibili malgrado lo scarso numero di sciami presenti al livello del mare e la piccola superficie dei contatori adoperati.

Oltre ai normali controlli è stato spesso verificato il buon funzionamento del dispositivo collocando tutti i contatori in un piano verticale e misurando le ampiezze degli impulsi dovuti alle coincidenze doppie, triple, quadruple, quintuple e sestuple che si possono realizzare fra B e tutti gli altri contatori. In questo modo è stata possibile una verifica della linearità nella sommazione, amplificazione e registrazione degli impulsi.

I risultati ottenuti corretti per le casuali e per il rendimento dei contatori sono indicati in tabella.

coinc.	$l = 50$ cm. $d = 50$ cm.			$l = 105$ cm. $d = 64$ cm.			$l = 247$ cm. $d = 180$ cm.		
	c/min $\times 10^2$	r (cm.)	K	c/min $\times 10^2$	r (cm.)	K	c/min $\times 10^2$	r (cm.)	K
II	58,8 $\pm$ 1,4	25	130,–	33,9 $\pm$ 0,75	50	75	12,2 $\pm$ 0,5	150	27,–
III	6,15 $\pm$ 0,36	35	57,5	4,44 $\pm$ 0,23	70	37	3,4 $\pm$ 0,27	160	28,5
IV	2,04 $\pm$ 0,2	35	37,2	1,47 $\pm$ 0,15	90	27,7	1,47 $\pm$ 0,18	180	27,6
V	0,675 $\pm$ 0,1	70	23,–	0,422 $\pm$ 0,08	130	14,5	0,64 $\pm$ 0,12	310	22,–
VI	0,515 $\pm$ 0,1	70	20,8	0,31 $\pm$ 0,07	130	12,5	0,39 $\pm$ 0,09	310	16,–

La probabilità $P_n(\Delta, \sigma)$ può essere calcolata nell'ipotesi che le particelle dello sciame siano distribuite uniformemente sulla superficie coperta dal dispositivo. In generale se uno sciame di densità Δ cade su un sistema di k contatori, la probabilità di avere una coincidenza di ordine n è data da:

$$P_n(K, \Delta, \sigma) = \binom{K}{n} e^{-\Delta\sigma(K-n)} (1 - e^{-\Delta\sigma})^n .$$

Nel nostro caso, poichè il contatore B ha una superficie efficace σ' diversa dalla superficie σ dei contatori A la probabilità di una coincidenza sarà data da:

$$P_n(\Delta, \sigma) = \binom{5}{n-1} e^{-\Delta\sigma(5-n+1)} (1 - e^{-\Delta\sigma})^{n-1} (1 - e^{-\Delta\sigma\alpha})$$

dove con α abbiamo indicato il rapporto σ'/σ.

(3) M. Della Corte, « Rend. Acc. Lincei », VII, vol. I, 974 (1946).

Nota l'espressione di $P_n(\Delta, \sigma)$ abbiamo calcolato graficamente il valore dell'integrale che compare nella (2) per i diversi ordini di coincidenze assumendo per γ il valore 2,46 ottenuto sperimentalmente da Cocconi e confermato anche da un calcolo eseguito su alcuni dati di Clay [4].

Confrontando la (2) con l'esperienza abbiamo ottenuto i valori di K per i vari ordini di coincidenze e per i diversi valori di l e d. I risultati sono indicati in tabella.

È evidente che i valori di K sono notevolmente diversi fra loro e decrescono regolarmente al crescere dell'ordine di coincidenza e per coincidenze dello stesso ordine decrescono al crescere della distanza fra i contatori. Questo andamento può essere interpretato o ammettendo l'esistenza di un effetto di associazione fra le particelle dello sciame o supponendo l'esistenza di sciami di piccola estensione che, coprendo parzialmente il dispositivo di contatori, dànno un eccesso di coincidenze di ordine meno elevato. La prima ipotesi sembra da scartare in seguito alle recenti esperienze di Cocconi e Festa [5] e di Mura Salvini e Tagliaferri [6] che dimostrano l'assenza di fenomeni di addensamento fra le particelle degli sciami estesi. Ammettendo la seconda ipotesi, perchè la (1) rappresenti lo spettro di densità della totalità degli sciami è necessario assumere K funzione della grandezza r che rappresenta il diametro minimo dello sciame capace di dare una coincidenza.

Per chiarire questo punto abbiamo calcolato i valori di $K(r)$ per tutte le esperienze a noi note eseguite al livello del mare [7] ed il risultato è stato riportato in fig. 2.

Come si vede, malgrado si considerino esperienze eseguite in condizioni molto diverse [8] con contatori di superficie efficace compresa fra 0,0027 m² e 0,18 m² e coincidenze di ogni ordine fra le doppie e le sestuple, i valori di K presentano un andamento abbastanza regolare esprimibile, per r compreso fra 1 e 40 m. con

$$K(r) = \alpha r^{-\beta}$$

dove $\alpha = 23$ e $\beta = 0{,}5$.

(4) J. Clay, « Physica », IX, 897 (1942).

(5) G. Cocconi e C. Festa, « Nuovo C m. », III, 297 (1946).

(6) A. Mura, G. Salvini, G. Tagliaferri, « Nuovo Cim. », IV, 102 (1947).

(7) P. Auger, « C. R. », *206*, 1721 (1938); Daudin e Freon, «C. R. », *214*, 663 (1942); Geiger e Stubbe, «Abh. Preuss. Akad.», *10* (1941); Kolhöster, «Natw.», *26*, 576 (1938); Cocconi, « Phys. Rev. », *70*, 846 (1946); Cocconi e Festa, « Nuov. Cim. », *III*, *293*, 297 (1946).

(8) Alcune delle misure considerate sono sicuramente alterate dall'effetto Cosyns del quale è assai difficile una valutazione quantitativa. È però significativo che anche nelle misure di Geiger e Stubbe, ove tale effetto è sicuramente presente, i valori di K presentino un andamento regolare in funzione di r. Nella fig. 3 sono riportati anche i valori ottenuti dalle nostre misure ammettendo che tutte le coincidenze di ordine n siano dovute a sciami aventi il diametro minimo necessario a produrle. Questo rappresenta solo una prima approssimazione che spiega l'andamento irregolare dei nostri valori.

È interessante osservare che una dipendenza di K da r della stessa forma di quella osservata al livello del mare esiste anche a 2900 metri come dimostrano le misure di Auger Maze e Robley [9].

L'esistenza di sciami di piccola estensione, che già è stata ammessa da Rogozinski per spiegare i risultati delle sue esperienze sulla presenza di mesoni

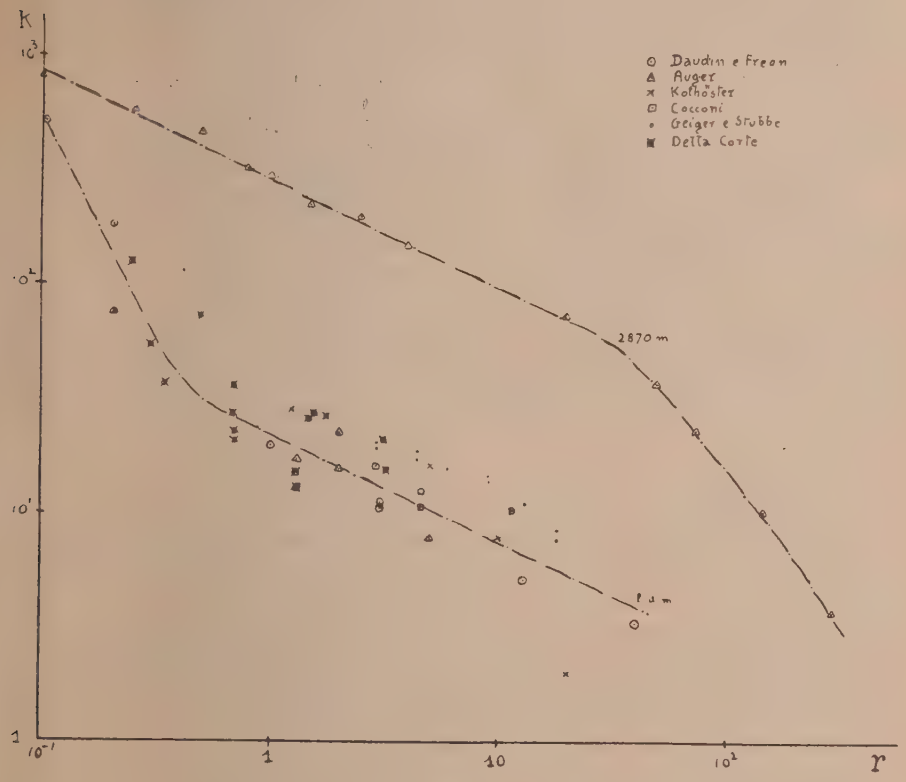


Fig. 2.

nei grandi sciami, è probabilmente da mettere in relazione con quella parte della componente molle che nella bassa atmosfera non è in equilibrio con la componente mesonica [10].

Circa l'origine di questi sciami di piccola estensione essi potrebbero rappresentare i residui di sciami molto estesi assorbiti nelle loro parti periferiche nel passaggio attraverso l'atmosfera. In questo caso però non si comprende facilmente la stretta analogia fra l'andamento della $K(r)$ al l.d.m. e a m. 2900.

(9) P. Auger, R. Maze, J. Robley, «C. R.», *208*, 1641 (1939).

(10) G. Bernardini, B. N. Cacciapuoti, B. Querzoli, «Nuov. Cim.», III, 349 (1946).

Inoltre il coefficiente barometrico presentato dagli sciami estesi è, per contatori distanti 3 metri, circa la metà di quello misurato per una distanza di 13 metri, il che non si spiega, con l'ipotesi precedente [11]. Sembra invece più plausibile ammettere per questi sciami di piccola estensione una origine diversa da quella dei grandi sciami.

Ringrazio il prof. L. Tieri per il costante interessamento alla presente ricerca e la dott.ssa Bruna Rosà per l'aiuto prestatomi nella messa a punto della registrazione e nell'esecuzione delle misure.

Chimica. — *Sull'attività batteriostatica del 2-mercaptobenzotiazolo e di alcuni suoi derivati* [*]. Nota di E. Del Pianto e A. Ballio, presentata [**] dal Socio G. Bargellini.

Il 2-mercapto-benzotiazolo è un composto organico dotato di molteplici interessanti proprietà, per alcune delle quali ha trovato importanti applicazioni nell'industria. Infatti, oltre ad essere un ottimo accelerante della vulcanizzazione, esso possiede attività insetticide, antifungine ed antibatteriche.

Numerosi sono i brevetti che proteggono l'impiego, come insetticida, di questo composto e di alcuni suoi derivati [1].

Le proprietà antifungine del 2-mercapto-benzotiazolo, che sono note già da molti anni, potrebbero essere sfruttate in pratica sia nella concia dei semi [2], sia contro le muffe della gomma [3] e del cuoio [4].

Tali proprietà hanno formato oggetto di studio da parte di Everitt e Sullivan [5] su alcuni *Fusarium*, *Aspergillus* e *Penicillium*, di Mayer [6] su vari ceppi di miceti patogeni e saprofiti, e, più recentemente, da parte di

(11) P. Auger, J. Daudin, « Phys. Rev. », *61*, 91 (1947).

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica dell'Istituto Chimico della Università di Roma, Centro di Chimica Generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) Grasselli Chemical Co.: Brev. australiano 8210-1932 (« Chem. Zentr. », 1934, I, 2818); Monsanto Chemical Co.: Brev. U. S. A. 2077960 (« Chem. Zentr. », 1937, II, 655); Imperial Chemical Industries Ltd.: Brev. inglese 500197 (« Chem. Zentr. », 1939, II, 1159); Brev. inglese 507221 (« Chem. Zentr. », 1940, I. 1554); Brev. francese 840003 (« Chem. Zentr. », 1939, II, 1559); Brev. francese 847360 (« Chem. Zentr. », 1940, I, 2846).

(2) Grasselli Chemical Co. Brev. inglese 407708 (« Chem. Zentr. », 1934, II, 831); I. G. Farbenindustrie Akt.-Ges.: Brev. inglese 329987 (« Chem. Zentr. », 1930, II, 1760).

(3) A. E. Dimond e J. G. Horsfall, « Science », *97*, 144 (1943).

(4) R. M. Lollar, « J. Am. Leather Chem. Ass. », *39*, 179, 203 (1944) (« Chem. Abstr. », *38*, 4827, 6594 (1944)).

(5) E. L. Everitt e M. X. Sullivan; « J. Washington Acad. Sci. », *30*, 125 (1940); (« Chem. Zentr. », 1940, II, 2808).

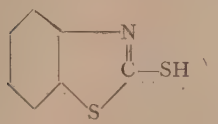
(6) R. L. Mayer, « Rev. Médicale France », nov.-dic. 1941, 3 (« Chem. Abstr. », *36*, 5199 (1942)).

Davies e Sexton [7], nei confronti del *Fusarium graminearum* e del *Penicillium digitatum*.

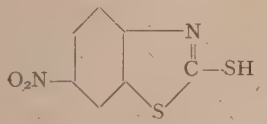
Riguardo all'attività antibatterica esistono in letteratura soltanto pochi lavori di carattere generale, giacchè il 2–mercapto–benzotiazolo è stato sempre studiato parallelamente ad altri composti solforati: l'Everitt e il Sullivan [8] osservarono che esso è uno dei più attivi tra cinquanta composti sperimentati su vari ceppi di streptococchi, stafilococchi, pneumococchi, e nei confronti dell'*E. coli*, del *B. haemoliticus*, del *M. tuberculosis* umano ed aviario.

Dati l'interesse pratico e la particolare struttura di questo composto, ci è sembrato che esso meritasse (sulla scorta degli studi recenti sul meccanismo d'azione delle sostanze antibatteriche) uno studio più approfondito e sistematico, esteso anche ad alcuni suoi derivati.

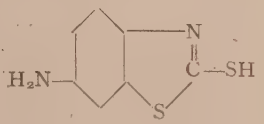
In questa Nota preliminare riassumiamo i primi risultati sperimentali riguardanti l'attività batteriostatica verso lo Stafilococco aureo del 2–mercapto–benzotiazolo (I), del 6–nitro–2–mercaptobenzotiazolo (II) e del 6–ammino–2–mercapto–benzotiazolo (III) [9].



I



II



III

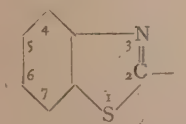
Il 6–nitro– e il 6–ammino–2–mercapto–benzotiazolo sono stati da noi preparati dal 2–mercapto–benzotiazolo, secondo il metodo descritto da Teppema e Sebrell [10]: dopo purificazione, fondevano rispettivamente a 255–257° e 260°.

Abbiamo eseguito le determinazioni del potere batteriostatico dei composti col metodo delle diluizioni, usando un terreno di coltura a pH 7 contenente i comuni sali, l'1 % di estratto carneo standardizzato per batteriologia (Acas) e l'1 % di peptone. Il terreno è identico a quello usato in precedenti lavori [11] ai quali rinviamo per i dettagli di tecnica.

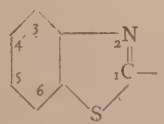
(7) W. H. Davies e W. A. Sexton, « Biochem. J. », *40*, 331 (1946).

(8) E. L. Everitt e M. X. Sullivan, « J. Washington Acad. Sci. », *30*, 457, (1940); («Chem. Zentr. », 1941, II, 1992).

(9) La numerazione da noi seguìta è quella proposta da M. T. Bogert e E. M. Abrahamson (« J. Am. Chem. Soc. », *44*, 826, (1922)), adottata da tempo dai « Chemical Abstracts » e dal «Chemisches Zentralblatt» (IV). Per maggiore chiarezza riportiamo anche l'altra numerazione, talvolta ancora usata (V):



IV



V

(10) J. Teppema e L. B. Sebrell, « J. Am. Chem. Soc. », *49*, 1779 (1927).

(11) G. B. Marini–Bettòlo e E. Del Pianto, « Pont. Acad. Sc. Comm. », *10*, 87 (1946); ibidem, *11*, 33 (1947).

Le concentrazioni alle quali si ha inibizione completa dello sviluppo dello Stafilococco aureo sono: per il 2–mercato–benzotiazolo gr. $0{,}28 \cdot 10^{-4}$ per cc., per il 6–nitro–2–mercapto–benzotiazolo gr. $0{,}25 \cdot 10^{-4}$ per cc., per il 6–ammino–2–mercapto–benzotiazolo gr. $0{,}18 \cdot 10^{-4}$ per cc.

I gradi di attività di questi composti sono dunque molto vicini tra loro, tanto più se si considera che le oscillazioni rispetto alle concentrazioni riportate (che rappresentano le medie calcolate in base a numerose esperienze eseguite su tre ceppi differenti) sono dell'ordine di $\pm$ 17 %.

Dato che lo spettro nell'ultravioletto [12] e il momento dipolare [13] del 2–mercapto–benzotiazolo e di alcuni suoi derivati portano ad ammettere l'esistenza di un equilibrio tra forma mercaptanica (I) e forma immidica (II),

I II

abbiamo voluto vedere se un composto per il quale non sia pensabile un simile equilibrio fosse anch'esso attivo. A tale scopo abbiamo preparato, secondo il metodo di Seide e Galanow [14], il benzoil–derivato del 2–mercapto–benzotiazolo (benzoil–2–benzotiazolil–solfuro), che è risultato inattivo anche alla concentrazione di gr. $0{,}3 \cdot 10^{-4}$ per cc.

Degno di nota è il comportamento del 6–nitro–2–mercapto–benzotiazolo, il quale esercita la sua attività in modo diverso dagli altri composti. Mentre, infatti, alle concentrazioni inferiori a quelle inibenti, lo sviluppo del batterio è notevolmente ritardato dal 6–nitro–2–mercapto–benzotiazolo, lo è molto poco dal 2–mercapto–benzotiazolo e dall'ammino–derivato.

Questo comportamento è illustrato dal diagramma seguente, nel quale sono riportati i tempi di inizio dello sviluppo a diffenti concentrazioni.

Un secondo fatto interessante è emerso dallo studio del comportamento dell'attività batteriostatica dei tre composti quando si aggiunga cisteina o acido ascorbico al terreno di coltura.

Come è noto, in presenza di cisteina alcune sostanze, quali la piocianina, la penicillina, la clavacina, ecc., perdono molta della loro attività [15]. Analogo feromeno è stato riscontrato per il fenantrenchinone il quale viene inattivato pure dalla presenza di acido ascorbico [16].

Nelle nostre esperienze abbiamo osservato che, per concentrazioni di gr. $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ per cc. di cisteina o acido ascorbico, l'attività del 6–ammino–

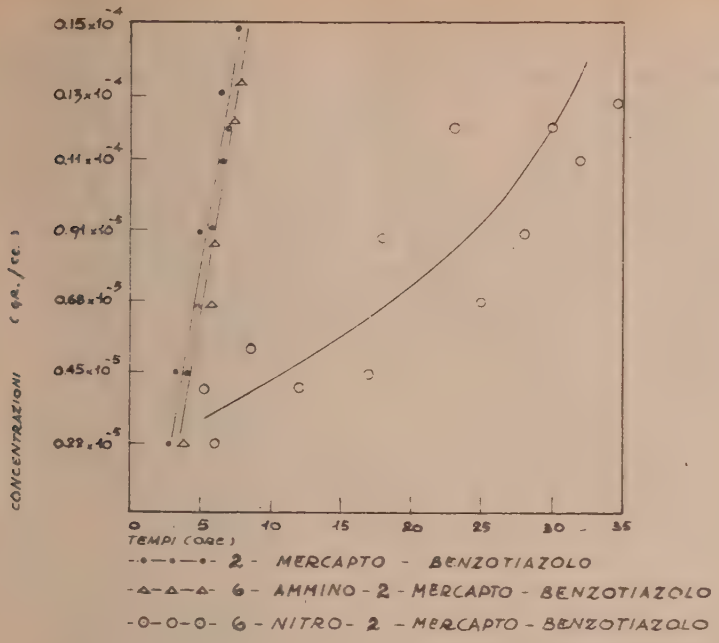
(12) R. A. Morton e A. L. Stubbs, « J. Chem. Soc. », 1939, 1321.

(13) P. F. Oesper, G. L. Lewis e C. P. Smyth, « J. Am. Chem. Soc. », *64*, 1130 (1942).

(14) O. Seide e A. Galanow, « Shurnal Resinowoi Promyshlennosti », 1936, 554 (« Chem. Zentr. », 1936, II, 3367).

(15) C. J. Cavallito, J. H. Bailey, T. H. Haskell e W. F. Warner, « Bacter. Rew. », *9*, 62 (1945).

(16) E. Del Pianto e G. B. Marini–Bettòlo, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, (1), 783 (1946).



2–mercapto–benzotiazolo viene diminuita fortemente, quella del 2–mercapto–benzotiazolo diminuita debolmente, mentre un comportamento anomalo si manifesta col 6–nitro–2–mercapto–benzotiazolo, la cui attività viene esaltata in modo notevole.

Il fenomeno riveste un certo interesse in quanto i tre composti sono molto vicini tra loro e differiscono soltanto per la presenza o il tipo di un aggruppamento; per cui pensiamo che si offra qui lo spunto per uno studio più approfondito che potrebbe chiarire la natura di tali interferenze sulle attività batteriostatiche, studio che ci proponiamo di svolgere in futuro.

Da questo primo gruppo di esperienze possiamo trarre le seguenti conclusioni:

1°) non solo il 2–mercapto–benzotiazolo, già studiato come batteriostatico, ma anche due suoi derivati – il 6–nitro–2–mercapto–benzotiazolo ed il 6–ammino–2–mercapto–benzotiazolo – sono attivi verso lo Stafilococco aureo;

2°) il 6–nitro–2–mercapto–benzotiazolo esercita l'azione batteriostatica in modo diverso dagli altri due composti, poichè ritarda assai più di questi lo sviluppo del batterio alle concentrazioni inferiori a quelle inibenti;

3°) in presenza di cisteina o acido ascorbico alla concentrazione di gr. $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ per cc. l'attività del 6–ammino–2–mercapto–benzotiazolo viene fortemente diminuita, quella del 2–mercapto–benzotiazolo debolmente diminuita, e quella del 6–nitro–2–mercapto–benzotiazolo esaltata in modo notevole.

Geologia. — *Una sabbia vulcanica oligocenica nel Subappennino bolognese*(*). Nota di R. Selli, presentata(**) dal Corrisp. M. Gortani.

Non mi è noto siano mai state trovate nell'Appennino settentrionale rocce del tipo di quella che mi accingo a descrivere. Infatti ho scoperto recentemente (1) nei dintorni di Ozzano dell'Emilia (Bologna) uno spesso strato di sabbia vulcanica liparitica compresa entro una serie oligocenica. Il ritrovamento ha, a mio modo di vedere, una notevole importanza, perchè, a parte la novità della cosa, permette di avanzare impensate e suggestive induzioni geologiche.

Le condizioni geologiche locali. – La sabbia vulcanica affiora sul versante S e SW di M. Arligo nell'alto bacino del Rio Centonara W, a 700 m. circa in linea d'aria a SW della Parrocchia di S. Andrea e a poco più di 3 km. (sempre in linea d'aria) a SW della Via Emilia nei pressi di Ozzano (Bologna).

Costituiscono l'imbasamento le argille scagliose con il normale corredo di lembi alloctoni variamente pizzicati o inglobati; fra questi prevalgono calcari e calcari marnosi di età incerta, marne grigie, biancastre, rosse di età eocenica (2) ed oligocenica, sabbioni biancastri o grigi oligocenici, ecc.

Sopra questa formazione poggia la piccola serie oligocenica di M. Arligo che si può ben studiare sul versante SW del monte messa a nudo in un pendio molto ripido talora prossimo alla verticale. Dal basso all'alto essa è così costituita:

1° Marne nerastre o color cioccolata manganesifere molto dure, talora passanti a marne grige o grigio-brune; nella parte bassa e mediana di queste vi è qualche strato di calcare marnoso, con silicizzazione diffusa e ftaniti con venuzze calcedoniose, e di arenaria; verso la parte alta si fanno sempre più frequenti le intercalazioni di marne verdastre o grigio verdi. Il complesso poggia direttamente o mediante l'interposizione di lenticelle tettonizzate di marne verdi sulle argille scagliose. Il complesso ha circa 15 m. di spessore.

2° Marne verdastre o grigio verdi molto argillose, e abbastanza tenere; a queste si alternano strati di marne manganesifere identiche alle precedenti di circa mezzo metro di spessore. Evidente, anche se non molto graduale, il passaggio al livello precedente. Potenza complessiva m. 11 circa.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Universitá di Bologna.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1948.

(1) Per essere più esatti vari anni fa il sig. Luigi Fantini, giá tanto benemerito per la Geologia bolognese mi portò un campione di questa sabbia; allora non vi diedi importanza, essendo risultato privo di microfauna. Solo recentemente in occasione di un rilevamento di dettaglio della zona ritrovai il giacimento e con lo studio in laboratorio del materiale pervenni alla scoperta odierna.

(2) R. Selli, «Giorn. Geol.», XVII, pp. 33-91, 1944.

3° Sabbia vulcanica di color bianco o lievemente grigiastro debolissimamente cementata. Sotto vi sono 5–6 cm. di marna verde e più sotto 40 cm. di marne manganesifere, poi 2 m. circa di marne verdi (tutte del livello precedente). Lo strato di sabbia ha limiti molto netti rispetto alle rocce che lo includono e m. 1,50 circa di spessore.

4° Marne verdi come quelle del livello 2, con sopra un sottile strato di marne manganesifere; spessore m. 1,50 circa.

5° Marne biancastre o lievemente verdognole tenere, interposte a marne grigie più resistenti o calcari marnosi con spalmature manganesifere e a frattura poliedrica, con in qualche punto venuzze calcedoniose. Lo spessore non è misurabile ma supera certamente i 10 m.

Tutto il complesso oligocenico ha circa 50 m. di spessore, appare continuo e inclina di circa 45° in media verso N; frequenti sono minimi contorcimenti e disturbi di scarsissimo rilievo.

Sopra l'oligocene giace trasgressivo l'elveziano con marne bianche a facies di Schlier. Il contatto non è visibile localmente ma è nettissimo e talora con una tipica breccia trasgressiva sul fianco opposto della valle del Rio Centonara W.

Il contatto argille scagliose–oligocene è stato fortemente disturbato da dislocazioni tettoniche. Infatti la pila di strati oligocenici appare in parte sprofondata entro le argille scagliose e verso E, sempre a M. Arligo, appare gradualmente sormontata da queste, che finiscono col venire a contatto diretto con l'elveziano sovrastante.

Dai livelli 4 e 5 ho isolato ricche microfaune, che indicano un Oligocene inferiore. Un rapido esame mi ha permesso di riconoscere le specie seguenti [3]:

Vulvulina haeringensis (Gümb.)
Clavulinoides eucarinatus Cush. et Ber.
Karreriella chilostoma (Reuss)
Karreriella calva Cush.
Karreriella hantkeniana Cush.
Martinottiella petrosa Cush. et. Ber.
Spiroloculina canaliculata d'Orb.
Robulus inornatus (d'Orb.)
Robulus limbosus (Reuss)
Cristellaria aff. *budensis* Hantk.
Saracenaria arcuata (d'Orb.)
Vaginulina legumen (L.)
Dentalina leguminiformis (Batsch)
Nodosaria obliquestriata Reuss
Nodosaria boffalorae Martin.
Frondicularia tenuissima Hantk.
Glandulina laevigata d'Orb.
Plectofrondicularia spinifera Cush. et Jar.
Bolivina nobilis Hantk.
Cassidulina subglobosa Brady.
Uvigerina farinosa Hantk.
Uvigerina aff. *cookei* Cush.
Siphonodosaria verneuili (d'Orb.)
Siphonodosaria elegans (d'Orb.)
Siphonodosaria soluta (Reuss)
Siphonodosaria adolphina (d'Orb.)
Pleurostomella acuta Hantk.
Ellipsonodosaria subnodosa (Guppy)

(3) Non tengo distinte le microfaune data la loro estrema analogia. Le differenze si riferiscono solo a una diversa frequenza di alcune specie e hanno perciò solo importanza per la stratigrafia di dettaglio.

Ellipsonodosaria vasarhelyi (Hantk.) *Anomalina granosa* Han tk.
Ellipsoglandulina labiata (Schw.) *Siphonina tenuicarinata* Cush.
Pullenia quinqueloba (Reuss) *Gyroidina girardana* (Reuss)

L'elenco, pur essendo assai largamente incompleto e limitato alle specie più notevoli, definisce bene l'età eooligocenica e la facies batiale delle rocce. Perfettamente analoghe alle precedenti contenendo tutte le più significative tra le specie sopra elencate, sono le microfaune del livello 2, soprattutto una isolata da marne al tetto di questo. Invece assolutamente priva di Foraminiferi mi è risultata la sabbia vulcanica; vi ho rinvenuto solo come estrema rarità qualche Radiolario.

Da quello esposto si può concludere: la sabbia vulcanica è dell'Oligocene inferiore, si è sedimentata in un ambiente marino batiale (confermato anche dai frequenti orizzonti manganesiferi) e rappresenta un rapido e subitaneo deposito (come dimostrano i suoi contatti, la sua composizione e le microfaune delle rocce a contatto) anomalo rispetto alla serie marnosa continua e abbastanza uniforme che la include.

I CARATTERI DELLA SABBIA VULCANICA. – Essi evidentemente servono anche a dimostrare la natura di questa sabbia.

Tre sono gli affioramenti e i due più lontani distano fra loro 150 m. circa; in quello meglio studiabile, dove la roccia in istudio e quelle a contatto sono messe completamente a nudo, la sabbia vulcanica ha circa m. 1,50 di spessore. Nei 50 cm. inferiori è di color grigio molto chiaro, nel metro sovrastante invece è bianco–latte; la leggera differenza di colore è forse in relazione, con un diverso contenuto di argilla. La sabbia ha una certa consistenza tanto che si isola in blocchi e si può definire come una molassa a debolissimo grado di cementazione; si sfarina infatti strofinandola anche leggermente. Qua e là vi sono vene calcitiche dovute alla circolazione dell'acqua entro fratture minute. Già al tatto questa sabbia vulcanica appare a grana molto fine.

Molto interessanti e tipici sono i caratteri microscopici. I granuli per la grande maggioranza hanno aspetto vetroso; sono trasparenti, a spigoli vivi e taglienti, con angoli acuti e per lo più appiattiti e laminari; una buona percentuale di essi presenta fibrosità e striature fra loro parallele e bollosità talora di notevoli dimensioni rispetto alla grandezza dei granuli; questi sono tutti caratteri tipici e distintivi delle sabbie vulcaniche. Spesso sui granuli aderiscono particelle limonitiche di origine diagenetica; molto probabilmente si deve ad esse il contenuto relativamente alto di ossidi di Fe rivelato dall'analisi chimica. A luce polarizzata questi granuli sono monorifrangenti. Qua e là vi sono anche frammenti cristallini birifrangenti che in maggioranza sono di quarzo; rari i feldspati e i minerali femici (biotite, orneblenda); la percentuale della porzione cristallina non supera in media il 2 % dei granuli presenti ed è ad esempio inferiore a quella della pomice di Lipari macinata.

Ho determinato la composizione granulometrica della sabbia vulcanica usando molta cautela nello sgretolamento, onde evitare la rottura dei granuli più fragili, e mediante setacciatura, levigatore Andrews e sedimentazione a seconda delle dimensioni delle particelle. Ecco il risultato:

$>$ 0,50	mm.	0,00
0,50–0,30	mm.	0,09
0,30–0,23	mm.	6,12
0,23–0,15	mm.	8,80
0,15–0,06	mm.	9,15
0,06–0,02	mm.	45,26
0,02–0,002	mm.	28,28
$<$ 0,002	mm.	2,30.

L'analisi granulometrica è interessante perchè si presta a varie considerazioni. Non esistono granuli superiori a mm. 0,5 di dimensioni; (le dimensioni maggiori misurate sono 0,48-0,49 mm. Circa il 74% dei granuli è compreso fra mm. 0,06 e 0,002 e quasi tutti questi sono di natura vulcanica. Minimo è il contenuto argilloso (2,30 %). Il limo è ancora in gran parte costituito da granuli di origine vulcanica. In conclusione la porzione più fina, che rappresenta il materiale di normale deposito sul fondo dell'antico mare oligocenico, è assai scarsa (non credo che superi il 7–8 % del totale); la sua percentuale bassa rispetto alla composizione complessiva della roccia, dimostra la notevole rapidità di sedimentazione della sabbia vulcanica.

Il $CaCO_3$ presente nella roccia è in media di circa 1,50 %. Il materiale che accompagna e cementa assai debolmente i granuli di natura eruttiva è perciò una argilla marnosa.

Sulla frazione vetrosa, che avevo isolato con ogni cura (mediante lavaggi ripetuti, trattamento con HCl diluito, separazione con liquidi pesanti e al microscopio), il dott. F. Bovelacci mi ha gentilmente eseguita l'analisi chimica.

SiO_2	72,13
TiO_2	tracce
Al_2O_3	11,41
Fe_2O_3	3,67
FeO	
MgO	tracce
CaO	1,97
K_2O	2,34
Na_2O	1,53
H_2O^+	6,31

Da questi dati ho calcolato le seguenti formule del Niggli: si 492, al 46, fm 18,8, c 14,4, alc 20,8, k 0,49 , mg 0 , qz + 309. Così l'analisi come questi valori mostrano che si tratta di una forma litologica che non è possibile paragonare ad alcuno dei tipi magmatici del Niggli; l'aver trascurato

la porzione cristallina della sabbia, (che come ho detto è solo del 2 %), non credo abbia influito notevolmente. Penso piuttosto che ciò dipenda dal tipo particolarissimo di roccia, che, per il suo modo di formazione, non può certo rispecchiare fedelmente il magma primitivo; si confronti infatti questa con le numerose analisi di sabbie vulcaniche nordamericane riportate da Eardley–Wilmot (4), le quali hanno spesso composizione chimica anche più anomala di quella della mia roccia.

Notevolissima è l'abbondanza in SiO_2 (rispecchiata anche dalla assoluta predominanza di quarzo fra gli individui cristallini); piuttosto alto il contenuto in ossidi di Fe; molto bassa è invece la percentuale degli alcali. Quest'utltimo fatto può essere forse in relazione con la deposizione in ambiente marino. Spiccato è il carattere potassico.

Si può quindi dire che tutti i caratteri fisici, chimici e petrografici concordano nel dimostrare di origine vulcanica questa sabbia, che notevole è il grado di cernita del materiale e che petrograficamente si tratta di un vetro liparitico persilicico.

Donde proviene la sabbia vulcanica? – Con i dati finora a disposizione non è possibile dare una risposta esauriente a questa domanda; è però opportuno chiarire alcuni fatti.

La sabbia è stata trasportata dal vento su un mare aperto e profondo dove si è depositata, la sua composizione granulometrica e la sua interposizione fra marne talora manganesifere lo dimostrano chiaramente, ed escludono che correnti marine possano aver avuto un effetto importante trasportandola in sospensione o per flottazione. La sedimentazione di questo materiale è stata inoltre molto rapida ed è avvenuta in un unico lasso di tempo molto breve; lo confermano la enorme scarsezza della frazione argilloso–marnosa, che rappresenta il normale prodotto della sedimentazione marina locale, i bruschi passaggi rispetto alle rocce a contatto, l'assenza di microfauna e vari altri fatti già esposti. Tutti questi argomenti escludono d'altra parte che il vento o le acque continentali e marine abbiano asportata la sabbia da depositi tufacei sciolti terrestri preesistenti, rideponendola entro il mare profondo oligocenico.

Perciò l'alimento immediato e quasi esclusivo a questo sedimento è stato fornito da una o più possenti esplosioni vulcaniche, succedutesi in un tempo breve. Molto probabilmente poi, almeno a giudicare dai fatti locali noti, l'attività del centro eruttivo dopo il parossismo deve essersi estinta o enormemente ridotta.

Molto interessante sarebbe poter ubicare questo centro eruttivo; ciò non è certo possibile ora con la conoscenza di un solo affioramento; lo sarà forse in seguito, quando accurate ricerche avranno portato alla scoperta di altri depositi analoghi. Per abbozzare la soluzione di questo problema è necessaria una premessa. L'Oligocene del basso e medio Appennino bolognese è trasgressivo sulle argille scagliose e non è stato convogliato (almeno

(4) *Canada Division of Mines*, mem. n. 674, 1930.

secondo ogni apparenza) dall'eventuale ricoprimento di queste, ma è stato solo variamente rotto, smembrato in vari blocchi, pizzicato e talora inglobato dalle argille scagliose per i vari movimenti che hanno subìto queste masse plastiche. I rapporti reciproci spaziali dei vari lembi oligocenici sono perciò mutati oggi rispetto a quelli primitivi, ma non in modo così grave da rendere aleatoria una ricerca del centro eruttivo.

In tutto l'Appennino settentrionale, per quello che mi è noto, sono sconosciute manifestazioni eruttive terziarie; quelle più prossime, forse paleogeniche e con prodotti liparitici, sono quelle degli Euganei [5] e del Campigliese [6]; escluse per troppo evidenti ragioni le seconde, rimarrebbero solo le prime, come possibili fornitrici della sabbia in esame. Però se le piccole dimensioni dei granuli della roccia lasciano ammettere un trasporto a così cospicua distanza (che durante l'Oligocene doveva certamente essere superiore agli odierni 100 km. circa), il notevole spessore del banco lo esclude senz'altro. Altri fatti inoltre vi si oppongono: la limitata diffusione e potenza dei tufi liparitici degli Euganei, l'età, ecc. Si può concludere che il centro eruttivo che ha dato origine alla sabbia vulcanica ci è completamente ignoto e con ogni probabilità si trova oggi nel substrato profondo della pianura padana.

Due soli sarebbero i dati a disposizione per stabilire la primitiva distanza della bocca esplosiva dal giacimento studiato: lo spessore del banco (m. 1,50 circa) e le dimensioni dei granuli (praticamente tutti inferiori a 0,3 mm.). Uno spessore così cospicuo fa pensare a una distanza limitata, che in ogni caso, anche ammettendo fenomeni esplosivi molto intensi, non può superare i 50 km. [7]. Meno decisive sono invece le dimensioni dei granuli; infatti frammenti così minuti possono essere trasportati anche a distanze notevolissime (oltre 1000 km.) però determinando spessori esilissimi; talora si possono invece trovare in depositi omogenei e potenti perfino sulle pendici della montagna vulcanica. Troppo incompleti sono però i dati di osservazione per eruzioni recenti e d'altra parte troppo varie le modalità e i tipi di processi esplosivi per poter riuscire a dare una risposta soddisfacente al problema.

Concludendo, durante l'Oligocene inferiore si ebbero certamente delle manifestazioni vulcaniche esplosive con prodotti liparitici, che hanno determinato un deposito cospicuo almeno come spessore al margine dell'Appennino bolognese; con ogni probabilità il centro eruttivo si trovava nell'area dell'attuale pianura padana a poche decine di chilometri dal suo margine attuale meridionale.

Lo studio accurato di altri eventuali affioramenti di sabbie vulcaniche, oltre che portare un contributo ai problemi più sopra accennati, permetterà di stabilire sicure e precise correlazioni e forse di determinare approssimativamente il raccorciamento orizzontale delle unità tettoniche locali ad opera dei movimenti postoligocenici.

(5) G. SCHIAVINATO, «Mem. Ist. Geol.», Padova, XV, 1944.

(6) F. RODOLICO, «Mem. Soc. Toscana Sc. Nat.», XLI, 1931.

(7) S. R. CAPPS, «Un. St. Geol. Survey», Prof. PAP. 95-D, 1915; S. R. GRIGGS, *Das Tal der zehntausend Dämpfe*, III ed., Leipzig, 1928.

Citologia vegetale. — *Contributo al problema della agglutinazione cromosomica* («*stickiness*») *spontanea*[*]. Nota di F. D'Amato, presentata[**] dal Socio A. Chiarugi.

Il problema della agglutinazione cromosomica spontanea nei meristemi radicali è stato per la prima volta impostato dal Resende [1] in seguito alla osservazione e allo studio del fenomeno in piante di *Aloë mitriformis* var. *Commelinii* viventi in condizioni naturali e quindi non sottoposte ad alcun trattamento sperimentale. I contributi ulteriori della Scuola Citologica Portoghese e miei [2,3] hanno non solo permesso di chiarire alcuni aspetti morfologici dei cromosomi e della mitosi connessi al fenomeno della agglutinazione, ma anche reso accettabile l'idea – espressa già nel 1945 dal Resende [4] – che, a parte difficoltà di osservazione inerenti al materiale, agglutinazione cromosomica spontanea debba potersi rintracciare in tutti i vegetali.

La definizione data dal Resende [4] al termine « agglutinazione spontanea » – anche se perfettamente accettabile [5] – appare tuttavia incompleta, escludendo l'eventualità che cause intrinseche, cioè inerenti al ciclo vitale dell'organismo o di sue parti e quindi aventi ben poco o nulla a che vedere con fattori esterni, possano assurgere a notevole significato nell'induzione del fenomeno qui considerato. La presente ricerca è stata appunto intrapresa allo scopo di intravvedere i rapporti eventualmente esistenti tra fattori intrinseci e agglutinazione cromosomica spontanea.

1. Materiale e metodo. – L'agglutinazione cromosomica spontanea è stata studiata in apici radicali di *Urginea maritima* Bak., *Bellevalia romana* Sweet, *Bowiea volubilis* Harv., *Triteleia uniflora* Lindl., *Nothoscordon fragrans* Kunth, *Scilla peruviana* L., *Tricyrtis hirta* Hook., *Hermodactylus tuberosus* Mill., *Sternbergia lutea* Ker–Gawl, *Narcissus Tazetta* L. var. *Barlae* Parl., *N. Tazetta* var. *italicus* Ker–Gawl, *N. Tazetta* var. *patulus* Lois., *N. Tazetta* var. *papyraceus* Ker–Gawl, tutte piante viventi in pien'aria nell'Orto Botanico Pisano. Il materiale è stato tutto quanto preparato secondo la tecnica dello « striscio al Feulgen » [5], dopo fissazione nella miscela 2BD del La Cour

(*) Centro di Studio per la Citogenetica Vegetale del C.N.R. – Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Pisa.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(1) F. Resende, *Movimento, agglutinaçao pontes e distensao dos chromosomas na mitose*. « Bol. Socied. Brot. », XXV, 163–200 (1941).

(2) F. D'Amato, *Agglutinazione cromatica* («*stickiness*») *in* «*Allium Cepa L.*» *e altre Liliaceae*. « Atti Accad. Naz. dei Lincei », cl. di Scienze fis., ser. 8ª, vol. 3, fasc. 1–2, 135–140 (1947).

(3) F. D'Amato, *Studi sulla agglutinazione cromosomica* («*stickiness*») *in* «*Allium Cepa L.*» *e altre Monocotiledoni*. « Nuovo Giorn. Bot. Ital. », n. s., *54*, (1947).

(4) F. Resende, *Hétérochromatine*. « Portug. Acta Biol. (A) », I; n. 2, 139–173 (1945).

(5) F. D'Amato, *Osservazioni critiche su alcuni metodi d'impiego della reazione nucleale in Citologia vegetale*. « Nuovo Giorn. Bot. Ital. », n. s., LIII, 657–668 (1946).

e – per poche osservazioni speciali – in Carnoy. Per facilitare al massimo la penetrazione del fissativo, gli apici radicali più grossi sono stati intaccati con un bisturi per tutta la loro lunghezza.

2. ASPETTI GENERALI DELL'AGGLUTINAZIONE CROMOSOMICA. – Sono quelli già noti nella letteratura citologica e da me recentemente descritti in ogni particolare [3]. In tutte le specie e varietà studiate, esclusa *Tricyrtis hirta* che ha mostrato agglutinazione meno intensa, il grado di agglutinazione cromosomica è perfettamente paragonabile a quello da me messo in evidenza in piante di *Allium Cepa* dotate di scarsa vitalità e avviantisi verso la morte. L'agglutinazione, anche se spesso intensa alla meta – anafase, è generalmente limitata ai fenomeni di adesione superficiale interessanti la matrice cromosomica e solo molto di rado accompagnata da fenomeni di rotture cromosomiche e cromatidiali e conseguente formazione di veri ponti all'anafase.

Una evidente rarefazione matriciale (diminuita produzione delle sostanze costituenti la matrice cromosomica) è stata accertata nella massima parte dei materiali studiati: essa si accompagna – come già in *Allium Cepa* [3] – ad un elevato grado di agglutinazione cromosomica e si manifesta con i tipici fenomeni di messa in evidenza della struttura interna e di modificazioni della morfologia esterna dei cromosomi. Anzi spesso questi ultimi, manifestandosi sotto forma di difetti di spiralizzazione, non solo contribuiscono a rendere ancor più chiara la struttura interna cromosomica, ma anche tendono ad esaltarsi durante la trazione esercitantesi alla anafase fra cromatidi fratelli tenuti agglutinati nelle loro estremità distali.

In alcune specie, alla elevata agglutinazione cromosomica si accompagna un singolare aspetto del reticolo nucleare nei nuclei quiescenti: aspetto assai vicino a quello presentato dai nuclei di *Allium Cepa* sottoposti all'azione di agenti sperimentali, quali il freddo e la CrO_3 [3]. Il reticolo, cioè, perde la omogeneità e uniformità di struttura propria dei nuclei quiescenti nel materiale non affetto da agglutinazione per acquistare una struttura alquanto discontinua e caratterizzata dalla presenza di zone di maggiore addensamento cromatinico.

3. ASPETTI PARTICOLARI DELL'AGGLUTINAZIONE CROMOSOMICA. – In *Urginea maritima* sono stati osservati esempi di metafasi affette da assai forte fluidificazione della matrice cromosomica e ridotte a masse informi da cui solo alcuni bracci cromosomici protrudono. Inoltre, per la tendenza alla agglutinazione in estesi tratti di cromosomi lunghi, molte anafasi presentano le zone di agglutinazione intercromatidiale sotto l'aspetto di formazioni a nodo.

In *Bellevalia romana* soprattutto caratteristiche sono le distensioni del filo satellifero nella coppia cromosomica D, nelle anafasi affette da agglutinazione [6]. Assai interessanti alcuni esempi di notevole distensione della

(6) F. D'AMATO, *Contributo alla migliore conoscenza del cariogramma di «Bellevalia romana» Sweet.* «Nuovo Giorn. Bot. Ital.», n. s., LIV, in corso di stampa, 1947.

porzione kalimmatica di adesione fra estremità distali di cromatidi fratelli all'anafase.

In *Bowiea volubilis* – caratterizzata da un corredo somatico di 20 cromosomi, da aneuploidia e frammentazioni cromosomiche negli apici radicali [7] – è caratteristica l'estesa agglutinazione alla metafase fra cromosomi di piccole dimensioni, eterocromatici o prevalentemente tali. Il fenomeno è perfettamente identico a quello che interessa i frammenti eterocromatici presenti in un biotipo di *Dipcadi serotinum* studiato da Resende e Da Franca [8].

In *Triteleia uniflora* e *Nothoscordon fragrans* si sono notati alcuni esempi di rotture cromosomiche e cromatidiali con conseguente formazione di frammenti acentrici. Piuttosto frequenti anche, in ambedue le specie, i difetti di spiralizzazione risultanti in cromosomi anafasici a zone di assai diverso diametro.

In *Hermodactylus tuberosus* la rarefazione matriciale è alquanto meno accentuata che nelle altre specie studiate; la fluidificazione della matrice, invece, è piuttosto forte e risulta non di rado in metafasi ridotte ad ammassi quasi informi.

In alcune varietà di *Narcissus Tazetta* fu studiato anche materiale fissato in Carnoy allo scopo di mettere ancor meglio in evidenza la rarefazione matriciale nei cromosomi meta–anafasici. (Circa la particolare azione svolta dal Carnoy, come da tutti i fissativi alcool–acetici sulla matrice cromosomica cfr. D'Amato, [3]).

4. Discussione. – Il controllo citologico periodico eseguito su apici radicali di piante di *Allium Cepa* dotate di scarsa vitalità e progressivamente avviantisi verso la morte aveva permesso di accertare una sicura correlazione tra progressiva perdita di vitalità nella pianta e progressivo aumento nel grado di agglutinazione cromosomica [2, 3]. Una conferma alla presente osservazione è stata da me recentemente ottenuta in seguito allo studio delle conseguenze citologiche dell'etiolamento in giovani piante di *Secale cereale* e *Vicia Faba*. Si è così arrivati a chiarire il quadro dei fenomeni citologici che si accompagna alle manifestazioni macroscopiche preludenti alla morte nei vegetali e che si conchiude nell'arresto delle mitosi e nella deformazione – spesso pronunciata – dei nuclei quiescenti.

Le osservazioni sin quì da me condotte sembravano avvalorare l'idea che, per un migliore chiarimento del problema dell'agglutinazione cromosomica spontanea, particolare attenzione dovesse rivolgersi ai rapporti eventualmente esistenti – in piante presentanti una perfetta vitalità – fra età degli apici radicali e grado della agglutinazione cromosomica. Una analisi citologica comparata eseguita su apici radicali di diversa età prelevati nello

(7) F. D'Amato, *inedito*.

(8) F. Resende e P. da Franca, *Sur l'origine de nouvelles formes. II.* « Portug. Acta Biol. (A) », I, 289–307 (1946).

stesso momento da un individuo di *Urginea maritima* in ottime condizioni di vegetazione, avendo permesso di convalidare il nostro presupposto teorico, indicò anche la via da seguire per una fruttosa raccolta del materiale da servire alla ricerca.

Si pervenne così alla conclusione che *l'età dei meristemi* (*senescenza?*) *è da considerare un fattore determinante di prim'ordine nell'induzione dell'agglutinazione cromosomica spontanea.*

Con l'avanzare della cattiva stagione e l'avviarsi di varie piante verso il riposo, cominciarono a presentare agglutinazione cromosomica anche apici radicali che – a giudicare dal loro aspetto esterno – non sembravano affetti da simile anormalità. Sicchè una fissazione di apici radicali di *Pancratium maritimum* eseguita alla fine di novembre 1947 denunciò l'arresto delle mitosi in tutti i meristemi. I nuclei, alquanto deformati, presentavano un reticolo cromatico assai più compatto di quello caratteristico dei nuclei di meristemi attivi, mentre uno strato suberoso aveva rivestito tutta o quasi tutta la zona prima occupata dall'apice meristematico.

Data la gran massa di materiale studiato, si è potuto confermare – almeno per molte piante – l'osservazione, precedentemente riportata [3], che *agglutinazione cromosomica e rarefazione matriciale non sono fenomeni incompatibili l'un l'altro e che anzi, molto spesso, ad un maggior grado di adesione superficiale fra cromosomi e cromatidi si accompagna una evidente diminuzione delle sostanze costituenti la matrice.*

Una simile osservazione è in contrasto con l'ammissione che la « stickiness » debba essere dovuta – come affermato dal Darlington [9] e da Darlington e la Cour [10, 11] – ad una « supercharge » di acido nucleico depolimerizzato (cfr. D'Amato, [3]). Non è forse più semplice ritenere che « stickiness » e « nucleic acid starvation » [9, 11] possano essere due tappe o due aspetti di un fenomeno fondamentalmente unico, e che la depolimerizzazione dell'acido timonucleico – ritenuta responsabile della « stickiness » – possa avvenire tanto in cromosomi aventi una carica normale o quasi di acido timonucleico quanto in cromosomi « starved » cioè presentanti una diminuita carica di acido timonucleico?

E poi – tenuto conto della sicura esistenza nella matrice cromosomica di proteine basiche [12] oltre che di acido timonucleico – appare, invero, assai più appropriato parlare di « rarefazione matriciale » più che di « rarefazione dell'acido timonucleico » e nello studio della natura della « stickiness » e della « starvation » non prendere in considerazione l'acido nucleico soltanto ma la

(9) C. D. DARLINGTON, *Chromosome Chemistry and gene action*. « Nature », *149*, 66–69, (1942).

(10) C. D. DARLINGTON, e L. LA COUR, *Nucleic acid starvation of chromosomes in «Trillium»*. « Journ. of Genetics », *40*, 185–213 (1940).

(11) C. D. DARLINGTON, e L. LA COUR, *Chromosome breakage and the nucleic acid cycle*. « Journ. of Genetics », *46*, 180–267 (1945).

(12) J. A. SERRA e A. QUEIROZ LOPES, *Direkter Nachweis und Lokalisation von basischen Proteinen in den Chromosomen und im Nukleolus*. « Chromosoma », *2*, 576–595 (1944).

matrice cromosomica come un complesso unico. (Cfr. D'Amato [3]). Come giustamente notano Fernandes e Serra [13], il voler ritenere la matrice cromosomica come esclusivamente costituita da acido timonucleico [9] appare oggi una pura pretesa.

Concludendo, la presente ricerca, oltre che mettere in rilievo – per la prima volta – la connessione fra fattori intrinseci e agglutinazione cromosomica spontanea, pone i presupposti per una più minuta analisi della « stickiness » e della « starvation » in sè e nei loro eventuali rapporti di interdipendenza.

Patologia vegetale. — *Il rinvenimento di una nuova specie di Ustilago dell'orzo in Italia* (« *Ustilago nigra Tapke* »). Nota di V. Grasso, presentata [*] dal Socio G. Negri.

Finora si è affermato che in Italia i carboni dell'orzo sono prodotti da due parassiti: *Ustilago hordei* (Pers.) Lagherhein e *Ustilago nuda* (Jens.) Rostrup.

Come è noto essi si distinguono: il primo per avere i clamidoconidi ravvolti, anche a maturità, da una tenue membrana biancastra, per cui è detto carbone coperto, l'altro per presentare la massa dei clamidoconidi dapprima ravvolta in una sottile pellicola e in seguito libera, erompente per lacerazione di essa donde il nome di carbone nudo o volante.

Le due specie hanno clamidoconidi color bruno olivaceo, dello stesso diametro di μ. 6, 30–7 ma differiscono tra loro perchè nella prima la parete dei clamidoconidi è liscia, nella seconda è finemente echinulata.

Da ricerche effettuate su materiale proveniente da diverse regioni d'Italia, ho potuto accertare che da noi il carbone dell'orzo è prodotto anche da una altra specie di *Ustilago*, finora non ancora segnalata: la *Ustilago nigra* Tapke [1].

Essa è stata trovata per la prima volta negli Stati Uniti d'America dal Tapke [4, 5, 6, 7, 8, 9] dove è abbastanza diffusa e molto recentemente in Palestina dal Minz [3] dove è presente sia nelle aziende arabe che in quelle ebraiche producendo notevoli danni.

L'Ustilago nigra mentre differisce sensibilmente dall'*Ustilago hordei* per mancanza dell'involucro e per l'echinulazione dei clamidoconidi, è del tutto simile *all'Ustilago nuda*. Infatti come questa produce sulla spiga la medesima alterazione carboniosa volante ed ha clamidoconidi di μ. 6,30–7 di diametro ugualmente echinulati.

(13) A. Fernandes e J. A. Serra, *Euchromatine et hétérochromatine dans leurs rapports avec le noyau et le nucléole.* « Bol. da Socied. Broter. », *19*, 67–124 (1944).

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(1) Questa specie è solamente ricordata dal Ciferri [2], ma non ne è fatta alcuna descrizione morfologica e patogenica.

Tuttavia i due carboni si possono distinguere per i seguenti caratteri: 1° il colore della massa dei clamidoconidi dell'*Ustilago nuda* è bruno olivaceo, mentre quello dell'*Ustilago nigra* è bruno cioccolato; 2° su un substrato di agar–patata–destrosio l'*Ustilago nuda* germina producendo solo micelio, mentre l'*Ustilago nigra* germina con formazione di un basidio, bisettato con quattro basidiospore in seguito gemmanti; 3° l'*Ustilago nuda* produce l'infezione attraverso il fiore, l'*Ustilago nigra* produce l'infezione attraverso questo e il germinello (2).

Per il riconoscimento dell'*Ustilago nigra* dall'*Ustilago nuda* ho osservato sopratutto la germinazione dei clamidoconidi, senza trascurare il colore della loro massa, mentre per l'epoca e le condizioni nelle quali ho fatto la presente Nota, non ho potuto osservare il modo di infezione della plantula.

Per la germinazione dei clamidoconidi ho seguíto la tecnica del Tapke.

La polvere delle spighe in esame, allo scopo di accertarsi che essa fosse tutta echinulata, cioè appartenente tutta ad una medesima specie, è stata separatamente osservata al microscopio a forte ingrandimento. Poscia con i clamidoconidi delle singole spighe si sono fatte altrettante sospensioni in cc. 2 di acqua distillata fino ad un leggero intorbidamento di essa e agitando bene il cilindro graduato, nel quale era contenuta, la si è versata in diverse capsule Petri su un substrato di agar–patate–destrosio. Dopo che la piccola massa dei clamidoconidi si era depositata, il rimanente dell'acqua veniva opportunamente aspirata con carta bibula. Le capsule, tenute a temperatura ambiente di 20–22°, erano osservate dopo 14 ore dall'inizio delle operazioni.

Sono stati fatti i seguenti rilievi; in alcune capsule con del materiale proveniente da Arezzo i clamidoconidi avevano germinato con un basidio diritto o leggermente ricurvo alla base, bisettato, con quattro basidiospore in seguito gemmanti (fig. 1, B, C, D), in altre di provenienza da Salerno la germinazione aveva prodotto solo micelio, ialino, ramificato, senza alcuna produzione di basidiospore (fig. 1, A).

Per questi caratteri riferivo il primo materiale all'*Ustilago nigra* Tapke, la seconda all'*Ustilago nuda*.

Non sono mancate delle capsule di provenienza da Arezzo, nelle quali pur derivando i clamidoconidi da una medesima spiga, si è avuto una germinazione mista di clamidoconidi con solo micelio o con sole basidiospore, rilevando la contemporanea presenza di *Ustilago nuda* e *Ustilago nigra*.

Mentre per Tapke questo comportamento è dovuto ad una mescolanza dell'*Ustilago nuda* e dell'*Ustilago nigra*, per Biedenckoff [1] non si tratterebbe di una mescolanza ma di una nuova specie che egli chiama *Ustilago medians* e che germinerebbe in parte con micelio e in parte con basidio.

(2) Credo opportuno a questo punto richiamare l'attenzione degli Studiosi Italiani perchè nella terminologia dello studio delle malattie degli *Ustilaginales* si abbandoni la dizione infezione primaria e infezione secondaria (intendendo per la prima quella che si ha attraverso la plantula dall'esterno e per la seconda quella che proviene dal fiore) e si usino rispettivamente le parole « infezione attraverso la plantula (*seedling infection*) e infezione fiorale (*floral infection*) », e ciò per intenderci meglio con gli Autori stranieri.

Fig. 1. – A) Germinazione dell'*U. nuda* (×750); B), C) Germinazione dell'*U. nigra* Tapke (×750, ×1400); D) Basidio germinante di *U. nigra* (×2800).

Pertanto per me appare molto più logico accettare l'ipotesi di Tapke che quella di Biedenckoff poichè sembra strano ammettere che i clamidoconidi di una specie ben fissa germinino alcuni in un modo altri in un altro. Cosicchè mentre il Tapke ritiene che la specie *Ustilago medians* non sia presente negli S.U.A., io ritengo che la sua esistenza sia molto incerta.

Riassumendo i carboni dell'orzo presenti in Italia hanno queste caratteristiche:

SPECIE	Involucro	Parete	Colore	Diametro in μ	Germinazione	Infezione
U. hordei (Pers.)	si	liscia	nerastro	6–7	basidio	plantulare e fiorale
U. nuda (Jens.)	no	echin.	bruno–olivaceo	6,30–7	micelio	fiorale
U. nigra (Tapke)	no	echin.	bruno–ciocc.	6,30–7	basidio	plantulare e fiorale

Per conoscere la distribuzione geografica dell'*Ustilago nigra* e nello stesso tempo quella degli altri due carboni, ho richiesto durante la campagna granaria 1946-47 l'invio da parte di molti Ispettorati Provinciali per l'Agricoltura, campioni di orzo carbonato.

Di 230 spighe esaminate l'83,49 % erano attaccate da *Ustilago hordei*, il 9,08, da *Ustilago nuda* e il 6,43 da *Ustilago nigra*. Per cui si può concludere che in Italia è assolutamente prevalente *l'Ustilago hordei* mentre le altre due specie *Ustilago nuda* e *Ustilago nigra* sono pochissimo rappresentate.

Esse hanno la seguente distribuzione geografica:

N.	Provincia	Numero di spighe esaminate	Varietà di orzo	Specie patogene in %		
				Ustilago hordei	*Ustilago nuda*	*Ustilago nigra*
1	Bergamo	13	Esastico	100		
2	Belluno	10	»	100		
3	R. Emilia . . .	20	»	100		
4	Modena	12	»	70	20	10
5	Ferrara	7	»	100		
6	Firenze	40	»	60	20	20
7	Arezzo	20	»	50	30	20
8	Siena	10	»	100		
9	Ancona	10	»	100		
10	Aquila	7	»	100		
11	Campobasso . . .	20	»	100		
12	Salerno	30	»	80	15	5
13	R. Calabria . . .	10	»	100		
14	Trapani	12	»	100		
15	Nuoro	9	»	100		
	Totale . . .	230				

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Biedenkopff, *Ustilago medians ein neuer Brand auf Gerste.* « Zeitschr. f. Pflanzen. », *4*, 321–322 (1894).
[2] R. Ciferri, *Manuale di Patologia Vegetale*, Albrighi e Segati 1940.
[3] G. Minz, « Palestine Journal of Botany », Rehovat Serie, vol. IV, n. 2, 205–206 (1944).
[4] V. F. Tapke, *An undescribed loose smut of barley.* « Phytopath. », *22*, 869–70 (1932).
[5] V. F. Tapke, *A study of the cause of variability in response of barley loose smut to control through seed treatment with surface disinfectants.* « Jour. Agr. Res. » (U. S.), *51*, 491–508 (1935).
[6] V. F. Tapke, *Patogenic strains in Ustilago nigra.* « Phytopath. », *26*, 1033–1034 (1936).
[7] V. F. Tapke, *Studies on the natural inoculation of seed barley with covered smut (Ustilago hordei).* « Jour. Agr. Res. » (U. S.), *60*, 787–810 (1940).
[8] V. F. Tapke, *A tecnique for identifying the loose smuts of barley.* « Phytopath. », *31*, 284–286 (1941).
[9] V. F. Tapke, *Occurrence, identification, and species validity of the barley loose smuts, Ustilago nuda, Ustilago nigra, and Ustilago medians.* « Phytopath. », *33*, 194–208 (1943).

Scienza della Alimentazione. — *Azione degli acidi malonico e monoiodoacetico nel processo di liposintesi durante la prolungata autolisi asettica.* Nota di C. Lombroso e S. Bocchiotti, presentata (*) dal Corrisp. U. Lombroso.

Nella precedente Nota è stato dimostrato che l'acido monoiodoacetico e l'acido malonico, addizionati a poltiglia di fegato di cane spancreato, o a sospensione acquosa di tuorlo d'uovo, messi in autolisi asettica, in presenza di un fattore lipodieretico, bloccano completamente i fenomeni della lipodieresi.

La percentuale di acidi grassi che si riscontra nel campione di partenza rimane immutata nei vari periodi di autolisi asettica, mentre, in assenza dell'acido monoiodoacetico o dell'acido malonico, si osserva nel primo tempo, 18–24 ore, una diminuzione del 20–30 %, e nel successivo periodo, 48–76 h, si ha il ripristino del primitivo contenuto di acidi grassi superiori. La florizina invece non modifica il normale comportamento del contenuto in acidi grassi che corrisponde pressocchè esattamente ai campioni senza florizina. Vale a dire scomparsa di acidi grassi dopo 18 ore, ripristino nei periodi successivi del grasso preesistente.

Sull'eventuale azione esercitata dall'acido monoiodoacetico o dall'acido malonico sui processi che provvedono a far risalire il contenuto di acidi grassi superiori, le precedenti indagini non potevano portare nessuna risposta, perchè, non essendosi manifestato il processo di lipodieresi, non si erano create le condizioni per il processo inverso di liposintesi; dato che è molto probabile che quest'ultimo si eserciti sul materiale formatosi durante la lipodieresi.

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1947.

Perciò abbiamo creduto opportuno continuare queste indagini addizionando l'acido monoiodoacetico o l'acido malonico non alla partenza, ma dopo 18 ore che rappresenta il periodo nel quale la lipodieresi è più manifesta; ed abbiamo in seguito paragonato il contenuto in acidi grassi superiori di campioni ai quali era stato aggiunto l'acido bloccante la lipodieresi, con quello di campioni senza tale addizione.

Riportiamo nella seguente tabella i risultati ottenuti con tale disposizione sperimentale.

Tabella I.

(La lipodieresi aggiunta ad ogni campione corrisponde a 5 gr. di pancreas).
(La quantità degli acidi monoiodoacetico e malonico è uguale per campione a 5 mg.).

Num.	durata	lipodieresi	lipodieresi iodacetico	lipodieresi malonico	materiale
I peso % acidi grassi	inizio	6,79			Campioni di fegato di cane spancreato
	18 h	5,10	5,11	5,09	
	48 h	6,64	5,08	5,13	
	76 h	6,78	5,15	5,07	
II peso % acidi grassi	inizio	16,22			Campioni di fegato di cane spancreato
	18 h	13,05	13	13,11	
	48 h	15,60	12,98	13,07	
	76 h	16,14	13,04	—	
III peso % acidi grassi	inizio	3,91			Campioni di fegato di cane allossanato
	18 h	2,85	2,80	2,82	
	48 h	3,14	2,83	2,85	
	120 h	3,89	—	2,81	
IV peso % acidi grass	inizio	5,05			Campioni sospensione di tuorlo d'uovo
	18 h	4,18	4,17	4,15	
	48 h	4,71	4,16	4,09	
	76 h	4,98	4,21	4,10	

Conclusioni. – I risultati ottenuti con questa disposizione sperimentale ci dimostrano che gli acidi monoiodoacetico e malonico inibiscono la liposintesi che segue normalmente alla lipodieresi, la quale, come abbiamo visto, è pure bloccata da tali acidi se aggiunti all'inizio dell'esperienza.

Ma quali sono i materiali che intervengono nella sintesi *in vitro* degli acidi grassi superiori, e che sono bloccati dagli acidi monoiodoacetico e malonico?

È questo un quesito di fondamentale interesse, e la possibilità di avere tali materiali stabilizzati ci permetterà forse di poterli identificare.

Fisiologia. — *Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo.* – A) *La reazione orto–clinostatica nell'adulto normale* (*). Nota I di C. Rizzo, presentata (**) dal Socio G. Cotronei.

G. Söderbergh, illustrando, nel 1926, i metodi di esplorazione clinica del sistema nervoso vegetativo (= S.N.V.) e discutendone il valore, giungeva alla conclusione che nessuna delle varie prove escogitate consentiva ancora valutazioni così esatte da autorizzare classificazioni di individui o giudizi diagnostici o prognostici; e si augurava che uno studio sistematico della funzionalità neuro–vegetativa potesse venire intrapreso cominciando non dalle prove più complesse (come le farmacologiche), ma dalle più semplici « reazioni normali ».

Convinto della bontà delle critiche del Söderbergh (oggi altrettanto attuali che vent'anni addietro) e desideroso di recare un fattivo contributo allo studio della fisiologia umana del S. N. V., illustrerò, nelle pagine che seguono, i risultati ottenuti esplorando in 100 individui fisicamente e psichicamente sani la *reazione orto–clinostatica*: reazione assolutamente fisiologica, che da otto anni studio in modo sistematico perchè essa costituisce uno dei principali elementi sui quali è fondato un mio metodo d'esplorazione clinica del S.N.V.

È risaputo da oltre un secolo che nel nervo vago decorrono fibre parasimpatiche, le quali agiscono sul cuore rallentandone la frequenza dei battiti, mentre dai gangli simpatici cervicali partono i nervi cardiaci, le cui fibre ortosimpatiche sono cardio–acceleratrici. La condizione in cui l'attività cardiaca viene a trovarsi per effetto di tali influenze antagonistiche è quella di un equilibrio relativamente instabile, che muta – fra l'altro – col mutare della posizione del corpo. È ben noto, infatti, che – in un medesimo soggetto – la frequenza dei battiti cardiaci è maggiore nella stazione eretta (ortostatismo) che nel decubito orizzontale (clinostatismo), perchè il tono vagale aumenta in posizione clinostatica e si riduce in ortostatismo, mentre il tono simpatico si comporta in maniera opposta.

Scarsissimi sono – ch'io mi sappia – gli studi fatti sull'importante e fisiologico fenomeno, che pure è di comune osservazione.

Sembra che lo Strauss sia stato il primo (nel 1901) a segnalare che in talune specie di neuropatici si verificava una cospicua cardioaccelerazione (di 20 o più pulsazioni al minuto primo) quando il soggetto passava dalla posizione seduta a quella in piedi. Egli definì « tachicardia ortostatica » siffatto fenomeno.

(*) Ricerche eseguite nella Clinica Neuropsichiatrica dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

Nella sua notissima « prova dell'atropina e dell'ortostatismo » D. Daniflopolu (col Carniol) utilizzò, nel 1923, la nozione che il polso si accelera nella stazione eretta (« riflesso di ortostatismo ») e rallenta in clinostatismo, per stabilire la dose minima di solfato neutro d'atropina necessaria ad inibire (secondo lui) l'attività del parasimpatico. Due anni dopo, il Güillaume auspicava che le ricerche di sfigmometria clino–ortostatica venissero condotte indipendentemente dalle azioni farmacodinamiche, al fine di uno studio sistematico della funzionalità neuro–vegetativa dell'apparato circolatorio.

Nel 1926 Laignel–Lavastine e Degrais comunicarono i risultati di loro indagini sul riflesso d'ortostatismo nella febbre tifoide.

Undici anni dopo, J. Tinel, nel suo noto Trattato sul S.N.V., pose la ricerca delle « reazioni ortostatiche » fra i metodi migliori per studiare la tonicità neuro–vegetativa, e raccomandò « questa prova così semplice e, relativamente, fedelissima ».

Lo stesso anno (1937) H. O. Pfister studiò il S.N.V. di 184 schizofrenici con vari metodi, impiegando, fra l'altro, anche la sfigmometria orto–clinostatica, cioè utilizzando tanto la « reazione ortostatica » quanto la « reazione clinostatica »: conteggio delle pulsazioni, di 15 in 15 secondi, prima (e per 3 minuti) in clinostatismo, poi (per altri 3 minuti) in ortostatismo, quindi (ancora per 3 minuti) nuovamente in decubito dorsale. L'A. poi iscrisse i 36 numeri ottenuti dal conteggio in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (in cui l'asse delle ascisse recava i tempi in quarti di minuto e l'asse delle ordinate recava le pulsazioni) ed ottenne così una chiara rappresentazione grafica del reperto, che l'A. denominò « Curva orto–clinostatica del polso ». Il Pfister, che, oltre, agli schizofrenici, aveva studiato anche 104 soggetti sani a scopo di controllo, riportò pure la curva che si ha nell'individuo normale (curva da me riprodotta alla lettera A dell'annessa Tavola) e ritenne che le cospicue ondulazioni che la caratterizzano (fugaci fasi di tachicardia e di bradicardia relative) fossero espressione dell'alterno gioco del simpatico e del parasimpatico, i cui impulsi concorrono al fine di raggiungere quell'equilibrio che era stato alterato dai mutamenti di posizione del soggetto.

La tecnica esplorativa della reazione orto–clinostatica quale è stata escogitata dal Pfister mi è sembrata eccellente sotto ogni riguardo, cosicchè io pure l'ho integralmente adottata nelle ricerche di cui alla presente Nota.

Come ho già accennato, quest'esplorazione dura 9 minuti, nel corso dei quali non dovrà perdersi neppure una pulsazione del soggetto: cosa facile ad ottenersi dopo un breve allenamento. Il numero delle pulsazioni rilevate viene dettato, ogni 15 secondi, ad un assistente.

Una personale esperienza, che dura ormai da parecchi anni, mi autorizza a fornire questi pochi suggerimenti per la migliore riuscita della prova.

Il soggetto, liberato da qualsiasi impaccio che possa ostacolare la circolazione, viene invitato a sdraiarsi supino sopra un divano o un letto piut-

tosto basso e senza guanciale o con guanciale sottile, e quivi dovrà rimanere alcuni minuti in silenzio, immobile e completamente rilasciato e tranquillo. Lo sperimentatore gli si pone accanto, gli prende il polso (senza, per altro iniziare ancora il conteggio dei battiti) e lo avverte che, ad un suo comando, egli dovrà scendere dal letto aiutandosi col braccio libero e continuando a lasciare l'altro abbandonato nella mano del medico. Poi, cronometro alla mano, si inizia il conteggio, che non presenta alcuna difficoltà nei primi 3 minuti.

Esattamente al termine del 3° minuto il soggetto è invitato ad alzarsi in piedi (non importa affatto che il movimento si attui con grande celerità: esso suol compiersi in 3–4 secondi); qui occorre una particolare cura per proseguire a raccogliere le pulsazioni nei primi 15 secondi del 4° minuto della prova: 15 secondi che costituiscono la delicata e importante fase di passaggio (o « di movimento ») dal clino– all'ortostatismo. Poscia si continuano agevolmente a contare, di 15 in 15 secondi, i battiti del polso per i restanti 2 minuti e 3/4 della fase ortostatica; quindi si invita il soggetto a coricarsi nuovamente sul lettino. Ha inizio, così, la seconda e ugualmente importante « fase di movimento », col passaggio dall'orto– al clinostatismo, che comprende i primi 15 secondi del 7° minuto dell'esplorazione. Seguono 2 minuti e 3/4 di conteggio della seconda fase clinostatica, ancora di 15 in 15 secondi.

Infine si traccia il grafico – con le modalità già dette a proposito del lavoro del Pfister – e si otterrà un'evidente rappresentazione della reazione orto–clinostatica del soggetto esaminato. Per rendere più dimostrativa codesta rappresentazione ed anche al fine di facilitare i confronti tra tracciati appartenenti a individui diversi, ho da tempo adottato il seguente modulo: le coordinate vengono condotte su un rettangolo di carta quadrettata, i cui quadretti hanno la consueta misura di 4×4 mm. circa; l'origine delle coordinate viene fissato verso l'angolo inferiore sinistro del foglio; sull'orizzontale asse delle ascisse traccio 36 punti, distanziati di 2 quadretti l'uno dall'altro e corrispondenti ai 36 conteggi dell'esplorazione; separo poi con una linea il punto 12° dal 13° ed il 24° dal 25° per meglio distinguere la fase ortostatica dalle clinostatiche (s'intende che i punti 13° e 25° corrisponderanno alle due « fasi di movimento »). Sul verticale asse delle ordinate faccio corrispondere all'origine il numero 5 (= 5 pulsazioni) e dò il valore di 1 ad ogni quadretto, cosicchè – per esempio – la linea superiore del 20° quadretto dell'ordinata corrisponde a 25 (= 25 pulsazioni per quarto di minuto).

Prima di procedere all'analisi dei reperti ottenuti, debbo precisare che l'andamento generale della reazione orto–clinostatica è indipendente dalla velocità con cui viene effettuato il movimento di passaggio dal clino– all'ortostatismo e viceversa. Ho anche potuto rilevare che, nei normali, codesto andamento non varia apprezzabilmente nei diversi periodi del giorno o col passare dei giorni o dei mesi. Sicchè posso affermare che, nei soggetti sani, il tipo di reazione orto–clinostatica suole essere fisso per ciascun individuo e lo caratterizza stabilmente.

Esaminiamo ora i miei reperti.

Rappresentazione (ridotta a circa 2/3 delle dimensioni originali) dei due tipi fondamentali di grafici rilevabili negli individui normali, confrontati con il grafico del cosiddetto «individuo normale» di H. O. Pfister.

Da un primo sguardo d'assieme dei 100 tracciati si rileva, anzitutto, che questi non sono fra loro uguali e neppure simili; sicchè il parlare – come fa H. O. Pfister – di *una* reazione orto–clinostatica di tipo « normale » è inesatto. Dobbiamo dire, invece, che nei soggetti clinicamente sani si hanno *parecchi tipi* di detta reazione, sensibilmente diversi fra loro.

I due tipi che maggiormente differiscono l'uno dall'altro sono i seguenti:

1° Un tipo che, provvisoriamente, chiamo *bradicardico* e che corrisponde al grafico B della Tavola annessa. È caratterizzato: *a*) dalla bassa frequenza del polso [1] in ortostatismo e – naturalmente – più ancora in clinostatismo; *b*) da un'esigua « differenziale » fra la media dei valori ortostatici e di quelli clinostatici; *c*) da una relativamente scarsa presenza di quelle seghettature – o « dentelli » – denotanti un continuo o quasi continuo variare del numero delle pulsazioni nei successivi conteggi; *d*) dal risalto che sul grafico quasi uniformemente pianeggiante assume la transitoria accelerazione sfigmica che caratterizza ciascuna delle due « fasi di movimento ».

Questo tipo di grafico, nel suo complesso, si presenta come la sezione d'una superficie piuttosto spianata, ovvero (come nel caso da me riprodotto) a larghe ondulazioni, poco più elevata nel suo terzo centrale (corrispondente all'ortostatismo) che nei suoi terzi laterali, relativamente vicina alla linea delle ascisse e con due cùspidi (o « guglie ») in corrispondenza delle « fasi di movimento ».

2° Un secondo tipo, che per ora chiameremo *tachicardico* e che corrisponde al grafico *C* della Tavola, è caratterizzato da: *a*) elevata frequenza delle pulsazioni nel decubito supino e – assai più – nella stazione eretta, d'onde *b*) una cospicua « differenziale » e *c*) la mancanza delle due « guglie » caratterizzanti il grafico bradicardico, dato che la tachicardia ortostatica è superiore all'accelerazione sfigmica che si osserva nelle « fasi di movimento »; *d*) frequenza dei « dentelli » tanto nelle fasi clinostatiche quanto in quella ortostatica.

Il grafico tachicardico assume, così, nel suo terzo centrale (corrispondente all'ortostatismo) l'aspetto del profilo d'una specie di acrocoro o di altipiano elevantesi più o meno a picco sul piano (seghettato e relativamente lontano dalla linea delle ascisse) dei clinostatismi.

Partendo dal concetto che la bradicardia è espressione di prevalenza del tono parasimpatico (mentre la tachicardia significa preponderanza di quello dell'ortosimpatico), possiamo ora concludere che il sunnominato « tipo bradicardico » può anche definirsi *tipo parasimpaticotonico*, e *tipo ortosim-*

(1) Ricordo che, in base alle ricerche statistiche di A. Occhiuto, i maschi italiani di 20–25 anni (materiale che corrisponde, di massima, a quello formante oggetto del presente studio) hanno, in clinostatismo, una media di 64–65 pulsazioni al minuto. Confermo questi numeri, giacchè nei miei 100 soggetti la media aritmetica delle pulsazioni – sempre in clinostatismo – è stata di 64, 2, mentre la mediana (ossia la media aritmetica eseguita sul terzo medio dei singoli valori disposti in serie: col che si eliminano gli scarti estremi e ci si accosta maggiormente alla realtà) è stata di 63.

paticotonico quello tachicardico: col che ce ne spieghiàmo le caratteristiche e le differenze.

Così – per esempio – le larghe ondulazioni rilevabili nei due tipi, ma più cospicue in taluni grafici del 1° tipo, denotano l'alternarsi delle frenate vagali alle spinte simpatiche. Il prevalere di codeste frenate, subito dopo la spinta causata dal mutamento di posizione del soggetto per portarsi in ortostatismo, fa sì che nella fase ortostatica dei soggetti del 1° tipo il numero medio di pulsazioni sia di poco superiore a quello osservabile nel decubito orizzontale e che – comunque – esso rimanga inferiore alla transitoria tachicardia (ortosimpatica) verificantesi nelle « fasi di movimento »: d'onde l'evidenza delle « guglie» caratterizzanti queste ultime. La scarsità delle medesime frenate vagali, anzi l'incremento delle spinte simpatiche nel periodo ortostatico dei soggetti appartenenti al 2° tipo fa sì che questo periodo sia graficamente caratterizzato da quella sorta di altipiano che sovrasta la tachicardia delle fasi di movimento.

A questo punto non è forse superfluo aggiungere che i due tipi dianzi illustrati non rappresentano – rispettivamente – la parasimpaticotonia e l'ortosimpaticotonia assolute ed esclusive. Codeste condizioni vegetative non esistono, non possono esistere, negli individui normali (nè, a stretto rigore, nei patologici [2]; e, difatti, l'abituale coesistenza delle spinte simpatiche e delle frenate vagali, il costante variare della frequenza cardiaca col mutamento della posizione corporea, ecc. confermano che nel medesimo soggetto esistono tanto le componenti orto– quanto quelle parasimpatiche. Sta, però, il fatto che in taluni individui (quelli del tipo 1°) le componenti parasimpatiche prevalgono di gran lunga su quelle ortosimpatiche (e viceversa per gli individui del 2° tipo): d'onde la nostra terminologia, che – nel suo necessario semplicismo – vuol significare come nei soggetti del 1° tipo esista nel modo più spiccato una prevalente parasimpaticotonia, e come siano spiccatamente in prevalenza ortosimpaticotonici i soggetti del 2° tipo.

Questi, che ho definito para– ed ortosimpaticotonico, non sono, però, i soli tipi riscontrabili negli individui sani. Ve ne sono, anzi, numerosi altri i quali presentano più o meno nette caratteristiche *anfotoniche*, ed il cui tracciato ha talune affinità con i grafici del 1° tipo, talaltre con quelli del 2°.

Nella seguente Nota cercherò di approfondire lo studio analitico dei miei reperti, nella fiducia di giungere ad una rigorosa valutazione del tono neuro–vegetativo dei soggetti normali.

(Per la bibliografia si rimanda alla Nota III).

(2) Non credo che l'episodica patologicità provocata dal DANIELOPOLU col suo noto metodo esplorativo all'atropina riesca a determinare la temporanea esclusione dell'attività parasimpatica. Ritengo incompatibile con la vita una siffatta esclusione, e v'è piuttosto da pensare che la massiva atropinizzazione prodotta dall'A. liberi, per effetto di supplenze funzionali, meccanismi ad azione parasimpatica tendenti a difendere l'organismo da quel tentativo di blocco vagale.

Biologia. — *Peculiari riassestamenti della sostanza cromofila con caratteri neurosecretori nelle cellule del nucleo della radice mesencefalica del trigemino del Tritone crestato* (*). Nota di V. Mazzi, presentata (**) dal Corrisp. N. Beccari.

Recentemente, occupandomi dei fenomeni neurosecretori a livello del nucleo magnocellulare preottico del Tritone crestato, (Mazzi, 1947) (1), prospettai per primo l'ipotesi che l'elaborazione della sostanza colloide da parte di questo nucleo fosse il risultato visibile di un'attiva sintesi di proteine (di cui il secreto colloide dà le reazioni caratteristiche), dalla quale non sarebbe estraneo l'acido ribonucleinico presente in quantità notevole nelle cellule di questo nucleo. E considerai quindi il reperto una prova di più in favore di quell'ipotesi avanzata contemporaneamente da J. Brachet (1941) (2) e da Casperson, Landström-Hydén e Aquilonius (1941) (3) la quale, partendo dalla osservazione che « l'acido nucleinico si trova associato alle proteine là dove c'è intensa formazione di queste », tende ad attribuire a questo acido il valore « di un gruppo prostetico che definisce spesso i luoghi di larga e rapida sintesi di proteine » (Rondoni, 1945) (4). Questa teoria è stata estesa alla cellula nervosa da Hydén (1943, *a*, *b*) (5).

Mi accingo ora a descrivere una serie di interessanti fatti, morfologicamente rilevabili nelle cellule del nucleo della radice mesencefalica del trigemino, nei quali mi sembra di ravvisare un altro esempio di associazione fra attiva sintesi di proteine e presenza di alte percentuali di acido ribonucleinico. Fatti che mi sembrano tanto più interessanti in quanto presentano molte caratteristiche in comune con i fenomeni neurosecretori, pur differendone profondamente, come avrò modo di dimostrare.

Il nucleo della radice mesencefalica del trigemello (o n. magnocellulare del tetto) è, nel Tritone, costituito da cellule che si trovano scaglionate per tutta la lunghezza del tetto. Sono più frequenti sulla superficie laterale che chiude la cavità mesencefalica, ove, pur senza presentare segni evidenti di concentrazione, sono più numerose nella metà caudale. Procedendo verso la linea di mezzo si fanno più rade, e leggermente più numerose nel distretto craniale.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.
(**) Nella seduta del 13 dicembre 1947.
(1) « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. III, p. 155 (1947).
(2) « Arch. Biol. », to. 53, p. 207 (1941).
(3) « Chromosoma », vol. 2, p. 111 (1941).
(4) P. Rondoni, *Biochimica*, vol. I, 5ª ed., U.T.E.T., Torino (1945).
(5) « Z. mikr. Anat. forsch. », Bd. 54, ser. 96 (1943); « Acta Physiol. Scand. », vol. 6, suppl. XVII (1943).

La forma delle cellule è rotondeggiante, ovoide o irregolarmente poligonale, in relazione al numero di prolungamenti presenti. Sappiamo infatti dalle ricerche di Johnston (1909) [6] che le cellule del n. r. m. V. [7] possono, negli Anfibi e nelle altre classi di Vertebrati, essere uni– bi– o multipolari. Le dimensioni, riferite all'asse maggiore, oscillano fra 14,9 μ e 35,9 μ, con una media di 24,1 μ.

Si tratta di cellule di aspetto peculiare, dotate di un nucleo, per lo più vescicoloso ed eccentrico, piuttosto grande (per l'asse maggiore, media: 15,4 μ; minimo: 10,7 μ; massimo: 21,8 μ), con uno o due grossi nucleoli, ricchi di acido ribonucleinico.

La sostanza tigroide si distribuisce secondo due schemi fondamentali, in base ai quali è possibile dividere le cellule in due tipi, che per brevità indicherà con le lettere A e B. Nel tipo A essa è presente sotto forma di minuti granuli addensati in masserelle piccole ed irregolari, di aspetto sfumato, dispersi in un citoplasma basofilo, e che tendono a condensarsi perifericamente in masserelle allungate. Questa distribuzione è peculiare in cellule ellittiche, grandi (27 μ o più sul maggior asse), a nucleo eccentrico (fig. 1, *a*).

Fig. 1. – Cellule del n. r. m. V. del Tritone crestato. Spiegazione nel testo. Tutte le figure sono state riprese da esemplari fissati in Stieve. Colorazione di *a*, *c* e *d*: bleu di toluidina – fucsina acida; di *b*: I metodo di Galgano. × 1060, circa.

Nel tipo B la sostanza basofila è presente sotto forma di masserelle irregolari, cospicue addensate alla periferia, o disposte in una o due serie più o meno regolarmente concentriche rispetto al nucleo o irregolarmente distribuite, ovvero di ammassi apicali. Si rinviene in cellule medie o piccole, a nucleo eccentrico o più o meno centrale, vescicoloso, e, in genere, leggermente più ricco in cromatina del nucleo delle cellule del tipo A, a citoplasma chiaro e debolmente acidofilo (fig. 1, *c*).

Nel corso di un'attenta indagine svolta su un numero rilevante di individui sacrificati nei diversi periodi dell'anno, m'è occorso di notare, in ambedue i tipi di cellule, una serie di modificazioni dell'aspetto morfologico e delle qualità tintoriali della sostanza cromofila. Questa, com'è noto, è caratterizzata da un'affinità assai spiccata per i colori basici, quali il bleu di toluidina, la tionina, il cresilvioletto, la pironina, ecc. (ma non per il bleu di anilina o il bleu di metile dei metodi di Mallory e sue modificazioni, Azan, Masson, ecc.); inoltre si colora più o meno intensamente, a seconda del fissativo adoperato, con

(6) « J. Comp. Neurol. », vol. 19, p. 593 (1909).

(7) Spiegazione delle abbreviazioni: n. r. m. V. = nucleo della radice mesencefalica del trigemino; n. m. p. = nucleo magnocellulare preottico.

l'ematossilina ferrica, l'emallume o altre soluzioni di ematossilina. Queste caratteristiche tintoriali della sostanza tigroide sembrano essere alquanto modificate nelle cellule del n.r.m.V. del tritone, tanto che l'affinità per i colori basici viene in parte sostituita da una affinità più o meno intensa per i colori acidi, e particolarmente per la fucsina acida, in materiale fissato preferibilmente con lo Stieve o il Susa, e colorato con la modificazione del metodo di Mallory dovuta a Galgano (1947)[8] o con una semplificazione del metodo Dominici, nella quale sostituisco la fucsina acida all'eritrosina, abolendo il trattamento con il Lugol.

I fenomeni, osservati indifferentemente in esemplari maschili e femminili, sembrano non essere legati alla stagione dell'anno. Essi si svolgono secondo due linee diverse nelle cellule del tipo A e del tipo B.

Nelle prime compaiono minuti granuli fucsino-acidofili, più di frequente in corrispondenza di una zona centrale del citoplasma, talvolta invece perifericamente, in relazione con le masse periferiche di sostanza tigroide, che nel contempo mostrano una tendenza ad assumere il colore acido. Il numero e le dimensioni di questi granuli variano notevolmente: se ne possono osservare pochi e minuti, soli o accompagnati da tre-sei più grandi; ovvero la cellula può presentarsi completamente ripiena di granuli di grandezza diversa (fig. 1, *b*). Si noti però che, in ogni cellula, la dimensione dei granuli tende a mantenersi uniforme. Talvolta, se pure di rado, le masserelle periferiche di tigroide tendono a condensarsi in masse di notevoli dimensioni, che si accompagnano a granuli fucsinofili, in questo caso scarsi. L'aumento dei granuli è accompagnato di pari passo dalla progressiva diminuzione della sostanza cromofila che, nel caso di elementi completamente ripieni di granuli, è del tutto scomparsa.

Assai più facile è invece seguire i fenomeni che si svolgono a carico delle cellule di tipo B e che si presentano sotto forma di una assai vasta gamma di figure. In genere le masserelle di tigroide tendono a riunirsi in ammassi più grandi, fucsinofili, irregolarmente disposti (fig. 1, *d*), o a confluire alla periferia della cellula in ammassi intensamente fucsinofili. Di norma ambedue i casi si possono verificare in seno ad una medesima cellula; per altro non è raro trovare cellule in cui si osservano esclusivamente grosse masse periferiche fucsinofile, ovvero masserelle irregolari, per lo più ovoidi, relativamente scarse, largamente distribuite nel citoplasma. Questi è normalmente chiaro e leggermente fucsinofilo ma talora è scuro e violaceo; ma queste differenze in parte possono dipendere dal grado di differenziazione nella colorazione.

Il nucleo dei due tipi di cellule, che contiene normalmente due o anche tre grossi nucleoli, più o meno francamente fucsinofili, ha, come ho già segnalato, aspetto vescicoloso. Contiene un lasso reticolo lininico, ai cui nodi si distribuiscono, con preferenza alla periferia, masserelle di cromatina.

Infine nel citoplasma dell'uno e dell'altro tipo di cellule si rileva talvolta una zona, di ubicazione varia, che si colora abbastanza intensamente con

(8) « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. III, 1947, (in corso di stampa).

il bleu di metile nel metodo Mallory–Galgano; e, più raramente, delle masserelle tondeggianti, che egualmente si colorano in bleu, e il cui aspetto richiama quello del colloide ipofisario.

L'aspetto peculiare dei fatti osservati particolarmente nelle cellule del tipo A, e che risultano nella comparsa di granuli sferici, variabili nelle dimensioni e nel numero, in un primo tempo mi indusse a considerare il fenomeno alla stessa stregua di quello rilevabile a livello di alcuni nuclei ipotalamici, e che porta alla elaborazione di un secreto colloide. Tanto più che, in ambedue i casi, i granuli si formavano corrispondentemente nello spazio (e cioè in relazione stretta con la sostanza tigroide), e apparentemente reagivano nello stesso modo con la fucsina acida in materiale egualmente fissato ed incluso. E questa induzione pareva anche essere confortata dalla analogia fra le figure di condensazione periferica della sostanza tigroide in grosse masse acidofile e quelle descritte da E. Scharrer, Palay e Nilges (1945) [9] in alcune cellule del n. magnocellulare preottico del siluride *Noturus flavus*, e del nucleo paraventricolare del serpente *Lapemis hardwickii*. Ambedue questi nuclei fanno parte del complesso neurovegetativo ipotalamico a cui è riconosciuta capacità di secernere (E. Sharrer, 1936) [10].

Allo scopo pertanto di accertare se i fenomeni esaminati nelle cellule del n.r.m. V. del Tritone rientrino nel quadro di quelli neurosecretori ho eseguita una serie di ricerche comparative, aventi come fine di determinare il comportamento dei granuli colloidi del nucleo preottico e di quelli nelle cellule del n.r.m.V. di fronte a diversi coloranti in materiale egualmente fissato ed incluso. Come termine di raffronto ho scelto le formazioni colloidi nel n.m.p. [6] del rospo.

Non volendo dilungarmi in un'analisi particolareggiata dei metodi adottati, mi limito a mettere in rilievo i dati più importanti emersi da questa ricerca, e che ho sintetizzato nella tabella I. Ambedue le strutture sono acidofile, e manifestano un'affinità più o meno spinta verso la fucsina acida, l'orange G, l'eosina, l'eritrosina, ecc. Ma nel metodo di Dominici, e nella sua semplificazione testè ricordata, i granuli delle cellule del n.r.m.V. prendono intensamente anche il bleu di toluidina, per il quale i granuli di colloide delle cellule del n.m.p. non dimostrano alcuna affinità. Soltanto questi ultimi si colorano intensamente con la safranina usando il metodo emallume–safranina–orange; con l'azocarminio usando l'Azan di Heidenhain, e con la ematossilina ferrica. Nel metodo al verde di metile–pironina secondo Unna, i granuli del nucleo della radice mesencefalica del quinto prendono intensamente la pironina, quelli del nucleo preottico, come ho già avuto modo di segnalare (Mazzi [1] 1947), assai debolmente. E questa colorabilità viene perduta dai primi, conservata dai secondi, dopo trattamento con la ribonucleasi in accordo con il metodo di Brachet (1941) [2] per la messa in evidenza dell'acido ribonucleinico. In ambedue i casi la reazione di Feulgen è negativa.

(9) « Anat. Rec. », vol. 92, p. 25 (1945).
(10) « Zschr. ges. Anat. », Bd. 106, ser. 169 (1936).

Tabella I.

	Fucsina ac.	Ematossilina ferrica	Orange G.	Azocarminio	Eritrosina	Pironina	Bleu di toluidina	Safranina	Reazione di Feulgen	Reazione di Brachet
N. r. m. V.	+++	+	+	?	+	+++	++	+	—	++
N. m. p.	+++	++	++	++	?	(+)	—	+++		

Il numero dei + indica l'intensità della colorazione o della reazione; il — assenza di colorazione o di reazione.

Quanto sopra ci permette di concludere che fra la sostanza risultante dal riassestamento della tigroide delle cellule del n.r.m.V., ed il colloide elaborato dal nucleo preottico dei bassi vertebrati (o dai nuclei ad esso corrispondenti), esiste una fondamentale differenza. La prima, essendo Feulgen negativa e Brachet positiva, sarà costituita, fra l'altro, da un ribonucleoproteide; il secondo, Brachet e Feulgen negativo, da una proteina di natura per il momento ignota.

Se il particolare contegno verso i coloranti sia dovuto alla diversa natura chimica od alle condizioni chimico-fisiche delle due strutture, non posso per il momento stabilire. È noto che la sostanza cromofila è costituita da un nucleoproteide, e più precisamente da un ribonucleoproteide (Caspersson, Hydén, J. Brachet). L'affinità per i colori basici sarebbe dovuta alla presenza del caratteristico gruppo prostetico (acido ribonucleinico). Infatti essa scompare dopo che il polisaccaride di questo gruppo è stato digerito dalla ptialina (Szent-Gyorgy) [11] o quando l'ac. ribonucleinico è stato depolimerizzato da un enzima specifico, la ribonucleasi (J. Brachet, 1941).[2].

La basofilia dei prodotti del riassestamento della sostanza cromofila delle cellule del n.r.m.V. potrebbe essere dovuta alla presenza del gruppo prostetico. Nel colloide dei nuclei preottici, nei quali manca l'ac. ribonucleinico, la basofilia non compare.

È anche probabile che la comune affinità per i coloranti acidi tragga la sua origine dalla presenza di particolari sostanze.

Ricordo infatti che Hydén (1943, *b*) [5] ha dimostrato che la quantità di colorante acido (cianantrolo o rosso ponceau) legato da una struttura cellulare in ambiente fortemente acido e in presenza di agenti abbassatori della tensione superficiale (i quali eliminano i fenomeni di assorbimento) è proporzionale alla quantità di basi exoniche [12] presenti. In via ipotetica si

(11) Citato da G. Levi *Trattato di Istologia*, 3ª ed., p. 705, U.T.E.T. Torino, 1946.

(12) Con la denominazione di basi exoniche si indicano, seguendo Kossel, la arginina, la lisina e la istidina, corpi che hanno in comune una discreta basicità e il contenuto di sei atomi di C nella molecola (Rondoni, 1945).

potrebbe pertanto ammettere che, sia nei prodotti del riassestamento della sostanza di Nissl delle cellule del n.r.m.V. del tritone, che nel colloide elaborato dai nuclei ipotalamici fossero presenti notevoli quantità di basi exoniche alle quali sarebbe, almeno in parte, dovuta la caratteristica acidofilia.

Nel caso particolare delle cellule del nucleo magnocellulare del tetto del tritone, faccio notare che (oltre alla presenza di forti quantità di acido ribonucleinico e, forse, di basi exoniche nel citoplasma) l'apparato nucleolare è particolarmente ben sviluppato e ricco di ribonucleotidi, e che non è raro trovare nel citoplasma addensamenti a tipo nucleotidico di contro alla membrana nucleare. Sono queste, secondo Hydén, manifestazioni caratteristiche di cellule nervose nelle quali è in atto una sintesi di proteine. Mi sembra quindi lecito concludere che nelle cellule del n. r. m. V. l'attitudine a sintetizzare proteine si palesa come la estrinsecazione di un processo fisiologico, tanto più che, in sezioni di uno stesso encefalo, si ritrovano cellule in stadi diversi di attività.

Considerati poi i peculiari caratteri che il riassestamento della tigroide assume in queste cellule e malgrado il comportamento verso alcuni coloranti, che si diversifica notevolmente rispetto a quello proprio del colloide ipotalamico, mi sembra che nulla vieti di vedere nei fenomeni testè descritti un caso particolare di neurosecrezione, che porta alla elaborazione di un increto diverso da quello elaborato dai nuclei del complesso vegetativo ipotalamico. È noto, d'altra parte, che anche quest'ultimo in molti casi si originerebbe per trasformazione diretta della sostanza cromofila (E. Scharrer, Palay e Nilges, 1945) [9].

L'aver riconosciuto al n. r. m. V. capacità di secernere, fa sorgere la domanda se questo centro debba essere ascritto al sistema autonomo. Infatti molte ricerche (sintetizzate in un articolo di E. e B. Scharrer, 1945) [13] hanno dimostrato che i fenomeni neurosecretori sono particolarmente rilevanti in centri facenti parte del sistema autonomo centrale. Ricerche di Ito e Nagahiro (1937) [14] sul plesso mioenterico del ratto, e di Lenette e E. Scharrer (1946) [15] sul ganglio perisurrenale di *Macaca mulatta*, sembrano estendere anche al sistema autonomo periferico il concetto di neurosecrezione.

Inoltre nel nucleo magnocellulare del tetto del tritone si riscontrano molte di quelle caratteristiche, le quali, secondo Scharrer (1936) [10], sono condivise dai centri neurovegetativi, specialmente dei Pesci.

D'altra parte le più recenti ricerche sperimentali (cfr. fra gli altri Corbin, 1940 [16]; Harrison e Corbin, 1942) [17], portano a considerare il nucleo della radice mesencefalica del trigemino un centro propriocettivo dei muscoli masticatori, facente quindi parte, come tale, della parte somatica e non

(13) « Physiol. Rewiews », vol. 25, p. 171 (1945).
(14) « Fol. Anat. Jap. », vol. 15, p. 609 (1937).
(15) « Anat. Rec. », vol. 94, p. 85 (1946).
(16) « J. Comp. Neur. », vol. 73, p. 153 (1940).
(17) « Am. J. Physiol. », vol. 135, p. 439 (1942).

della vegetativa del sistema afferente. Fatto questo di cui bisogna tenere debito conto, poichè anche quei recenti Autori, quali Roussy e Mosinger (1946) [18] i quali ritengono assai difficile dissociare in modo preciso gli apparecchi della sensibilità somatica da quelli della sensibilità vegetativa, si dimostrano in ultima analisi alieni dall'abbracciare la concezione unicista, secondo la quale esisterebbe un solo dispositivo anatomico per la sensibilità somatica e per quella vegetativa.

È questo quindi il primo caso in cui la neurosecrezione, che io considero come una sintesi di proteine particolarmente attiva, viene riscontrata in distretti del sistema nervoso centrale che si possono considerare non appartenenti al sistema autonomo.

A meno che i risultati di queste mie ricerche non potessero avere tanto valore da mettere in forse la corrente interpretazione somato–sensitiva della radice mesencefalica del V.

Biologia. — *I pigmenti carotenoidi nella dorifora delle patate (Leptinotarsa decemlineata)* [*]. Nota di C. MANUNTA e G. MORITTU, presentata [**] dal Socio G. LEVI.

N. 150 individui, in parte già trasformati in ninfe, ed in parte ancora allo stato di larve sono state prelevate dalla pianta nel mese di luglio e conservate in alcool al 50 % fino alla fine di settembre.

Il materiale tolto dall'alcool è stato estratto fino ad esaurimento con acetone (il residuo restava bianco sporco e le cuticole si mostravano completamente bianche). Si è ottenuto un estratto acetonico giallo–arancio intenso sfumato di brunastro. Il pigmento si trasferisce completamente in benzina 70-80° con colorazione arancione olivastro; all'osservazione spettroscopica mostra lo spettro della clorofilla, accanto alle due bande che caratterizzano i carotenoidi. All'analisi di separazione con metanolo il pigmento si distribuisce nelle due fasi: una benzenica, ed una metanolica, entrambe di color arancione.

La fase metanolica dopo saponificazione per allontanare la clorofilla si trasferisce in benzina con colorazione aranciata. All'analisi cromatografica su $CaCO_3$ si forma prima una zona giallo–rosa che sviluppando mediante lavaggio con benzina si disgiunge in due zone: una rosa ciclamino e una gialla. L'eluato della zona gialla in benzina mostra le bande a 447 mμ e 477 mμ caratteristiche della luteina (al dosaggio mgr. 0,068 di luteina per 150 esemplari): l'eluato per la zona rosa ha colorazione giallo–rosata in benzina 70–

(18) G. ROUSSY e M. MOSINGER, *Traité de neuro–endocrinologie*. Masson et Cie. Paris, 1946.

(*) Lavoro compiuto nel Centro di Genetica del C.N.R. presso l'Istituto « Spallanzani » dell'Università di Pavia.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

80°, e colorazione nitidamente rosa in CS_2 (tanto in benzina che in CS_2 mostra una larga banda sfumata, il cui massimo sembrerebbe verso i 497 m μ).

La frazione benzenica dopo saponificazione per allontanare le clorofille ha una colorazione giallo arancio. All'analisi cromatografica su Al_2O_3 forma una larga zona rosa che sviluppando con benzina a 70–80° si disgiunge in due zone, una inferiore giallo–rosa che si lava celermente con colorazione giallo intensa in benzina 70–80° e che mostra le bande del β carotene a 451 e 483 m μ (al dosaggio mgr. 0,60 per i 150 individui) ed una superiore rossa che si sposta lentamente e che all'eluizione in benzina 70–80° mostra colorazione giallo rosata e colorazione rosa in CS_2 e all'analisi spettrale una larga banda sfumata il cui massimo sembrerebbe verso i 497 m μ.

Questa frazione fu riunita alla frazione corrispondente mediante analisi cromatografica su $CaCO_3$ e dosata come licopene (mgr. 0,546 per i 150 esemplari), poichè la tonalità di colorazione anche dopo eluizione non permetteva l'uso della soluzione di confronto per il carotene o per le xantofille, come luteina, taraxantina ed i suoi isomeri, secondo il procedimento di Kuhn e Brockmann. (Soluzione contenente 14,5 mgr. di azobenzolo in 100 cc. di alcool a 96°, mentre la soluzione di confronto per il licopene ha concentrazione decupla).

In conclusione, nel materiale in esame si sono riscontrate piccole quantità di clorofilla e 3 distinti pigmenti carotenoidi.

Le tracce di clorofille evidentemente sono dovute al materiale ancora contenuto nell'intestino delle larve ed evidentemente anche parte dei carotenoidi deve provenire dalla medesima origine, ma la maggior parte di questi deve essere stata immagazzinata dai tessuti larvali e ninfali nel corso dello sviluppo. Già da questo studio preliminare s'intravvede l'interesse che può presentare lo studio del metabolismo dei pigmenti carotenoidi di questo insetto. Ci proponiamo perciò di intraprendere l'analisi quantitativa e qualitativa dei pigmenti carotenoidi contenuti nelle foglie di patate e di condurre in Laboratorio allevamenti di Dorifora, onde poter seguire lo studio del metabolismo di detti pigmenti durante tutto lo sviluppo larvale e ninfale.

Per ora già è interessante assai la constatazione di un grande accumulo di β carotene da parte di questi insetti e della presenza di un carotenoide, che a meno non si tratti di qualche prodotto di ossidazione, sia per il comportamento cromatografico che per quello spettrale pare avere grande analogia con la *fenicoxantina*, isolata da una di noi (Manunta 1939) [1] nel grasso di fenicottero. È necessario naturalmente che ci procuriamo parecchio materiale prima di poter isolare ed individuare con sicurezza questo pigmento.

(1) C. Manunta, (1939), *Cristallizzazione della sostanza colorante del grasso di un Fenicottero.* « Helvet. Acta », *22*, 1151–1154.

Biologia. – *Sul metabolismo dell'azoto in « Bombyx mori ». – III. L'acido allantoinico durante lo sviluppo larvale nella razza bivoltina Awojiku* (*). Nota di C. MANUNTA, presentata (**) dal Socio G. LEVI.

In due lavori precedenti (1) appoggiandomi ai dati sperimentalmente ottenuti formulavo l'ipotesi che l'acido allantoinico presente sia nelle crisalidi in toto che nel sangue dei bachi rappresentasse un prodotto intermedio nel corso della scissione o della sintesi dell'acido urico. Avevo constatato che la concentrazione in acido allantoinico si abbassa di molto nel sangue dei bachi maturi, mentre contemporaneamente si eleva quella dell'acido urico. Si presentava ora di notevole interesse seguire attentamente le variazioni della concentrazione in acido allantoinico ed in acido urico, durante tutto lo sviluppo larvale, anche perchè dai dati (Tav. I e Tabella II) raccolti nel 1942 tanto sulla razza Awojiku che sull'incrocio « Ascoli bivoltini », il tenore in acido allantoinico, espresso in mgr. di allantoina, variava con un comportamento caratteristico: alte concentrazioni subito dopo le mute e abbassamento notevole, durante il sonno. Questo anno ho preso in esame solo la razza bivoltina Awojiku nel suo II° allevamento (estivo, in luglio). Ho dosato sia l'acido allantoinico che l'acido urico nei bachi in toto, per tutto lo sviluppo larvale, prelevando i bachi giornalmente, fino alla IV^a muta. In seguito poichè i bachi erano troppo grossi e sarebbe stato necessario eseguire parecchie determinazioni individuali (per rilevarne un valore medio attendibile) ho preferito dosare giornalmente solo l'acido allantoinico nel sangue per tutta la V^a età fino alla filatura (anche in II^a trama di bozzolo).

Dalla Tabella II si può rilevare un andamento caratteristico delle variazioni dell'acido allantoinico calcolato per 100 individui.

Ogni età presenta una curva di determinata ampiezza e con una cuspide la cui altezza va aumentando man mano che dalla prima si passa alla V^a età.

La concentrazione in acido allantoinico da minima (quasi tracce) alla nascita o durante il sonno va aumentando dopo la muta fino a un massimo, dopo di che decresce di nuovo fino a ridursi a minima in vicinanza del nuovo sonno. Questo per tutte le età dalla I^a alla V^a. In V^a età lo stesso andamento si verifica per il sangue: cioè si ha un forte aumento subito dopo la IV^a muta ed una lenta ricaduta fino a maturità mentre poi durante la filatura (nei « prima trama » e tanto più nei « seconda trama ») l'acido allantoinico scompare.

(*) Lavoro compiuto nel Centro di Genetica del C.N.R. presso l'Istituto « Spallanzani » dell'Università di Pavia.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(1) C. MANUNTA, *Sul metabolismo dell'azoto nelle varie razze di bachi da seta.* 1° *L'acido allantoinico nella razza bivoltina giapponese Awojiku.* « Scientia Genetica », *3*, 48–55; 2° *Acido allantoinico ed acido urico durante la maturazione nel sangue di varie razze ed incroci.* « Scientia Genetica », *3*, 56–65 (1947).

TABELLA I.

Variazioni del contenuto in acido allantoinico (espresso in mgr. di allantoina) nel corpo dei bachi (in toto) durante lo sviluppo, nell'allevamento estivo (II°), 1942 della razza Awojiku e dell'incrocio « Ascoli bivoltini ».

STADIO	N. bachi	Peso	Contenuto in acido allantoinico		
			trovato	calcolato	
				p. 100 gr.	p. 100 bachi
			Awojiku		
I° sonno	40	0,179	0,0018	1,02	0,004
mutati I^a	40	0,156	0,0136	8,70	0,033
I° pasto II^a età	40	0,228	0,0049	2,17	0,012
2° giorno II^a età	30	0,303	0,0114	3,70	0,038
II° sonno	40	0,767	0,0124	1,61	0,031
mutati II^a	30	0,573	0,2960	51,65	0,980
3° g. III^a età	10	1,095	0,0187	1,80	0,187
4° g. III^a età	10	1,150	0,0197	1,71	0,197
III° sonno	10	1,120	0,0078	0,70	0,078
mutati III^a muta	10	0,990	0,2800	28,18	2,280
I° pasto IV^a età	10	1,778	0,2000	11,22	2,000
2° g. IV^a età	10	2,390	0,1500	6,03	1,500
3° g. IV^a età	10	3,400	0,0720	2,12	0,720
IV° sonno	10	5,030	0,0057	0,11	0,056
mutati IV^a	10	4,850	0,7400	15,40	7,400
			Ascoli bivoltini		
I° pasto I^a età	30	0,180	0,0045	2,50	0,015
I° sonno	30	0,230	0,0030	1,30	0,010
mutati I^a	30	0,200	0,0174	8,70	0,051
I° pasto III^a età	40	1,199	0,0739	6,16	0,185
II° sonno	40	0,842	0,0160	1,90	0,400
mutati II^a	30	0,543	0,4950	88,10	1,650
3° g. III^a età	10	0,835	0,0562	6,85	0,562
III° sonno	10	1,090	0,0114	1,04	0,104
mutati III^a	10	1,010	0,3900	38,61	3,900
I° pasto IV^a età	10	1,550	0,1680	10,80	1,680
3° g. IV^a età	10	2,850	0,0375	1,32	0,375

TABELLA II.

Variazioni del contenuto in acido allantoinico (espresso in mgr. di allantoina) nel corpo dei bachi (in toto) durante le età I–IV^a e nel sangue durante la V^a età nell'allevamento estivo (II) 1947 di razza Awojiku.

STADIO	N. bachi	Peso	Contenuto in acido allantoinico		
			trovato	calcolato	
				p. 100 gr.	p. 100 bachi
25/6 I^a età.	50	0,030	0,0010	3,33	0,002
26/6 I^a età	50	0,119	0,0022	1,85	0,004
27/6 I^a età.	50	0,241	0,0055	2,32	0,011
28/6 I° sonno	50	0,243	0,0017	0,70	0,003
29/6 mutati I^a	50	0,226	0,0340	16,04	0,068
29/6 1° pasto II^a età .	50	0,312	0,0310	10,00	0,062
30/6 2° giorno II^a età	50	0,844	0,0220	2,60	0,044
1/7 3° g. II^a età . .	50	1,057	0,0083	0,80	0,017
1/7 II° sonno	50	0,905	0,0011	0,12	0,002
1/7 mutati II^a	40	0,831	0,0825	9,92	0,183
1/7 1° p. III^a età . .	40	0,992	0,1700	17,00	0,425
2/7 2° g. III^a età . .	20	0,878	0,1110	12,80	0,555
3/7 3° g. III^a età . .	10	0,874	0,0220	2,50	0,220
4/7 4° g. III^a età . .	10	1,200	0,0150	1,25	0,150
4/7 III° sonno . . .	10	1,060	0,0035	0,22	0,035
4/7 mutati III^a . . .	10	0,912	0,0300	3,30	0,300
4/7 1° p. IV^a età . .	10	1,315	0,7770	59,00	7,770
5/7 2° gr. IV^a età .	10	2,100	0,2200	10,50	2,200
6/7 3° g. IV^a età . .	10	3,920	0,1400	3,57	1,400
6/7 IV° sonno. . . .	10	4,060	0,0022	0,05	0,022
7/7 mutati IV^a . . .	10	3,940	0,1750	4,44	1,750
Analisi dell'emolinfa					
8/7 1° g. V^a età. . .	30	20,2	1,12	per 1 cc. di emolinfa	
9/7 2° g. V^a età . . .	10	10	0,45	» »	»
10/7 3° g. V^a età . .	10	16	0,44	» »	»
11/7 4° g. V^a età. . .	10	18,2	0,12	» »	»
12/7 5° g. V^a età. . .	10	14,5	0,015	» »	»
13/7 6° g. I^a trama .	10	12,9	tracce	» »	»
13/7 II^a trama .	10	12			

TABELLA III.

Variazioni del contenuto in acido urico nel corpo dei bachi (in toto) durante le età I–IV^a nell'allevamento estivo (II) 1947 di razza Awojiku.

STADIO	N. bachi	Peso	Contenuto in acido urico		
			trovato	calcolato	
				p. 100 gr.	p. 100 bachi
25/6 I^a età	50	0,032	0,21	6,40	0,41
26/6 I^a età	50	0,106	0,54	5,10	1,08
27/6 I^a età	50	0,222	0,53	2,40	1,06
28/6 I° sonno	50	0,224	0,55	2,50	1,10
29/6 mutati I^a	50	0,249	0,54	2,17	1,08
29/6 1° p. II^a età . .	50	0,311	0,53	1,70	1,06
30/6 2° g. II^a età . .	50	0,830	0,63	0,76	1,26
1/7 3° g. II^a età . .	50	1,066	0,65	0,60	1,30
1/7 II° sonno	40	0,841	1,60	1,90	4,00
1/7 mutati II^a	40	0,791	0,65	0,80	1,30
1/7 1° p. III^a età . .	40	0,871	1,50	1,70	3,75
2/7 2° g. III^a età . .	20	0,801	0,72	0,90	4,50
3/7 3° g. III^a età . .	10	0,820	0,66	0,85	6,60
4/7 4° g. III^a età . .	10	1,240	1,05	0,90	10,05
4/7 III° sonno.	10	1,060	1,10	1,03	11,00
4/7 mutati III^a. . . .	10	0,912	0,88	0,96	8,80
5/7 1° p. IV^a età . .	10	1,320	0,90	0,68	9,00
6/7 IV° sonno.	10	4,060	1,76	0,43	17,60
6/7 mutati IV^a. . . .	10	4,000	1,70	0,42	17,00

Sembrerebbe avvalorata *l'ipotesi che nel lavoro della filatura l'acido allantoinico venga interamente consumato, passando traverso gli stadi intermedi di urea e acido gliossilico ed infine di acido ossalico.* Una conferma dell'attendibilità di tale ipotesi si potrebbe avere dal dosaggio dell'acido ossalico durante tutta la V^a età.

I dati relativi all'acido urico riassunti nella Tabella III non chiariscono il problema se acido urico sia utilizzato o sintetizzato a partire da acido allantoinico, in quanto i dati non sono molto concordanti. Infatti se in II° sonno si ha un brusco innalzamento ed un subito abbassamento dopo la muta, lo stesso non si può dire per III° e IV° sonno e rispettive mute. Non è evidente

un netto parallelismo, come si è riscontrato invece per il sangue negli stadi di maturità e di massimo crescimento.

Molto probabilmente *i fenomeni qui risultano complicati dalla grande quantità di urati e di altre basi puriniche accumulati nell'ipoderma che ostacolano la chiara messa in evidenza di un comportamento differenziale nei vari stadii di sviluppo*. Bisognerebbe condurre le analisi solo sull'emolinfa. Con un po' di pazienza forse ciò potrà effettuarsi a partire dalla III^a^ età, sacrificando, per ottenere 1 cc. di emolinfa, da questi stadi così poco avanzati, almeno qualche centinaio di individui. È quello che mi propongo di fare in un prossimo allevamento.

Biologia. — *L'orientamento delle fibre nervose intracentrali indagato sperimentalmente in riferimento alla fibra di Mauthner* (*). Nota di ALBERTO STEFANELLI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Le mie ricerche sperimentali sulle cellule di Mauthner delle larve di Rana, sono una conseguenza e uno sviluppo degli studi morfologici sui centri tegmentali dei Vertebrati, che ho iniziati nel 1932 con le osservazioni sui Petromizonti, e dopochè ho potuto mettere in evidenza questi elementi (oltre ad una coppia premauthneriana) in alcuni anuri allo stadio larvale (1). Le prime ricerche sperimentali sulle cellule di Mauthner hanno mirato alla identificazione dei fattori determinanti il differenziamento di questi elementi, considerato non solo nella sua condizione generale, proprio delle cellule nervose, ma sopratutto in quello particolare, peculiare di questo elemento (2). La condizione che ho particolarmente presa in considerazione nei miei primi lavori è stata la forma, la grandezza e l'orientamento del corpo cellulare, ma già avevo potuto fare delle osservazioni sul comportamento dei prolungamenti, sia dei dendriti che del neurite, in particolari condizioni sperimentali. Alcuni dati accertati sono stati resi noti nei diversi lavori pubblicati sull'argomento. Così, resomi conto della condizione strutturale veramente favorevole del neurone mauthneriano, ho voluto utilizzarlo per esperienze miranti all'analisi dei fattori che entrano in gioco nell'accrescimento, nell'orientamento e nella decussazione delle fibre nervose intracentrali, poichè, se per le fibre periferiche vi è un certo numero di lavori sperimentali, assai

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » della Università di Roma, diretto dal prof. G. Cotronei.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(1) A. STEFANELLI, « Boll. Zool. », 1942, Anno XIII; STEFANELLI e OSTI, Ibidem, 1942.

(2) A. STEFANELLI, « Acta Acc. Pont. », 1945, VIII, n. 16; « Boll. Soc. it. Biol. Sperim. », 1945, vol. XX, note I, II, III; « Historia Naturalis », 1946, Anno I, n. 4; « Rend. Acc. Lincei », 1946, ser. VIII, vol. I fasc. 10; « Mem. Acc. Lincei », 1947, ser. VIII; « Rend. Acc. Lincei », 1947, ser. VIII, vol. II, fasc. 5; « Ric. di Morfol. », 1947, vol. XXII. Vedi anche i lavori di: F. ROSSETTI, « Boll. Soc. it., Biol. Sperim., » 1947, vol. XXIII, f. 4; L. FORTI, « Rend. Acc. Linc. », 1947, ser. VIII, vol. II, f. 2.

poco è stato fatto per le fibre che costituiscono la tessitura del sistema nervoso centrale.

In questi ultimi mesi, con l'arrivo di arretrati di riviste americane, ho potuto prendere visione di alcuni lavori riguardanti i Teleostei e gli Anfibi urodeli in cui certe esperienze mirano alla soluzione di problemi da me indagati negli Anuri, per quanto io li abbia affrontati da un punto di vista più generale: infatti io mi sono essenzialmente servito della cellula di M., come riferimento su una unica cellula, per i problemi generali del differenziamento; la concordanza di alcune esperienze, tra le molte da me fatte, riguardano fatti particolari del quadro generale da me tracciato.

Detwiler (1940)(3) nell'*Amblystoma punctatum* ruota negli embrioni metà allungato di 140° e nota che in genere le fibre di M. si dirigono caudalmente come di norma. La Oppenheimer (1941, 1942) descrive nelle larve di *Fundulus eteroclitus* delle condizioni delle cellule di M. verificatesi casualmente trapiantando la regione bulbare nel telencefalo. In alcuni casi si differenzia la cellula di M. in questa regione eterotipica; la fibra per lo più non si decussa: nei rari casi di decussazione nel diencefalo l'autrice considera il fenomeno diretto da fattori abnormi. Essa interpreta la normale decussazione come dovuta in un primo tempo all'orientamento della cellula e in secondo tempo, dopo che la fibra è passata al lato opposto, al sopraggiungere del fascicolo longitudinale mediale (f.l.m.) che trascinerebbe con se la fibra per una sorta di neurotropismo. Il Piatt (1943, 1944, 1947), trapiantando in embrioni di *Amblystoma* in cui il f. l. m. è già differenziato cellule di M. più giovani, nota come la decussazione avvenga lo stesso mentre sarebbe stato logico aspettarsi un decorso omolaterale per l'azione del f.l.m. omolaterale che è il primo ad essere incontrato della fibra di M. in accrescimento, secondo la teoria della Oppenheimer. Nota anche, se la cellula è ruotata, come la fibra non si diriga sempre caudalmente ma anche in senso craniale e pensa che nella direzione caudale della fibra di M. non intervengano degli stimoli sufficentemente forti (ma evidentemente, data l'età più avanzata dell'ospite, questi stimoli sono già assopiti!).

Questi risultati, conseguiti con esperienze diverse dalle mie e su un altro materiale, mi permettono di fare una più ampia e convalidata discussione di quanto io ho potuto mettere in luce in queste e nelle passate ricerche.

Per una più minuta analisi e per un controllo dei fattori messi in evidenza con le mie passate ricerche ho eseguiti altri cinque gruppi di esperienze su embrioni di *Rana esculenta* allo stadio di bottone codale (preparati allestiti col metodo di Bodian).

a) Interponendo un lembo ectodermico tolto dal ventre di un donatore nel rafe ventrale rombencefalico per impedire la decussazione mauth-

(3) DETWILER, 1940, « J. Exp. Zool. », *84*; 1943. Ibidem, *92*; OPPENHEIMER, 1941, J. Comp. Neur. », *74*; 1942, «Anat. Rec.», *83*; « J. Comp. Neur. », *77*; PIATT, 1943, « J. Comp. Neur. », *79*; 1944, Ibidem. *80*; 1947. Ibidem, *86*.

neriana (schemi *b*, *d*, *e*, *f* della fig. 1)[4], ho ottenuto un risultato curioso che non sono ancora in grado di spiegare, ma che spero delucidare con preparati di stadi intermedi. Infatti nella zona del trapianto ectodermico si osserva un cospicuo zaffo di tessuto nervoso. Poichè l'allungato non presenta

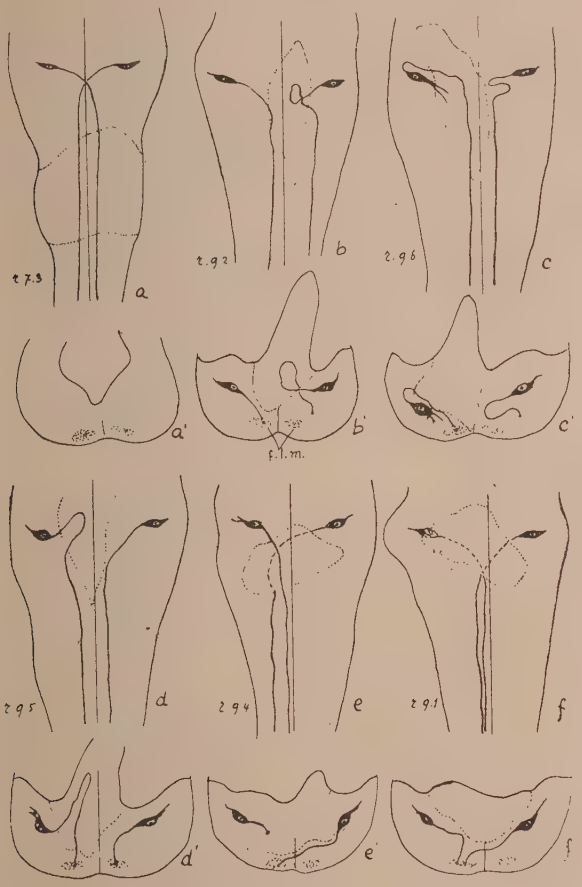


Fig. 1.

apparenti riduzioni c'è da domandarsi se tali cellule provengano per cambiamento di destino delle cellule ectodermiche o se il frammento, con il suo lento dissolvimento, abbia destata una attività riproduttiva abnorme nella zona. Nei vari casi operati si osserva che la fibra di M. che si dirige in un primo tempo decisamente verso la parte mediale, giunta nel territorio nuovo perde ogni definita direzione; dopo un « vagabondaggio » più o meno esteso essa si dirige decisamente in direzione caudale raggiungendo il midollo spi-

(4) Con la punteggiatura è limitata l'area trapiantata; è rappresentata la proiezione frontale e la rispettiva sezione trasversa.

nale e percorrendolo nella parte omolaterale o lungo il f. l. m. o anche fuori di esso. Il disorientamento delle fibre a contatto con la zona nuova potrebbe essere determinato o dalla diversa costituzione strutturale del substrato, quale struttura guida delle fibre in accrescimento nel senso di Weiss [5], o ad una azione isolante del tropismo irradiantesi dalla parte controlaterale. Alcune esprienze di Piatt di trapianto del neurone mauthneriano nel telencefalo dimostrano un comportamento che definisco di « vagabondaggio » assai più manifesto che nei miei casi e senza che la fibra ritrovi la sua strada: nelle mie esperienze dove la causa disorientante è limitata, la fibra ritrova la sua direzione in senso caudale anche lungo una via del tutto nuova quale è il f.l.m. omolaterale [6] o anche fuori di esso. Questo comportamento non può essere interpretato se non in rapporto a stimoli tropici direttivi caudalmente, escludendo quindi il valore alla struttura guida.

b) Nelle esperienze simili alle precedenti, ma ruotando un neuroblasta di M. di 180° così da portare lateralmente il polo mediale della cellula (schema *c* fig. 1), si è verificato il tropismo nei riguardi del neurite similmente a quanto avevo potuto constatare col solo capovolgimento della cellula (esperienza 25 *a* della mia Memoria): il territorio nuovo interposto non diminuisce l'azione attrattiva verso la fibra.

c) Con il trapianto di un segmento mesencefalico caudalmente allo allungato (schema *a* fig. 1) ho potuto constatare come le fibre discendenti bulbari, e con esse le fibre di M., attraversino questo territorio nuovo proseguendo poi nel midollo spinale. Questo dimostra che lo stimolo che dirige queste fibre caudalmente è così forte da far superare un tale territorio di natura completamente diversa da quella dei normali territori attraversati.

d) Nei donatori della esperienza precedente, privati del mesencefalo e quindi con il f. l. m. ridotto a pochissime fibre (nascendo il f. l. m. in prevalenza da questo settore encefalico), si osserva una decussazione normale delle fibre di M. ed un normale decorso. Questa esperienza dimostra come il f.l.m. non abbia influenza sul decorso in senso caudale delle fibre di M. in accordo alle esperienze di altra natura di Piatt.

e) Trapiantando caudalmente all'allungato un segmento di allungato di altro embrione donatore si osserva lo sviluppo delle due nuove cellule di M. e il normale decorso delle loro fibre. In alcuni casi una o entrambe le fibre presentano un decorso omolaterale. Con queste esperienze, a differenza dei casi di Piatt, le fibre ritrovano la loro normale via di decorso. Ma nei miei casi la cellula è stata trapiantata in una sede che si trova lungo il normale decorso della fibra; ciò significa che lo stimolo direzionale agisce lungo tutta la zona del decorso della fibra di M.

(5) P. Weiss, 1943, « J. Exper. Zool. », 100.

(6) Ricordo come io abbia dimostrato un decorso omolaterale nelle condizioni normali, per le deduzioni che se ne possono fare, delle fibre di Müller e tegmentali dei Petromizonti, dove misi in risalto i rapporti di queste fibre con il f. l. m.; « Arch. Anat. Embriol. », XXXI, 1933.

Rimando per ragioni di spazio al lavoro in esteso la discussione analitica di questi risultati e di quelli degli autori citati e mi limito qui a definire le conclusioni a cui sono giunto.

1. La proprietà di accrescimento (lunghezza specifica della fibra di M.) è acquisita al momento della determinazione istogenetica particolare quale è stato definito nelle mie precedenti ricerche. La cellula acquisisce in questo momento il proprio «potenziale di prolungamenti» che viene messo in atto purchè vi siano le condizioni spaziali e strutturali del substrato adeguate. Ciò non nega che vi possano essere fattori esterni che possano agire per un accrescimento più ampio o ramificazioni abnormi (casi di Piatt) o per una inibizione (condizioni varie di isolamento).

2. La direzione di accrescimento risulta dominata da fattori tropici: la considerazione di un valore esclusivo o preminente della struttura del substrato che funzionerebbe come un binario di guida e come stimolo all'accrescimento non è accettabile in base ai casi di raggiungimento dei normali territori di connessione funzionale anche per via diversa dalla normale (lungo il f. l. m. omolaterale o fuori di questo) o attraversando territori nervosi eterotipici. Il « vagabondaggio » della fibra in territorio abnorme è la dimostrazione del potenziale di prolungamenti insito nella cellula e che si estrinseca anche in assenza di stimoli specifici e della struttura specifica del substrato.

3. Tuttavia la struttura del substrato ha valore nel conferire alla fibra lungo il suo normale percorso, il peculiare aspetto. Un territorio eterotipico inserito sul suo percorso, sebbene possa venir superato, altera l'andamento della fibra. Il valore della struttura del substrato nell'accrescimento delle fibre nervose non può essere negato, come è stato magistralmente dimostrato da Weiss (1933, 1934)[7], nelle culture *in vitro*; nelle culture non agiscono altri stimoli mentre *in vivo* esso non è più il fattore direttivo fondamentale ed è sopraffatto e mascherato dalla azione dei tropismi.

4. Gli stimoli tropici che agiscono sulla fibra provengono dai territori specifici che normalmente vengono da questa attraversati (per la fibra di M. sono bulbari e spinali) e si attuano solo nel periodo della ontogenesi in cui si manifesta l'accrescimento della fibra. La constatazione fatta da Piatt della mancanza di questi stimoli trapiantando neuroblasti di Mauthner in embrioni ad uno stadio di differenziamento più avanzato sono significativi al riguardo. Che l'azione sia localizzata nei territori lungo il percorso della fibra è dimostrato dal fatto che essa non ritrova la sua strada se la cellula è trapiantata in zona eterotipica lontana dalla normale via di accrescimento della fibra, mentre la fibra trova la giusta direzione se la cellula è trapiantata in posizione eterotipica ma lungo il percorso che la fibra normalmente segue, così che può ritrovare il suo equilibrio nel proprio campo di azione.

5. Allo stadio di bottone codale, negli embrioni di rana, il tropismo che dirige caudalmente la fibra di M. è presente e così forte che essa può

(7) P. WEISS, 1933, «Am. Nat.» *67*; 1934, « J. Exep. Zool. », *68*.

superare territori eterotipici (quale un settore mesencefalico) o seguire un percorso fuori dalla via normale.

6. Risulta quale fattore accertato della decussazione la « presenza » del territorio omologo controlaterale o di una parte di esso. Sono dimostrative al riguardo le mie esperienze già illustrate in altri lavori con espianti e trapianti in isolamento: la fibra tende nella grandissima maggioranza dei casi a portarsi nella zona controlaterale; in questi casi sono da escludersi fattori fisiologici e neurobiotattici in quanto nella piccola regione controlaterale regolata non sono differenziati altre vie o centri nervosi.

7. La natura di questi stimoli tropici è tuttora difficilmente interpretabile; appare però evidente nel caso specifico della fibra di M. come non si possa considerare una azione neurobiotattica nel senso di Kappers in quanto essa è legata alla attività neurotropica che emana da una preesistente attività nervosa, mentre in questo caso, specialmente se ci si riferisce agli espianti, tale attività può essere completamente esclusa.

Antropologia. — *Il significato meccanico delle variazioni promeriche.* Nota (*) di A. Sacchetti, presentata (**) dal Corrisp. S. Sergi.

Con precedenti lavori presentati a questa Accademia (1), ho dimostrato la necessità, teorica e pratica, di impostazione degli studi sulle ossa lunghe dell'arto inferiore (e particolarmente sul femore) secondo un « rigoroso principio fisiotopografico » che « solo », assurgendo ad una visione sintetica, « può chiarire l'andamento delle linee di forza nel quadro di una concreta valutazione funzionale della morfologia dell'osso considerato » (2).

Il procedimento consiste nel subordinare ogni indagine all'orientamento meccanico dell'osso secondo determinati *piani* ed *assi*, i quali si riferiscono direttamente ai punti d'articolazione fondamentali sulle due estremità epifisarie.

In particolare, per il femore, si è stabilito un *piano sagittale* ed un *piano frontale* d'orientamento (3). Essi sono perpendicolari fra loro e si incontrano formando una verticale che è il luogo geometrico dell'*asse fisiologico* del femore (ATci) a sua volta passante in corrispondenza del centro interno (meccanico) della testa (Tci).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Antropologia della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(1) Cfr. le Note dei « Rendiconti ». Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, ser. VIII, vol. I, fasc. 6: *L'orientamento fisiologico del femore umano nelle sue normali condizioni morfomeccaniche* e *Sulla variabilità nelle normali condizioni morfomeccaniche del femore umano.* Inoltre la Memoria: *Ricerche sulle condizioni architetturali e morfomeccaniche del femore umano. I presupposti, le strutture e l'orientamento,* preceduta da una relazione di Dante De Blasi e Sergio Sergi, con XXXIV tavole fuori testo. «Memorie fisiche», ser. VIII, vol. I, fasc. 2, 1947 (presentata il 18 maggio 1946).

(2) D. De Blasi e S. Sergi nella relazione citata.

(3) V. le modalità tecniche in appendice alla Memoria cit.

Orientato il femore sui suoi piani meccanici si possono evidentemente proiettare i più disparati contorni orizzontali dell'osso sulla traccia corrispondente dei due piani frontale e sagittale [4]. Ciò posto per *promeria* si intende la posizione più o meno avanzata di qualsiasi parte del femore rispetto al piano frontale, posizione rilevabile anche metricamente sulla base delle suddette proiezioni grafiche. Pertanto si può parlare di *promerie tangenziali anteriori o posteriori* quando rispettivamente ci si riferisce a misure di distanza (in millimetri) di tangenti anteriormente o posteriormente ai contorni orizzontali del femore rispetto al piano frontale.

Facendo riferimento ai sette seguenti livelli standard, prescelti per il femore [5], le abbreviazioni delle misure di *promeria tangenziale* sono:

Livello	Misure	
	di promeria tangenziale anteriore	di promeria tangenziale posteriore
1. macrotrocanterico	f_1	${}_1f$
2. microtrocanterico . . .	f_2	${}_2f$
3. diafisario superiore . . .	f_3	${}_3f$
4. diafisario mediosuperiore .	f_4	${}_4f$
5. diafisario medioinferiore .	f_5	${}_5f$
6. diafisario inferiore . . .	f_6	${}_6f$
7. popliteo inferiore . . .	f_7	${}_7f$

Sotto l'ascissa della figura 1 si vede esemplificata la successione dei contorni esterni dell'osso in corrispondenza dei singoli livelli ed è indicata la rilevazione grafica di ciascuna promeria con piccole tratteggiate. La comune linea orizzontale rappresenta la proiezione del piano frontale d'orientamento.

Disponendo di un materiale sperimentale, per quanto molto ristretto, sufficiente a tentare un saggio sulla *variabilità individuale intrarazziale*, ho calcolato per ciascuna rilevazione promerica lo scostamento quadratico medio (σ), secondo una formula pratica adatta allo scopo [6], e poi, in vista delle *correlazioni topografiche* fra vari livelli, il coefficiente di correlazione (r) di Bravais–Pearson.

Numero di individui, sempre gli stessi: 23, fuegini ed europei. Le elaborazioni però *non tengono conto* – per via di annullamento – *delle differenze di gruppo (razza)*.

Nel caso nostro si protrebbe parlare di *variabilità topografica delle sezioni* ed in tal senso il problema assume il suo vero carattere architetturale. Per il femore ci troviamo di fronte ad una vera e propria costruzione che deve rispondere a determinate necessità meccaniche, statiche e fisiologiche. L'esame

(4) V. le modalità nella stessa appendice insieme alle tavole XXXIII e XXXIV.

(5) V. la stessa appendice cit.

(6) Cfr. A. SACCHETTI, *I problemi della variabilità dei caratteri. In biometria: Nel quadro delle relazioni fra scienze statistiche o matematiche e scienze biologiche*. Ed. « Ist. Ital. di Antropologia », Roma 1945, Appendice B.

osteologico interno ci ha rivelato, per così dire, quali siano le strutture fondamentali (i muri maestri) e quali invece le più variabili soprastrutture. Ora, all'esame morfologico esterno, si deve chiedere un risultato analogo da poter mettere a confronto col precedente per l'interpretazione di sintesi. A priori infatti si deve prevedere che se il femore non è un *solido omogeneo* e le strutture interne hanno il chiaro significato meccanico finora messo in evidenza, la variabilità topografica delle sezioni esterne non può essere uni-

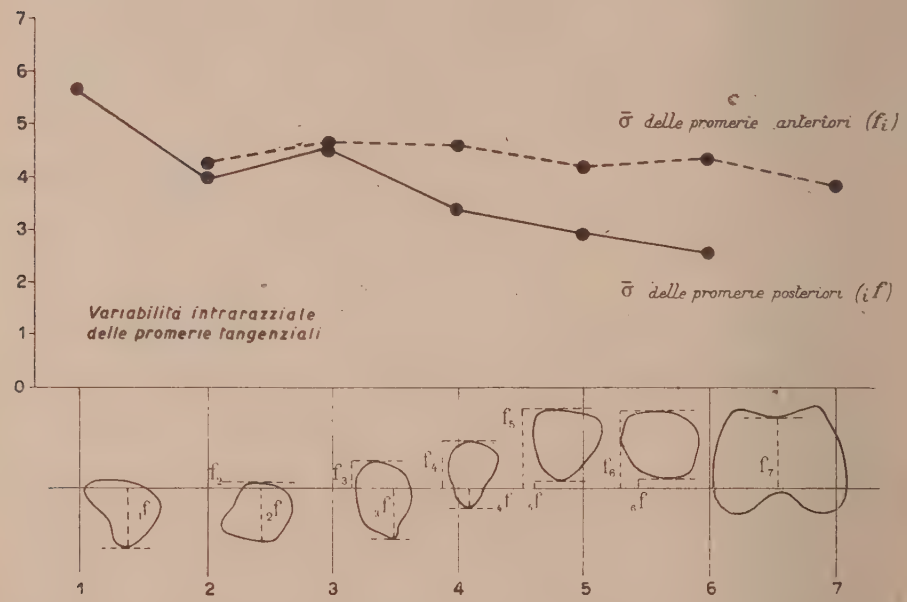


Fig. 1. – Grafico esprimente sulle coordinate ortogonali l'entità delle variazioni medie individuali ($\bar{\sigma}$) di ciascuna promeria anteriore (f_i) e posteriore ($_if$) corrispondentemente ai livelli singoli di proiezione che sono rappresentati in ascisse (da 1 a 7). In basso è esemplificata la proiezione dei contorni del femore su ciascun livello ed è indicata la misura delle singole promerie (con lineette tratteggiate). La linea orizzontale che attraversa le proiezioni e il tracciato del *piano frontale*, le verticali segnano invece il tracciato del *piano sagittale* di riferimento per ciascuna sezione femorale.

forme attraverso i vari livelli, ma deve seguire un determinato comportamento in modo da ridursi significativamente là dove si richiede maggiore sforzo normale in più stretto rapporto con le linee trabecolari fondamentali di resistenza dell'osso. In altre parole si può prevedere che le strutture esterne, come le interne e corrispondentemente ad esse, hanno fra loro un diseguale significato meccanico, alcune essendo più direttamente connesse alla staticità generale di tutta la costruzione, altre invece essendo più facilmente variabili per l'adattamento alle diversità funzionali dell'individuo.

Ma veniamo schematicamente ad alcuni fatti per lasciare ogni più profonda analisi ad una successiva Memoria.

Seguo la « traduzione » – per così dire – dei dati sperimentali nel grafico della figura 1. Ed ecco ciò che più colpisce ai fini della richiesta interpretazione meccanica delle strutture.

1° L'alta variabilità della promeria tangenziale posteriore sul livello macrotrocanterico (1°), in quanto colpisce la soprastruttura trabecolare della « cresta intertrocanterica », indipendente dallo sviluppo e dall'orientamento spaziale del fascio trabecolare sottostante, detto « arciforme », il quale è fondamentale, ad esempio, per la statica di tutto l'osso.

2° La pratica equivalenza della variabilità per le promerie anteriori e posteriori nei livelli alti (2° e 3°) mentre le due spezzate del grafico divergono reciprocamente verso i livelli più bassi.

Il comportamento simile per il terzo livello (il secondo è chiarito meglio dalle correlazioni) fa pensare al *significato meccanico analogo*, per la statica dell'osso, *fra le porzioni anteriori e posteriori così come si è dedotto dall'analisi dei fasci trabecolari sottostanti al piccolo trocantere, dell'arciforme e del macrotrocanterico* (7). Distalmente invece, dove le resistenze cambiano, a carico soprattutto della lamina diafisaria posteriore (8), si osserva per questa una sicura riduzione di variabilità. Viceversa per la lamina anteriore la variabilità è distalmente molto poco inferiore a quella prossimale! *Nella divergenza*, pertanto, *fra le promerie anteriori e posteriori si deve scorgere il fattore meccanico più profondo a cui tendevamo con le nostre ricerche.*

Per quanto riguarda il metodo nella comparazione delle variabilità dei contorni ai singoli livelli non si è fatto ricorso ad alcun coefficiente relativo in quanto si tratta di misure proiettive le quali hanno interesse nel reale loro *comportamento medio rispetto ai piani d'orientamento dell'osso e non come misure dimensionali*. La progressività regolare, quasi sorprendente se non fosse confermata da altri numerosi rilievi (che qui non posso neppure ricordare), circa l'andamento dei valori numerici attraverso i vari livelli, senza inspiegabili salti, fa ritenere infine probativo anche il materiale di studio nonostante la sua scarsità.

Per lo studio delle correlazioni fra promerie di diversi livelli ho fatto per ora riferimento costante al 6° (*diafisario inferiore*) *nel senso che tutte le promerie sono state studiate in correlazione con la diafisaria inferiore tangenziale posteriore* ($_6f$). Il perchè della scelta si comprende facilmente dopo la documentazione della minima variabilità topografica della zona, espressa dalla promeria $_6f$, in rapporto alla sua interpretazione meccanica.

Nella figura 2 ho rappresentato con una successione verticale, a sinistra, i singoli livelli (dal primo al sesto) e, corrispondentemente, come in un profilo di proiezione su un piano sagittale, rispetto alla traccia verticale dell'asse fisiologico (ATci), le singole promerie medie anteriori e posteriori. Si ha così un'idea schematica dell'andamento medio del profilo diafisario del femore anche rispetto al *piano frontale*. Sulla destra del grafico l'istogramma rappre-

(7) V. il cap. 3, Parte II della Memoria cit. sul femore.
(8) V. il cap. 4, Parte II, come nella nota precedente.

senta con colonnine bianche e nere, rispettivamente, l'intensità della correlazione fra la promeria $_6f$ e tutte le altre: anteriori e posteriori.

I risultati sono fondamentali se si mettono appena in rapporto con la rappresentazione grafica affiancata del profilo diafisario rispetto all'asse fisiologico (ATci). In tal senso infatti è quanto mai evidente il significato meccanico delle correlazioni topografiche fra i vari livelli. In alto prevalgono le correlazioni con le promerie anteriori, in basso quelle con le promerie posteriori parallelamente alla connessione dei profili al piano frontale d'orientamento dell'osso.

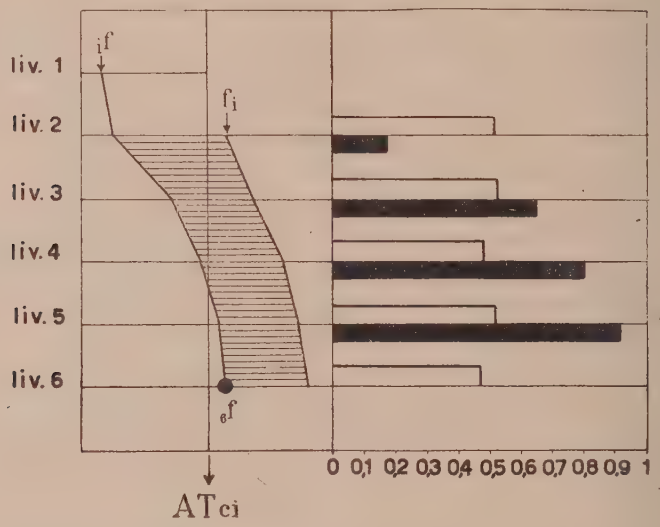


Fig. 2. – A sinistra sono rappresentati schematicamente i singoli livelli di proiezione prescelti sul femore e, in profilo laterale rispetto all'asse fisiologico (ATci), le singole *promerie* medie anteriori (f_i) e posteriori ($_if$). L'area tratteggiata che in esse risulta compresa dà pertanto un'idea schematica dell'andamento medio del profilo diafisario del femore anche rispetto al *piano frontale* che contiene l'ATci. L'istogramma, a destra del grafico e per ciascun livello, rappresenta l'intensità della correlazione topografica (espressa in valori del coefficiente r) fra la promeria $_6f$ (la meno variabile) e, rispettivamente, le promerie anteriori (colonnine bianche) e posteriori (col. nere).

È vero che il punto fisso di riferimento è $_6f$: una promeria posteriore, e che quindi avvicinandosi gradualmente ad essa la correlazione deve aumentare fino al massimo di 1. Ma il fatto sperimentale rimane in tutta la sua portata quando si considera in rapporto alle corrispondenti correlazioni con le promerie anteriori. Esse infatti, se noi anche ci avviciniamo gradualmente dal secondo al sesto livello, non solo *non aumentano* ma tendono a diminuire! Viceversa le correlazioni con le promerie posteriori aumentano sì (dal 2° al 6° livello), ma fortemente ed in maniera sorprendente, tanto

che al secondo livello i coefficienti di correlazione non solo non si equivalgono per le promerie anteriori e posteriori (sul valore di 0,4 o 0,5), come si sarebbe potuto attendere, bensì da meno di 0,2 per le posteriori (*si noti che 4f è anche posteriore!*) passa a più di 0,52 per le anteriori.

La regolarità di progressione dei valori sperimentali di correlazione dai livelli alti ai bassi, come per quelli di variabilità, e la corrispondente stretta connessione che essi presentano con la situazione fisiotopografica media delle sezioni, non lasciano dubbio alcuno sulla nostra interpretazione meccanica, per cui si possono formulare le seguenti conclusioni schematiche sia pure basate su un materiale biometricamente tanto scarso.

1. *Il comportamento reciproco delle promerie tangenziali, in campo intrarazziale, si realizza in armonia con l'andamento delle linee di forza le quali presiedono alla resistenza meccanica dell'arto nelle sue linee statiche fondamentali* (v. anche la mia precedente Memoria).

2. *La variabilità individuale delle stesse promerie è strettamente connessa alla situazione fisiotopografica delle sezioni rispetto ai piani ed assi primari d'orientamento del femore.*

3. *L'eterogeneità strutturale e meccanica del solido osseo è di conseguenza sicuramente confermata in rapporto all'andamento delle singole direttive di resistenza funzionale alle più disparate sollecitazioni.*

4. *La correlazione esistente fra le singole promerie rivela i diversi tipi di connessione meccanica reciproca che legano fra loro i vari livelli femorali.*

5. *Sia pure solo in senso sagittale (quello di rilevazione delle promerie che ho analizzato in questa Nota) risulta ancora una volta dimostrata la validità meccanica e fisiologica dei piani ed assi d'orientamento presceiti, insieme al connesso significato delle singole linee di forza, stabilite, nei citati precedenti lavori, sopratutto in base allo studio delle strutture trabecolari.*

6. *In particolare il significato meccanico della bassa variabilità promerica del sesto livello e quindi, più distalmente, di tutto il piano popliteo trova anche una logica interpretazione nell'andamento prevalente degli osteoni lungo il decorso diafisario, il quale converge in basso, da ogni lato, sempre verso lo stesso piano popliteo* (v. la mia Memoria citata ed il contributo del Sinelnikov in essa ricordato).

Queste sono le conclusioni essenziali che si possono trarre da una preventiva comunicazione sul rilievo del comportamento promerico.

Citologia. — *Il lacunoma osservato col microscopio a contrasto di fase.* Nota di A. Corti, presentata (*) dal Corrisp. G. Vernoni.

Le modificazioni differenziali della luce che attraversa le preparazioni microscopiche variamente colorate ci hanno fornito prezioso ausilio per le individuazioni delle sostanze, indagate in funzione della elettività dei cromoreagenti: l'onda luminosa che attraversa dette sostanze subisce le modificazioni per il diverso assorbimento delle diverse frequenze determinato dalle diverse colorazioni: nel procedimento fondamentale dai fisici detto «per modulazione di ampiezza». Col microscopio «a polarizzazione» si è studiato l'orientamento spaziale delle onde luminose entro le sostanze organiche: più tardi, si ebbero le osservazioni in luce di fluorescenza facendo agire il preparato per «modulazione di frequenza», in quanto, investito da radiazioni ultraviolette invisibili che assorbe, riemette radiazioni d'onda maggiori, cioè nello spettro visibile, osservabili quindi col microscopio ordinario: e con il campo oscuro ci si valse della «diffrazione» della luce.

Il fisico olandese F. Zernike, poco più di un decennio fa, prese in considerazione il fatto che la luce incidente attraversa sostanze inomogenee con velocità delle onde leggermente diverse, più lentamente nei mezzi più densi, più velocemente nei meno densi; perciò il fronte d'onda che esce da un preparato microscopico riflette in irregolarità locali le differenze di «modulazione di fase»: con ritardi e anticipi insignificanti in valori assoluti, cioè con modulazioni di fase non rilevabili nè alla visione diretta nè con la lastra fotografica. Con artifici particolari lo Zernike riuscì però a tradurre tale modulazione di fase in una modulazione di ampiezza, trasformando ritardi e anticipi in scuri e chiari percepibili dall'osservatore. Gli artifici tecnici furono portati così innanzi, fino ad ottenere anche la inversione del contrasto delle fasi, in modo che di uno stesso oggetto si possa avere e una immagine positiva e una negativa: nella prima si vedono più scuri i dettagli che presentano maggiore cammino ottico, in generale cioè di densità maggiore, nella seconda gli stessi si vedono invece più chiari, a simiglianza dell'osservazione in campo oscuro.

Non necessita dire quali vantaggi potranno venire alla indagine dei fenomeni vitali, su cellule viventi, sopraviventi, coltivate, ma pure, come vedremo tosto, su abituali preparazioni istologiche.

Dopo le prime pubblicazioni dello Zernike (1934–1935) l'invenzione fu ripresa e fatta conoscere da altri fisici, Picht, (1936–38), Loos (1941), Michel (1941), Zernike ancora (1942); e si ebbero le prime applicazioni alle indagini di biologia da Knoell (1944), Gans (1944), Bosshard (1944), v. Albertini (1946), Brice, Jones e Smyth (1946), Thomas (1947), Loguin e Baud (1947); mentre

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

ne riprendevano lo studio i fisici Bennet, Jupnik, Osterberg e Richards (1946), Didelin (1946), Payne (1947) Lachenaud (1947), Hartley (1947).

Le nostre Officine Galileo hanno ultimato lo studio di un apparecchio da offrire agli studiosi, e lo si sta costruendo (1): ho potuto valermi dell'ospitalità dell'Ufficio Ricerche delle Officine stesse, delle cortesi premure del Direttore prof. Scandone e dell'Assistente L. Ballerini per vedere quanto vantaggio poteva venire alle conoscenze di quel nuovo costituente cellulare da me individuato, e da me globalmente detto « lacunoma »: consistente di masserelle di sostanza cellulare, costanti per sede, per forma e per massa in determinati momenti funzionali nelle diverse specie cellulari, differenziate per aspetto e reazione, ben delineate dal restante citoplasma per una evidente non miscibilità, del tutto indifferenti al contatto diretto di condriosomi e del corpo nucleare. In corrispondenza della interfacie tra le due sostanze, fra le masserelle cioè del lacunoma e quelle del restante citoplasma, si verrebbero a depositare, con artifici di tecnica specifica, l'argento e l'osmio, dando origine a quelle particolari figure note col nome di « apparato interno del Golgi ».

Ho esaminato pertanto col microscopio in contrasto di fase l'ampia serie di preparazioni del lacunoma che offrii in dimostrazione al Convegno della Società Italiana di Anatomia a Bologna negli ultimi giorni dello scorso ottobre.

Le figure più complete della minuta struttura di intestino tenue di mammifero digiuno fissato col procedimento del Regaud e colorato con ematossilina ferrica, osservate in contrasto di fase positivo, sono risultate, per quanto più ci interessa, del tutto simili a quelle che mi ha offerto l'identico materiale dopo semplice fissazione prolungata in miscela osmiobicromica e non colorato, che, anche all'osservazione abituale, dà un quadro di somma evidenza del lacunoma: che vi appare quale più evidente fatto strutturale degli elementi dell'epitelio, in forma ed aspetto quale è stato da me ripetutamente descritto e figurato, con le singole zollette lacunari chiare splendenti a limiti netti, in contrasto con la restante più scura massa del citoplasma: il minor cammino ottico della sostanza lacunare conferma la interpretazione di una minor densità, di una costituzione fisica chimica più tenue. In contrasto di fase negativo le zollette del lacunoma, un po' meno regolari nel contorno, ricordano invece con precisione le più elettive deposizioni di argento e di osmio dei metodi specifici per l'apparato interno: il materiale sia fissato in miscela formolbicromica e colorato, che fissato in osmiobicromica e non colorato, dà cioè, in contrasto negativo, con le figure scure del lacunoma, quadro del tutto simile a quelli ottenuti con le fissazioni e riduzioni osmiche secondo Sjövall e Kopsch.

Da tutto ciò la mia ormai antica (1922) precisa interpretazione del lacunoma e dell'apparato interno, qual non sto a trattare in questa Nota, ma

(1) Finora, che io sappia, microscopi in contrasto di fase erano stati costruiti solo dalla Casa inglese Cooke, Troughton a. Simms e dalla Carl Zeiss di Jena.

che può essere ampiamente desunta dalle pubblicazioni elencate in calce, riceve da queste osservazioni nuova suggestiva conferma.

L'orletto cuticolare distale delle cellule villari in contrasto di fase positivo non lascia vedere la sua struttura, ma appare qual forte linea rossastra ben regolare; in contrasto negativo appare qual regolarissima fascia luminosa di una appena accennata tinta paglierina: risultando da ciò evidente una forte sua densità, un maggior cammino ottico, un maggior ritardo dell'onda luminosa che l'attraversa. I limiti laterali e basali degli stessi elementi sono pure apparsi degni di attenzione: assai chiaro in contrasto positivo, scuro in contrasto negativo, lo strato esoplasmatico più periferico, sia dei preparati colorati che dei non colorati: uno studio accurato potrà forse indicar rapporti un po' meno semplici e meno uniformi dei finora descritti fra le basi delle cellule e lo stroma di impianto, contribuendo quindi a precisare le conoscenze della vitrea: attraverso alla quale passa di necessità la totalità dei materiali assorbiti! E pure potranno essere definiti quei rapporti quasi sinciziali che le stesse cellule verrebbero a contrarre lateralmente fra loro per ponti intercellulari, ammessi, descritti da molti autori, della cui esistenza ho sempre mantenuto qualche dubbio di doverne cercare la causa negli artificiosi prodotti delle preparazioni.

Il segmento cellulare caratterizzato dai condrioconti sottocuticolari intensamente colorati nei preparati all'ematossilina ferrica appena appena lascia intravvedere col contrasto positivo una traccia del tutto indecisa di struttura filamentosa: non ostante la densa lacca artificiosa della colorazione il ricco materiale appare di scarsa densità; mentre il condrioma granulare sottonucleare risulta tanto più denso, quasi opaco, in una massa con tendenza al rossastro: vi è assai evidente la individualità dei singoli mitocondri, meglio che all'osservazione diretta; è possibile che questo metodo possa valere per individuare le cellule basigranulose. Osservando in contrasto negativo nulla appare del condrioma.

La membrana nucleare appare forte e nitida in contrasto positivo, mentre con negativo appare qual luminoso cercine: il succo nucleare nelle cellule villari è sempre chiaro, trasparente, anche col contrasto negativo; i cariosomi che si intravedono appena con questo contrasto, appaiono densi al contrasto positivo.

Da notarsi, che a differenza dei nuclei epiteliali qui detti, appaiono invece densi, opachi in contrasto positivo i nuclei dei fibrociti dello stroma, le fibre collagene essendo chiare azzurrine: ulteriore attenzione si dovrà dedicare a questo differente quadro dei nuclei di cellule di grado gerarchico ben differente, in uno stesso preparato nel quale è da escludere il fattore di differenza di spessore.

Le emazie dei capillari, opache in nero per la lacca dell'ematossilina, a contrasto positivo appaiono di color rosso mattone a somiglianza dei nuclei dei fibrociti e del condrioma sottonucleare dell'epitelio: a contrasto negativo sono, le stesse, azzurrine trasparenti: ma le cinge una sottile continua linea nera, quasi di un tenue ectosoma.

Preparati di epitelio superficiale gastrico allestiti all'argento col metodo arsenicale da me usato, mostrano, a contrasto positivo, l'apparato interno quale corpiccioli nitidamente individuati quasi immersi nel restante citoplasma; quanto si perde per la mancata visione del metallo ridotto, pauci se non monomolecolare, si guadagna nella visione dei piccoli salsicciotti contenuti, sommersi, ma nitidamente limitati nel restante citoplasma; è una visione nettamente tridimensionale nel confronto di quella sempre bidimensionale della solita visione microscopica: chiara la netta individuazione, mi ha veramente ricordata la mia prima comparazione (1924) dei rapporti del lacunoma con la restante sostanza citoplasmatica, di una goccia di aceto nell'olio.

E consimile visione, stupenda debbo veramente dire, ebbi in cellule ganglionari (Purkinje, lobi ottici, telencefalo di passero): a contrasto negativo si ha in tal caso la visione che dànno i preparati fissati ad esempio in Helly, delle corrispondenti lacune chiare. In contrasto positivo le lacune sono a margine scuro, sottilissimo come per una delicatissima riduzione di osmio; a ricordare le celebrate figure del Golgi. Per i minuscoli granuli del cervelletto, le due osservazioni in contrasto di fase mi hanno concesso di precisare quanto non mi avevano del tutto assicurato le osservazioni col microscopio abituale.

Per l'interesse essenziale di questa Nota è da far ben presente che Brice, Jones e Smyth col microscopio a contrasto di fase hanno messa in chiara evidenza e pubblicato fotogrammi [2] di cellule tutte dimostranti in vivo l'apparato interno: nuova suggestiva indubbia dimostrazione definitiva della esistenza in natura dell'apparato stesso; e, diciamo pure, risolutivo giudizio di tutte le negazioni od elucubrazioni o quanto mai disdegnose opposizioni inscientifiche circa la esistenza e la naturale realtà dell'apparato interno: volendo ancora usare per questo costituente del citoplasma tal vecchio indeterminato appellativo; poichè, è degno di particolare attenzione il fatto che le sommarie descrizioni dei ricercatori inglesi sono, per la interpretazione, ben riconducibili alla mia concezione del lacunoma [3].

Si può con sicurezza ritenere che il microscopio a contrasto di fase venga ad apportare all'indagine minuta dei fenomeni della vita un ausilio che può sol ricordare quello che hanno fornito le colorazioni elettive: avvicinerà alle conoscenze della forma quelle della costituzione e dei più minuti atteggiamenti della sostanza viva.

(2) A. T. BRICE, ROZA P. JONES, J. D. SMYTH, *Golgi Apparatus by Phase Contrast Microscopy*. « Nature », vol. 157, p. 553, april 27, 1946. A proposito di questa brevissima Nota è necessario che io rettifichi quanto ho scritto in « Rivista di Biologia », vol. XXXIX, (1947) p. 109, quando, a seguito di comunicazione indiretta, riferii erroneamente i sopracennati reperti dei ricercatori inglesi quali risultati di indagini a luce polarizzata invece che a contrasto di fase.

(3) Per i principali reperti e per la concezione del Lacunoma vedasi sopratutto: A. CORTI, *Il Lacunoma*. « Arch. It. Anat. Embriol. », vol. XLVII, 1942; *Per la conoscenza e per la storia del Lacunoma*. « Monit. Zool. It. », vol. LV, 1946; *Per la conoscenza e per la tecnica del Lacunoma*. Ibid, vol. LVI, 1947; *Ricerche sul Lacunoma*. « Riv. di Biol. », vol. XXXIX, 1947.

Biologia. — *Ossificazioni metaplastiche da innesto di uretere di mammifero in anfibi urodeli* (*). Nota di B. SCHREIBER, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

È tutt'ora oggetto di discussione quale sia la natura e l'origine degli elementi che partecipano alle ossificazioni metaplastiche. Questo fenomeno, che spesso si verifica a livello degli innesti di osso o dei tessuti connettivi annessi o anche nei calli di rigenerazione, ha fatto pensare a due possibilità per quanto riguarda l'origine dei nuovi osteoblasti: una, che essi vengano portati dai materiali innestati (teoria osteoblastica specifica) come osteoblasti già determinati, l'altra, specialmente sulla base delle immagini di mobilitazione connettivale che appariscono attorno a questi centri, ammette una influenza che i materiali apportati o fatti reattivi avrebbero sul connettivo ospite, il cui elemento base verrebbe indotto a trasformarsi in osteoblasto.

Recenti lavori di Levander (1) e della sua scuola (Annersten) (2), di Lacroix (3) e di Bertelsen (4) tenderebbero decisamente a dimostrare questa seconda teoria con una serie di prove desunte sia da pure osservazioni morfologiche come da una larga sperimentazione.

Essi ammettono senz'altro l'esistenza di fatti di « induzione » fra tessuti adulti e tale idea sarebbe convalidata dalla possibilità di ottenere risultati positivi in questo senso mediante estratti alcoolici di ossa giovani (Levander) o di cartilagini epifisarie (Lacroix) o di periostio (Bertelsen), contenenti sostanze di natura lipidica responsabili dei fenomeni di mobilitazione e dell'ulteriore sviluppo in senso specifico del fibroblasto.

Tutta un'altra serie di fatti portano una indiretta conferma a questo modo di vedere e aprono nuove vie di sperimentazione: quelli cioè che riguardano le ossificazioni indotte che si verificano a carico dei tessuti dell'apparato renale comunque alterato *in situ* o determinate dagli innesti ectopici di questi tessuti.

Non è possibile citare qui la già estesa bibliografia sull'argomento, del resto ottimamente riassunta dal Severi (5) per cui mi limito a notare come, il fenomeno, scoperto da Sacerdotti e Frattin (6) si presenti con altissima frequenza nelle alterazioni circolatorie sperimentali del rene e negli innesti ectopici di bacinetto, di uretere e di vescica e sia stato posto, dalle fonda-

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1948.

(1) G. LEVANDER, « Surgery, Gynec. and Obstetr. », *67*, 705 (1938) e « Nature », *155*, 148 (1938).

(2) S. ANNERSTEN, « Acta Chir. Scandinava », *84* (1940).

(3) P. LACROIX, « Nature », *156*, 576 (1945).

(4) A. BERTELSEN, « Acta Orthop. Scandinava », *15*, 139 (1944).

(5) R. SEVERI, « Lo Sperimentale », *94*, 480 (1940).

(6) C. SACERDOTTI e G. FRATTIN, « Arch. Path. Anat. u. Physiol », *168*, 431 (1899).

mentali ricerche di Huggins (7), in relazione con una proprietà specifica dell'epitelio di queste vie e non già dei connettivi associati.

Mi è comunque sembrato che i due ordini di fenomeni, quelli a carico dei tessuti dell'apparato scheletrico (osso, cartilagine, connettivi) e quelli dell'apparato renale si prestassero ad ulteriori osservazioni, in particolare per quanto riguarda: 1° la effettiva dimostrazione di una « induzione » ossea e la esatta identificazione degli elementi da cui parte l'ossificazione; 2° la specificità in senso zoologico del fenomeno, la quale dagli innesti fatti sui mammiferi risulterebbe piuttosto ristretta; 3° la possibilità di applicare la tecnica delle « ossificazioni indotte » allo studio della capacità osteogenetica dei connettivi dei vertebrati inferiori.

Ho perciò voluto riprendere in esame il problema delle ossificazioni indotte e in primo tempo mi sono limitato alla considerazione dei due primi problemi sovraesposti per mezzo di innesti xenoplastici di materiale renale eseguiti fra individuo datore e portatore appartenenti a specie zoologicamente molto distanti. Evidentemente tale tecnica avrebbe potuto precisare da un lato il problema della specificità d'azione degli eventuali agenti osteogenetici, mentre d'altro canto, l'incompatibilità zoologica fra i tessuti posti a contatto avrebbe permesso, con la mancata sopravvivenza dell'innesto, di stabilire in maniera inequivocabile l'origine dei nuovi osteociti.

I primi esperimenti eseguiti, dei quali dò qui i risultati sommari, sono stati fatti innestando frammenti di uretere di coniglio nella muscolatura dorsale di tritoni. È stato inoltre scelto proprio questo animale come ospite perchè le dimensioni delle cellule degli urodeli, notevolissimamente superiori a quella dei mammiferi, avrebbe facilitato l'identificazione di ciò che nell'interazione fra innesto e ambiente ospite spettava all'uno e all'altro animale. È noto infatti che i valori dei diametri nucleari maggiori delle cellule connettivali del tritone oscillano intorno ai 35 micron mentre quelle degli elementi corrispondenti del coniglio non superano gli 8 micron. Un fatto di « induzione », come quello supposto avvenire nelle ossificazioni metaplastiche prima considerate, sarebbe stato facilmente dimostrato qualora l'osso neoformato fosse risultato costituito da cellule « grandi » (tritone) anzichè da cellule « piccole » (coniglio).

La tecnica usata fu quella di innesti di cilindretti di uretere, asportati asetticamente da conigli giovani, nel muscolo dorsale di individui adulti di tritone (*Triturus cristatus* Laur.) per mezzo di un tre quarti come comunemente usato per i trapianti di tumori alla Ehrlich.

Sono stati seguìti gli innesti in tempi variabili da 7 ore a 96 giorni in un totale di 15 soggetti. Veniva alla fine asportata tutta la regione dorsale, fissata in Bouin e le sezioni colorate con ematossilina–eosina e con la tricromica di Mallory.

Queste prime ricerche hanno dimostrato in maniera indubbia: 1° *che i tessuti dell'innesto degenerano* più o meno rapidamente nell'ospite anfibio;

(7) C. B. HUGGINS, « Arch. of Surgery », *22*, 377 (1931).

2° *che sono i fibroblasti del connettivo del tritone che ossificano sotto l'influenza dei tessuti dell'uretere innestato.*

Infatti sono chiaramente reperibili gli aspetti di picnosi e di carioressi tanto nelle cellule dell'epitelio che in quelle delle tuniche connettivale e muscolare liscia dell'uretere. Già dalle prime ore dell'innesto appare una cospicua infiltrazione di elementi di tipo leucocitario fra i tessuti dell'innesto e questo fatto permette la facile identificazione delle cellule dei due animali

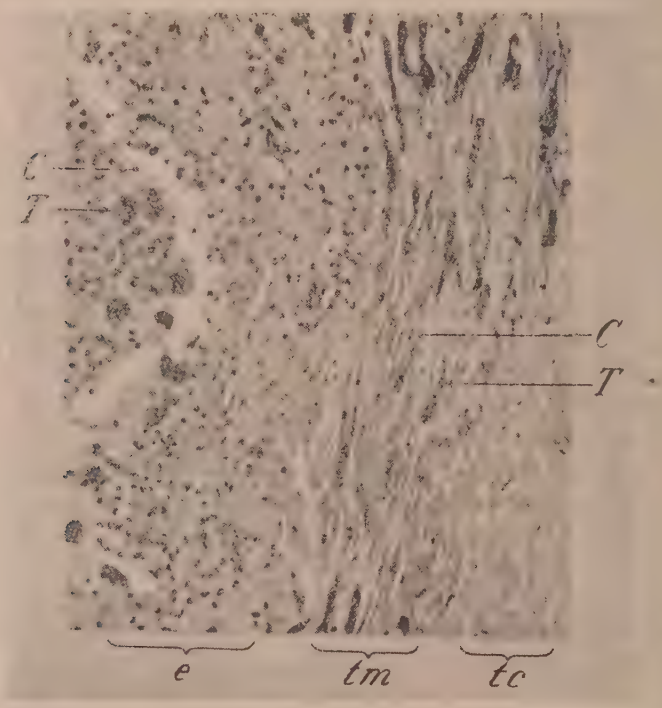


Fig. 1. – Uretere di coniglio innestato nel muscolo di Tritone dopo 39 giorni. Infiltrazione di elementi connettivali di tritone (T) nei tessuti dell'innesto (C).

e = epitelio, *tm* = tunica muscolare; *tc* = tunica connettivale (× 280).

coesistendo nel medesimo frammento cellule piccole e cellule grandi (figg. 1 e 2). È anzi interessante notare a questo proposito l'esistenza di fatti di «mimetismo morfologico» delle cellule connettivali di tritone che migrano nell'innesto e che assumono, nell'epitelio la forma rotondeggiante degli elementi propri di questo tessuto, mentre, specialmente nella tunica muscolare liscia, assumono aspetti estremamente simili alle fibrocellule liscie dello stesso tritone [8].

(8) Esclusa la partecipazione a questi fenomeni di vere fibrocellule di tritone, e per di più soltanto nella parete muscolare mentre d'altro canto sono visibili sottili fibrille collagene

Già al 5°–6° giorno si formano delle zone di tessuto « preosseo » ai bordi della massa innestata, quasi a confine fra questa e la muscolatura ospite.

Queste zone sono facilmente identificabili oltrechè per il loro aspetto omogeneo e solcato da canalini intersecantisi, per la colorazione violacea che assumono con la Mallory. La stessa colorazione evidenzia in casi più avanzati zone calcificate in seno e ai bordi della sostanza preossea, tinte in rosso. Entro ai canalini si presentano cellule « grandi » a nucleo rotondo od ovale e citoplasma debolmente basofilo occupanti parte del lume stesso dei canalini e perfettamente adagiati alle pareti di questi.

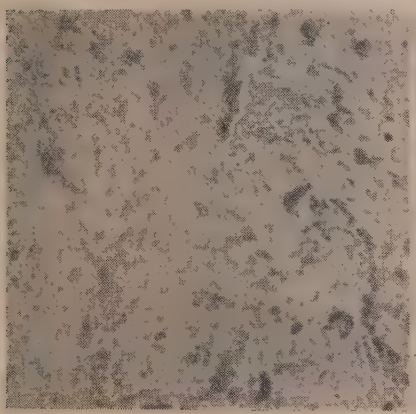


Fig. 2. – Residuo delle tuniche muscolari e connettivale di uretere di coniglio (nuclei piccoli), infiltrato da elementi connettivali del tritone (nuclei grandi) (370 ×).

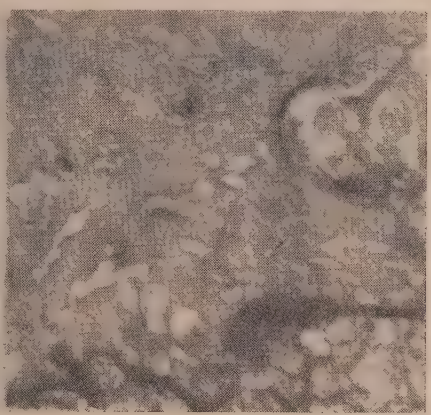


Fig. 3. – Tessuto preosseo a bordi calcificati, costituito da cellule appartenenti al tritone (stesso soggetto della fig. 2) (370 ×).

Come si disse, le dimensioni oltrechè l'aspetto generale li identificano per cellule di tritone e la loro esatta corrispondenza con le dimensioni dei canalini fa escludere l'ipotesi che potrebbe sorgere di una secondaria immigrazione entro a formazioni originatesi da parte dell'innesto (fig. 3).

Le due fotografie delle figg. 2 e 3 sono eseguite allo stesso ingrandimento di 370 diametri e rendono chiaramente l'idea del fatto base che ha ispirato queste ricerche cioè della possibilità di identificare gli elementi contrapposti dell'innesto e dell'ospite per mezzo delle diverse dimensioni nucleari.

In innesti di lunga durata sembrano apparire segni di riassorbimento di queste formazioni e anche nella stessa fig. 3 grosse cellule a nucleo rotondo e abbondante citoplasma, addossate ai bordi esterni delle bandelle ossee, con frammenti basofili fagocitati, fanno pensare ad osteoclasti sia per la

attorno a questi nuclei fusati « grandi », ci sembra che si possano ravvicinare questi fatti a quelli descritti in altri materiali come le culture in vitro su substrati micellari anisotropi a tensione e che P. WEISS definisce come « functional adaptation » e li ascrive ai fattori determinanti la forma delle cellule di un tessuto. P. WEISS, « Amer. Natur. », *67*, 322 (1933).

evidente somiglianza morfologica con questi, sia per la situazione topografica che per la loro tardiva apparizione.

Nel lavoro in esteso, che verrà pubblicato dopo l'espletamento di altre modalità sperimentali che mi propongo di attuare, saranno pubblicati i protocolli e gli altri dettagli illustrativi. Qui mi limito ad esporre i risultati di queste prime ricerche che mi permettono di concludere nel senso di aver raggiunto la dimostrazione *che sono i tessuti del portatore che ossificano sotto l'influenza induttrice dell'innesto.*

Il fatto naturalmente non esclude che in innesti autologhi od omologhi possano anche elementi innestati partecipare all'ossificazione, ma le modalità sperimentali qui usate e la natura dei tessuti entro ai quali il processo si effettua permettono escludere in modo indubbio che vi partecipino elementi già determinati nel senso specifico del tessuto osseo. È pertanto giustificata la supposizione di Levander, di Lacroix, Bertelsen e altri AA. che anche tessuti adulti possano influenzare altri tessuti adulti in un senso ben determinato come quello dell'evoluzione del connettivo (dei vari tipi che possono presentarsi nelle zone portatrici) a tessuto osseo [9]. È inoltre dimostrata *la larga aspecificità in senso zoologico* dei fatti di osteogenesi indotta dagli innesti renali, aspecificità che per ragioni evidentemente diverse, nei mammiferi non è che assai difficilmente dimostrabile.

Biologia. — *Trapianto dell'occhio tra larve normali e larve röntgen–irradiate (Esperienze su «Bufo vulgaris» e «Bufo viridis»)* [*]. Nota di F. Chelli, presentata [**] dal Socio G. Cotronei.

Le esperienze di questa Nota indagano l'azione biologica dei raggi X su larve di Anfibi, studiandone in concreto il comportamento dell'abbozzo oculare. Le ho eseguite per consiglio e sotto la guida del dott. T. Perri di questo Istituto: consistono sopratutto nel trapiantare l'occhio di una larva irradiata su una larva normale, in modo da seguirne il comportamento oltre i limiti di sopravvivenza dell'intera larva irradiata; altre esperienze consi-

(9) Alcuni lavori di AA. russi [N.V. Nassonov, «C.R. Akad. Sci. U.S.S.R.», *4*, 101 (1936) e *19*, 137 (1938); D. M. Fedotov, «Nature», *158*, 306 (1946)] e collaboratori sono stati posti in relazione con questi problemi di induzione fra tessuti adulti. Per quanto assai interessanti di per sè (induzione di arti soprannumerari per innesto di tessuti e di estratti di tessuti adulti) non credo possa trattarsi del medesimo problema. Il fatto, che soltanto se i trapianti avvenivano nel territorio specifico della coda o dell'arto si generavano rispettivamente coda e arto, fa pensare si tratti in questo caso di fatti analoghi a quelli messi in evidenza da Balinsky e altri (B. I. Balinsky, «Roux Arch.», *101*, 71 (1927) e *136*, 221 (1937)) sulla induzione di un arto per l'innesto nel campo specifico di questo di svariati induttori, anche del tutto aspecifici.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata «Battista Grassi» dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1948.

stono nel trapianto inverso, cioè dell'occhio di una larva normale su una irradiata, per meglio studiare l'influenza dell'intero organismo irradiato sull'abbozzo normale. Le due serie di esperienze, congiuntamente, tendono a distinguere l'azione diretta dei raggi X dall'azione indiretta, cioè mediante alterazioni che provocate dall'irradiazione sull'intero organismo si ripercuotano sui singoli abbozzi.

Ricordo che il Perri [1] indagando (dal 1944 in poi) l'azione che i raggi X esercitano su embrioni e larve di Anfibi, ha notato che in *Rana esculenta*, per alcune dosi di raggi, l'embrione soccombe dopo un certo tempo mentre la vescicola ottica se trapiantata su un embrione normale sopravvive almeno per molto tempo, risultando così più resistente dell'intero embrione. Notò inoltre che una vescicola ottica primaria normale, trapiantata su embrione fortemente irradiato, presenta solo una lieve diminuzione nella velocità di sviluppo; cioè l'embrione irradiato non ha un'azione nociva ben manifesta su un occhio normale, il quale concetto fu poco dopo riconfermato in questo Istituto dalla Mistruzzi [2] in ricerche di parabiosi tra embrioni normali e irradiati.

Negli Anfibi al termine del proprio tuorlo di riserva, e contemporaneo inizio dell'alimentazione esterna, si hanno profondi mutamenti che sono caratterizzati, come vide il Cotronei, dall'inizio delle correlazioni nervose ed endocrine: sono cioè *larve* nel senso di Cotronei. Era perciò utile l'estendere a questo stadio le precedenti indagini su embrioni. Esperienze dirette a questo scopo furono dal Perri affidate alla sig.na Frontali [3] di questo Istituto; su una parte delle quali è necessario che mi soffermi più a lungo, perchè ad essa più direttamente si ricollegano le mie.

La Frontali trapiantò un occhio asportato ad una larva di *Rana esculenta* fortemente irradiata, nella cavità orbitaria di una larva normale ed osservò che l'occhio continuava a vivere ed a svilupparsi poco meno del normale; ne seguì il comportamento fino a due mesi dopo il trapianto, senza notare alcun fatto di necrosi; ne risultava così che anche nelle larve l'occhio presenta una resistenza ai raggi X nettamente maggiore che l'intero organismo.

Le esperienze che ho eseguito su *Bufo vulgaris* e su *Bufo viridis*, e che qui espongo, erano dunque necessarie in specie per due motivi: uno di questi era di verificare se in *Bufo* si abbia lo stesso comportamento che in *Rana esculenta*; tanto più che dalle accennate ricerche di Perri (1947) risultava che in *Bufo* la vescicola ottica appare meno resistente ai raggi X che in *Rana esculenta*. Altro scopo era di seguire il comportamento dell'occhio irradiato almeno fino alla metamorfosi, che in *Bufo* avviene più rapidamente che in *Rana esculenta*.

(1) T. PERRI, « Acta », vol. 8, n. 9, 1945; ivi, vol. 9, n. 19, 1946; questi « Rendiconti », vol. II, serie VIII, 1947.

(2) L. MISTRUZZI, « Acta », vol. 8, n. 12, 1945.

(3) N. FRONTALI, questi « Rendiconti », vol. I, serie VIII, 1946.

Trapianto da larva normale su larva irradiata[4]. – Questi trapianti li eseguii nel 1946 e 1947 su *Bufo vulgaris*: ad una larva irradiata asportavo, in narcosi, l'occhio con il foglietto corneale interno e lo trapiantavo nella cavità orbitaria, svuotata con uguale tecnica, di larva normale; la trasparenza del foglietto corneale esterno del portatore rende agevole seguire in vita il comportamento del trapiantato. Ho sperimentato con irradiazioni di 60 e successivamente, guidato dai risultati raggiunti, di 30 e 20 minuti primi. Ricordo che queste dosi, per le larve all'inizio di tale stadio, sono tutte sicuramente letali; varia solo il periodo di sopravvivenza che per 30′ è di 20–30 giorni (in aprile), più breve per 60′ e molto più lunga per 20′.

Per le dosi di 60′, l'occhio irradiato e trapiantato, da un diametro trasverso di mm. 0,26 in media qual'è all'inizio della vita larvale cioè al momento dell'irradiazione, si accresce fino a mm. 0,30, dunque poco e nettamente meno che nei trapianti normali; e successivamente diminuisce come ora vedremo meglio. In molti casi l'occhio fu seguìto fino alla metamorfosi del portatore. All'esame istologico di questi si osserva che il tessuto retinico è di piccolo volume e di forma sferoidale, la stratificazione che all'inizio della vita larvale, cioè al momento dell'irradiazione, era ben netta ora appare o irregolare o addirittura irriconoscibile; il cristallino è andato distrutto e riassorbito; gli strati pigmentati sono presenti e circondano la massa retinica. Siamo quindi in presenza di fatti regressivi (necrotici). Come conseguenza di queste condizioni dell'occhio, lo strato esterno della cornea (ricordo che è quello normale del portatore) diventa in gran parte ricoperto da cromatofori. Date queste alterazioni, non è il caso di discutere se l'occhio irradiato si sia metamorfosato al pari del normale. Altri casi furono invece fissati vario tempo prima della metamorfosi, e questi, come era da attendersi, mostrano l'occhio in condizioni alquanto migliori; la stratificazione della retina è spesso ben conservata; il cristallino è per lo più presente in buone condizioni e di dimensioni quasi normali; anche qui gli strati pigmentati sono conservati.

Ottenuti questi risultati, passai a sperimentare, come ho già accennato, con dosi minori cioè di 30′ (v. fig. 1) e non avendo ottenuto risultati molto differenti eseguii altre esperienze con irradiazioni di 20′. Le larve irradiate con quest'ultima dose (all'inizio della vita larvale) mostrano un accrescimento nettamente osservabile anche *in toto* ma che ben presto si arresta, come osservò Perri con adatte misurazioni sullo stesso materiale. Orbene nei trapianti di abbozzo oculare da larva irradiata per 20′ su normale, ho osservato che esso presentasi, alla metamorfosi del portatore, con retina in buone condizioni, con gli strati pigmentati normali, però con il cristallino già scomparso o in degenerazione (v. fig. 2); il diametro è intorno a mm. 0,46 mentre al momento del trapianto era di mm. 0,26; dunque un accrescimento assai minore del normale, ma pur sempre notevole e nettamente maggiore

(4) Le larve sono state irradiate con tubo Müller–Metro per radioterapia con tensione di 40.000 volt, intensitá di 3 milliampere, senza filtro, distanza dall'anticatodo cm. 10,5; le larve durante l'irradiazione erano tenute in una vaschetta di vetro con un po' di acqua comune sempre nella stessa quantità.

che nei casi precedenti; e su questo ritornerò nelle Considerazioni perchè rappresentano il punto di collegamento con le esperienze della Frontali su *Rana esculenta*.

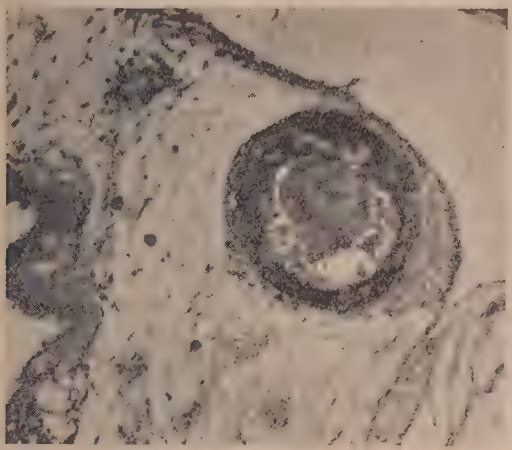


Fig. 1. – *Bufo vulgaris* in metamorfosi. Trapianto ortotopico di occhio di larva irradiata per 30′ su larva normale. (Ingr. 135 diam.).

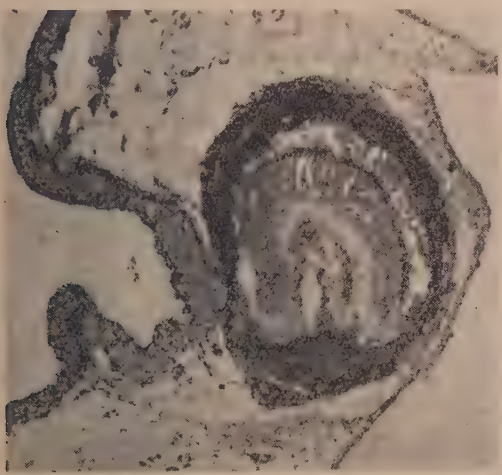


Fig. 2. – *Bufo vulgaris* in metamorfosi. Trapianto ortotopico di occhio di larva irradiata per 20′ su larva normale. (Uguale ingr. della fig. 1).

Le stesse esperienze eseguii pure su *Bufo viridis*: mi limito a riferire che per irradiazioni di 60′ e di 30′ l'occhio al momento della metamorfosi del portatore presentasi in completa distruzione, solo in un caso di 30′ vi è un residuo come quello descritto in *Bufo vulgaris*.

Trapianto da larva normale su larva irradiata. – Ho pure eseguito alcune esperienze, come ho ricordato al principio di questa Nota, di trapianto inverso, ossia di occhio normale nella cavità orbitaria di larva irradiata; allo scopo di vedere quali effetti si possono avere sull'occhio normale in conseguenza delle alterazioni che i raggi X producono nell'intero organismo.

Da notare che nella valutazione di questi risultati occorre tener presenti altri fattori, quali ad esempio quelli spaziali in rapporto con lo scarso accrescimento della larva irradiata, onde la necessità di ulteriore sperimentazione, essendo pure necessario distinguere le alterazioni da raggi X da quelle che qualunque larva sofferente presenta e che si possono ripercuotere sul trapiantato. Tuttavia ricordo qui due casi tra i pochi che ho eseguito, perchè sono assai chiari. Eseguii il trapianto di occhio di larve normali giovanissime, su larve che il giorno precedente erano state irradiate con dose fortemente letale (30 minuti primi); fissandole dopo parecchi giorni: all'esame microscopico si osserva che l'occhio normale trapiantato ha regolarmente continuato nel suo accrescimento, mentre l'occhio della larva portatrice presenta le normali alterazioni da raggi X, in particolare è poco accresciuto e irregolare; differenza adunque nettissima, il che fa concludere che l'ambiente della larva irradiata non ha esercitato un'influenza notevole sull'occhio normale portato a vivere su di essa.

Considerazioni. – I risultati che sopra ho esposto, mostrano, come ho già detto, che nelle larve di *Bufo vulgaris* l'occhio sopravvive di molto all'intera larva irradiata, almeno fino alla metamorfosi del portatore sia pure in condizioni poco buone. Questo risultato è concorde con quello ottenuto dal Perri (esperienze ancora inedite) per cui nella stessa specie la vescicola ottica di embrioni irradiati con certe dosi letali se trapiantata su embrioni normali può giungere, pur con accrescimento anche qui scarso, alla metamorfosi.

È opportuno confrontare i risultati in *Bufo vulgaris* con quelli che, con tecnica identica, ottenne la Frontali in *Rana esculenta*. Comincio con il notare che in ambedue le specie l'occhio larvale resiste alla röntgen–irradiazione molto più dell'intero organismo. Diverso è, per forti dosi, il potere di accrescimento che conserva l'occhio nelle due specie: in *Rana esculenta* per 60′ esso si avvicina al normale, mentre in *Bufo* con le stesse dosi l'accrescimento è minimo. Solo nelle irradiazioni per 20′, l'occhio di *Bufo* si accresce discretamente sicchè il suo comportamento è meno dissimile di quello di *Rana* irradiata per 60′. Dosi ancora minori, pur rimanendo nell'ambito delle letali, non le ho ancora sperimentate. Chiaramente già risulta adunque che in *Bufo vulgaris* l'occhio è molto più sensibile che in *Rana esculenta*. In *Bufo viridis* si ha un comportamento molto affine a quello di *Bufo vulgaris*.

Questi effetti dei raggi X sull'occhio sono certamente diretti cioè non dipendono, almeno in maniera evidente, da alterazioni dell'intero organismo; perchè si hanno pure nell'occhio irradiato portato a vivere, mediante trapianto, su larva normale. E la seconda parte di queste ricerche (trapianto da nor-

male su irradiato) mostrando per l'occhio normale uno sviluppo molto migliore che quello della larva irradiata, ribadisce tali conclusioni. Questo punto, che appare così promettente, deve essere ulteriormente esteso; rientra nel piano di ricerche che il dott. Perri particolarmente segue: egli, ripeto, si è proposto di indagare, usando questo genere di trapianto, l'influenza o meno che un ambiente organizzato röntgen-irradiato esercita su normali abbozzi o organi in via di sviluppo o di accrescimento.

Una suscettibilità differenziale è risultata anche nell'ambito dello stesso occhio in quanto si è visto, al pari di ciò che si verifica in *Rana esculenta* (Frontali), che il cristallino rimane presente minor tempo che la retina e che le parti pigmentate dell'occhio sono le più resistenti. Per quanto poi riguarda una suscettibilità differenziale nell'ambito della retina, non ho ancora dati sufficienti per giudicare; ricordo a questo proposito che se n'è parlato in riferimento alla diversa attività proliferativa delle sue diverse zone (5).

CONCLUDENDO. – 1° L'occhio, asportato ad una larva di *Bufo vulgaris* irradiata con forti dosi di raggi X e trapiantato su larva normale, sopravvive almeno fino alla metamorfosi del portatore, però piccolissimo ed irregolare. Per irradiazioni minori, ma anch'esse nettamente letali, l'occhio trapiantato su normale subisce un discreto aumento, presentando così un comportamento che si avvicina a quello ottenuto con dosi molto maggiori in *Rana esculenta*.

2° L'occhio di larva normale, trapiantato su larva irradiata, si sviluppa e si accresce molto meglio dell'occhio della larva irradiata.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà alla Classe il doloroso annuncio della morte dei Soci Stranieri FILIPPO LENARD e ALBERTO PENCK e li ricorda con brevi parole.

Filippo Lenard, deceduto il 20 maggio 1947, deve la sua fama principalmente agli studi sulle teorie elettroniche, sui raggi catodici e sull'effetto fotoelettrico, studi per i quali fu a lui assegnato nel 1905 il Premio Nobel.

Alberto Penck, del cui decesso non si conosce ancora la data precisa, fu valoroso geologo e capo di una scuola di geografia fisica fondata sulla geologia. Tenne, per alcuni anni, la direzione dell'Istituto di Oceanografia di Berlino e si segnalò particolarmente per i suoi studi sulle Alpi durante l'epoca glaciale.

Il Presidente comunica poi che hanno ringraziato per la nomina: il Socio Straniero Lauro Travassos e il Corrispondente Guido Carobbi.

(5) Vedi F. G. SPEAR, « Brit. med. bull. », vol. 4, n. 1, 1946.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente informa i Colleghi che è in preparazione un fascicolo doppio dei « Rendiconti » che comprenderà i mesi di novembre e di dicembre, con il quale verrà chiusa l'annata 1947.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio Picone presenta la Memoria del dott. Carlo Birindelli dal titolo « Rapporti di un recente metodo di sommazione delle serie con altri e sue estensioni alle successioni e serie multiple ». Detta Memoria sarà sottoposta all'esame di un'apposita Commissione.

Presentano Note, per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci Cotronei, Bonino, Bargellini, Colonnetti (a mezzo del Presidente Castelnuovo), Sergi e Armellini.

L'Accademico Segretario legge l'elenco delle Note pervenute.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Cotronei G. e Urbani-Mistruzzi L., La costituzione Zoologica degli Anfibi studiata con esperienze di parabiosi tra Anuri ed Urodeli. Nota II.

Sacco F., La sinclinale di M. Antoroto-Mondolè (tra Ormea e Limone Piemonte).

Mazzi V., Neurosecrezione e sintesi di proteine (pres. dal Corrisp. N. Beccari).

Rizzo C., Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo. – A) La reazione ortoclistatica nell'adulto normale – II. (pres. dal Socio G. Cotronei).

Sacchetti A., Il rapporto armonico fra scarti individuali e grandezza media dei più diversi segmenti corporei. Una conferma sul « Carabus auratus » (pres. dal Corrisp. S. Sergi).

Galli A., Durata limite di una perturbazione sincrona nelle costruzioni asismiche (pres. dal Socio M. Panetti).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

L'Accademico Segretario, in assenza dei relatori Soci Negri e Chiarugi, legge la relazione sulla Memoria della dott.ssa Albina Messeri dal titolo: « Alcuni dati recenti sugli organizzatori vegetali ». La relazione, che propone la stampa di detta Memoria negli Atti accademici, è approvata con le solite riserve di carattere finanziario.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario presenta i libri inviati in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare rilievo un complesso di pubblicazioni matematiche offerte dal Socio Giuseppe Lugli, alcune delle quali opera di suo padre prof. Aurelio e altre di proprietà del medesimo, un volume dell'« Internationale Beleuchtungskommission », il volume « L'Orto Botanico » del Socio Giuseppe Gola, relativo ai quattro secoli di attività dell'Orto Botanico di Padova, numerose pubblicazioni del Socio Straniero John Kirtland Wright, la relazione del Socio Perucca, Direttore del Politecnico di Torino per l'inaugurazione dell'anno accademico 1947–48, un opuscolo sul centenario della nascita di Galileo Ferraris con un articolo del predetto Socio Perucca e altre di minore importanza.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 10 gennaio 1948.

Besso Davide. — *Esercizi elementari sul concetto di limite.* Estr. da « Periodico di matematica per l'insegnamento secondario », a. III, 1888, fasc. 2.

Gola Giuseppe. — *L'orto botanico.* Quattro secoli di attività (1545–1945). Padova, Editoria Liviana, 1947. Pp. 122, in–8°, con tavv.

Internationale Beleuchtungskommission. — X Tagung, Scheveningen, 1939. Band I. Sekretariatsberichte. Wien. Büro der Int. Beleuchtungskommission, 1942. Pp. VIII–704, in–8°, con figg. e tavv.

Lugli Aurelio. — *Alcuni teoremi della recente geometria del triangolo.* Estr. da « Periodico di matematica per l'insegnamento secondario », a VI, 1891, fasc. 1.

— *Esercizi per la scuola aritmetica.* Estr. da « Periodico di matematica per l'insegnamento secondario », a. II, 1887, fasc. 1.

— *Piccole note e sunti di note.* Estr. da « Periodico di matematica per l'insegnamento secondario », a. VII, 1892, fasc. 1.

— *Raccolta di temi di matematica per le licenze dell'Istituto tecnico nella Sezione fisico–matematica con soluzioni o risposte.* Roma, Tip. Elzeviriana nel Ministero delle Finanze, 1890. Pp. 46, in–8°, con figg. e tavv.

Lugli Aurelio. — *Sul numero dei numeri primi da 1 ad n.* Estr. da « Giornale di matematica », vol. XXVI.

— *Sulle frazioni decimali periodiche.* Estr. da « Periodico di matematica per l'insegnamento secondario », a. II, 1887, fasc. 6

Perucca Eligio. — *G. Ferraris: lo scienziato nel quadro del suo tempo.* Estr. da « Atti e rassegna tecnica della Società degli ingegneri e degli architetti di Torino », n. s., a. I, 1947, n. 10.

Politecnico di Torino. *Relazione del direttore inaugurandosi l'anno accademico 1947–48.* Torino, Tip. sociale Torinese, 1947, Pp. 11, in–8°.

Pittei Costantino. — *Terremoto del 18 maggio 1895.* Breve relazione e curve sismografiche. Firenze, Tip. Cooperativa, 1895. Pp. 11, in–8°, con tavv. (R. Osservatorio del Museo di Firenze).

Ricordi Ettore. — *Sull'approssimazione dell'ordinaria interpolazione nelle tavole di logaritmi delle funzioni goniometriche.* Estr. da « Periodico di matematica per l'insegnamento secondario », a. III, 1888, fasc. 5.

RONCHI Vasco. — *L'ultimo manoscritto di Giovan Battista Della Porta*. Estr. da « Sapere », 1947, n. 311–312.

SCARPIS Umberto. — *Il problema della divisione della circonferenza*. Savona, Tip. D. Bertolotto, 1891. Pp. 72, in–8°.

WRIGHT John Kirtland. — *History of exploration and cartography*. Estr. da « Proceedings of the eighth American scientific Congress ».

— *The history of geography: a point of view*. Estr. da « Annales of the Association of American Geographers », vol. XV, 1925, n. 4.

— *Human nature in science*. Estr. da « Science », vol. C, 1944, n. 2597.

— *Map makers are human. Comments on the subjective in maps*. Estr. da « Geographical Review », vol. XXXII, 1942, n. 4.

WRIGHT John Kirtland. — A *method of mapping densities of population with Cape Cod as an example*. Estr. da « Geographical Review », vol. XXVI, 1936, n. 1.

— *Notes on the knowledge of latitudes and longitudes in the middle ages*. Estr. da « Isis », vol. V, 1922, n. 13.

— *A plea for the history of geography*. Estr. da « Isis », vol. VIII, 1925, n. 27.

— *Sections and national growth. An atlas of the historical geography of the United States*. Estr. da « Geographical Review », vol. XXII, 1932, n. 3.

— *Some measures of distributions*. Estr. da « Annals of the Association of American Geographers », vol. XXVII, 1937, n. 4.

— *Terrae incognitae: the place of the imagination in geography*. Estr. da « Annals of the Association of American Geographers », vol. XXXVII, 1947, n. 1.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 febbraio 1948.

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria). — *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la determinazione di* S_k *appartenenti a varietà intersezioni complete di forme*(*). Nota(**) del Corrisp. B. SEGRE.

1. — Un sistema di c ($\geqq 1$) equazioni algebriche omogenee

$$(1)\quad f_1(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0\ ,\ f_2(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0, \cdots;\ f_c(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0,$$

i cui gradi rispettivi siano

$$(2)\qquad n_1, n_2, \cdots n_c,$$

non ammette generalmente soluzioni nel campo di razionalità Γ dei coefficienti, all'infuori della soluzione banale $x_0 = x_1 = \cdots = x_r = 0$. Si pone quindi il problema di determinare opportune irrazionalità, di tipo possibilmente semplice, che aggiunte a Γ definiscano un campo ampliato in cui le (1) abbiano qualche soluzione non banale.

Un ovvio procedimento, utile allo scopo per $r \geqq c$, consiste nell'aggregare alle (1) $r - c$ equazioni lineari nelle x, con coefficienti generici in Γ, considerando poi le soluzioni del sistema così ottenuto. A norma di una ben nota estensione del teorema di Bézout, tali soluzioni sono generalmente in numero finito uguale ad $n_1 n_2 \cdots n_c$, e lo sono sempre se $c = 1$; allora tali soluzioni appartengono ad un'estensione algebrica di Γ, di grado uguale al prodotto degli interi (2).

Fin dal 1945 mi accorsi che, se r è sufficientemente elevato rispetto ai gradi (2) delle (1), e per ogni scelta dei coefficienti di queste equazioni, si può sempre determinare una soluzione non banale delle (1) in un campo Γ^* ottenibile da Γ mediante una conveniente successione finita di estensioni

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Presentata nella seduta del 14 febbraio 1948.

algebriche, ciascuna avente grado non superiore al massimo degli interi (2). A questo risultato giunse contemporaneamente il Brauer [1], il quale mediante esso potè dare risposta affermativa ad una congettura concernente il problema di Hilbert sulle risolventi; congettura che l'anno innanzi io avevo formulata, stabilendola in alcuni casi particolari [2]. Il Brauer ottenne quel risultato come caso particolare (per $k = 0$) di un teorema esprimibile geometricamente come segue.

Qualunque siano gli interi positivi (2) *e l'intero* $k \geqq 0$, *e comunque si scelgano i coefficienti nelle* (1), *esiste un intero*

$$\mu = \mu(n_1, n_2, \cdots, n_c | k) \tag{3}$$

tale che, se $r \geqq \mu$, *la varietà algebrica di* S_r *rappresentata dalle* (1) *contenga qualche* S_k *appartenente ad un'estensione* Γ^*, *del tipo suddetto, del campo* Γ *dei coefficienti.*

Il Brauer, nella Nota citata, incomincia col provare un altro teorema, e poi si limita a soggiungere che lo stesso metodo fornisce la dimostrazione del teorema dianzi enunciato; tale metodo poggia su di un procedimento per assurdo, e non ha carattere costruttivo nè nei riguardi del campo Γ^* nè per quanto concerne la funzione (3). Non parrà quindi superfluo che io qui stabilisca quel teorema con procedimento geometrico induttivo, che già avevo escogitato tre anni or sono, e che offre modo di determinare Γ^* e μ in guisa ricorrente (nn. 2–5). Tale procedimento potrebbe in taluni casi venire affinato, sì da fornire per Γ^* e μ determinazioni più ristrette, come già risulta dal lavoro citato in [2] e come qui trovasi ulteriormente specificato nel n. 6.

2. – Sia n il massimo degli interi (2), e supponiamo che a fra questi uguaglino n ($1 \leqq a \leqq c$), ad esempio si abbia

$$n_1 = n_2 = \cdots = n_a = n,$$

onde sarà $n_i < n$ per $i > a$. Se $n = 1$, oppure se $a = c = 1$, $k = 0$, il teorema da dimostrare segue subito dal secondo capoverso del n. 1, assumendo rispettivamente $\mu = c + k$ o $\mu = 1$. Possiamo dunque supporre che sia $n \geqq 2$ ed inoltre o

$$c > a, \tag{I}$$

oppure

$$c = a > 1, \tag{II}$$

od infine

$$c = a = 1, \qquad k > 0. \tag{III}$$

(1) R. Brauer, *A note on systems of homogeneous algebraic equations*, « Bull. Amer. Math. Soc. », *51*, 749-755 (1945). Nella nota a pie' di p. 750 è indicato che io pure avevo ottenuto il risultato suddetto, di cui tuttavia soltanto ora pubblico una dimostrazione.

(2) B. Segre, *The algebraic equations of degrees 5, 9, 157, ..., and the arithmetic upon an algebraic variety*, « Annals of Math. », *46*, 287-301 (1945).

Stabiliremo in ciascuno dei tre casi quel teorema (nn. 3, 4, 5) per induzione multipla, ordinatamente rispetto alle caratteristiche c, k, a, n; potremo quindi ammettere ch'esso sia già stato provato, qualora in luogo di queste si assumano interi $c' \geqq 1$, $k' \geqq 0$, $a' \geqq 1$, $n' \geqq 1$ soddisfacenti alla $a' \leqq c'$ ed all'uno od all'altro dei seguenti quattro insiemi di condizioni:

(4) $\quad n' = n \quad , \quad a' = a \quad , \quad k' = k \quad , \quad c' < c,$

(5) $\quad n' = n \quad , \quad a' = a \quad , \quad k' < k \quad , \quad c'$ arbitrario,

(6) $\quad n' = n \quad , \quad a' < a \quad , \quad k', c'$ arbitrari,

(7) $\quad n' < n \quad , \quad a', k', c'$ arbitrari.

3. – Se vale la (I), possiamo distribuire le equazioni (1) nei due sistemi

$$(1_1') \quad f_1(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0 \ , \ f_2(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0, \cdots, \ f_a(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0,$$

$$(1_1'') \quad f_{a+1}(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0, \cdots, \ f_c(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0.$$

Il sistema $(1_1')$ ha le caratteristiche $n' = n$, $a' = a$, $c' = a < c$, onde, in forza delle ipotesi fatte nel n. 2 e delle (4), per esso vale il teorema del n. 1 con $k' = k$. Ha senso pertanto di considerare l'intero

$$k_1 = \mu(n_1, n_2, \cdots, n_a | k),$$

ed inoltre, qualora si supponga

$$r \geqq k_1,$$

sulla varietà di S_r rappresentata dalle $(1_1')$ si ottiene sempre qualche S_k del tipo richiesto. Tenuto ancora conto del n. 2, avuto riguardo alle (7), e supposto

$$r \geqq \mu(n_{a+1}, \cdots, n_c | k_1),$$

potremo applicare il teorema del n. 1 al sistema $(1_1'')$, e determinare un S_{k_1} giacente sulla varietà di S_r da questo rappresentata, il quale appartenga ad un'estensione Γ^* di Γ della specie voluta (n. 1) [3]. Le coordinate x di un punto descrivente un tale S_{k_1} si potranno dunque esprimere quali forme lineari in $k_1 + 1$ variabili indipendenti, che diremo y, i cui coefficienti apparterranno al campo Γ^*. Sostituendo tali forme alle x, le $(1_1'')$ risultano per costruzione identicamente soddisfatte rispetto alle y, mentre le $(1_1')$ si riducono ad un sistema nelle y colle stesse caratteristiche di $(1_1')$, salvo che il numero delle variabili trovasi ridotto da $r + 1$ a $k_1 + 1$, ed il campo dei coefficienti viene esteso da Γ a Γ^* o ad un sottocampo di Γ^*. Basta allora applicare al nuovo sistema quanto è stato detto poc'anzi per $(1_1')$, per ottenere un S_k situato sulla varietà di S_{k_1} da esso rappresentata. Tale S_k soddisfa manifesta-

(3) Nel seguito ometteremo di solito, per brevità, di accennare esplicitamente ai successivi ampliamenti del campo Γ che via via occorreranno; questi però risulteranno implicitamente dal contesto, e saranno tutti del tipo richiesto, poichè proverranno da applicazioni del teorema del n. 1 a sistemi di equazioni ciascuna di grado non superiore ad n.

mente alle condizioni volute relativamente al sistema formato dalle $(1'_I)$, $(1''_I)$, ossia relativamente al sistema (1), sicchè nelle ipotesi attuali il teorema del n. 1 sussiste, con

$$\mu(n_1, n_2, \cdots, n_c | k) = \mu[n_{a+1}, \cdots, n_c | \mu(n_1, n_2, \cdots, n_a | k)].$$

4. – Se valgono le (II), possiamo distribuire le equazioni (1) nei due sistemi

$$(1'_{II}) \qquad f_1(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0,$$

$$(1''_{II}) \qquad f_2(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0, \cdots, \quad f_c(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0,$$

aventi rispettivamente le caratteristiche

$$n' = n \quad ; \quad a' = 1 < a \qquad \text{ed} \qquad n'' = n \quad , \quad a'' = a - 1 < a.$$

In base al n. 2 ed alle (6), sarà dunque lecito applicare il teorema del n. 1 a ciascuno di quei sistemi, per valori arbitrari dell'intero k ivi considerato. Posto per abbreviare

$$k_2 = \mu(n_1 | k),$$

nell'ipotesi che sia

$$r \geqq \mu(n_2, \cdots, n_c | k_2)$$

potremo conseguentemente determinare un S_{k_2} situato sulla varietà di S_r rappresentata dalle $(1''_{II})$. Mediante un'argomentazione analoga a quella svolta nel n. 3 per S_{k_1}, si vede inoltre che questo S_{k_2} sega la $(1'_{II})$ secondo una varietà che contiene qualche S_k soddisfacente alle condizioni volute. Pertanto anche ora il teorema del n. 1 sussiste, attualmente potendosi assumere

$$\mu(n_1, n_2, \cdots, n_c | k) = \mu[n_2, \cdots, n_c | \mu(n_1 | k)].$$

5. Supponiamo da ultimo che valgano le (III), sicchè il sistema (1) comprende ora una sola equazione

$$(1'_{III}) \qquad f_1(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0,$$

di grado $n_1 = n \geqq 2$. Tenuto ancora conto del n. 2, avuto riguardo alle (5), e supposto

$$r \geqq \mu(n | k - 1),$$

potremo intanto determinare un S_{k-1} situato sulla $(1'_{III})$; e non è restrittivo assumere che tale S_{k-1} sia rappresentato dalle

$$(8) \qquad x_k = x_{k+1} = \cdots = x_r = 0,$$

poichè a questo caso ci si può ricondurre operando una sostituzione lineare sulle x, i cui coefficienti siano elementi opportuni dell'estensione Γ^* di Γ a cui S_{k-1} appartiene. La $(1'_{III})$ può allora scriversi più esplicitamente nel modo seguente

$$(1''_{III}) \qquad \sum \varphi_{i_0, i_1, \cdots, i_{k-1}}(x_k, \cdots, x_r)\, x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_{k-1}^{i_{k-1}} = 0,$$

dove $\varphi_{i_0,i_1,\cdots,i_{k-1}}(x_k,\cdots,x_r)$ denota una forma di grado

$$n-(i_0+i_1+\cdots+i_{k-1})$$

nelle $x_k,\cdots,x_r$, con coefficienti in Γ^*, e la somma va estesa a tutte le k–ple ordinate di interi non negativi $i_0, i_1,\cdots, i_{k-1}$ tali che

$$0\leq i_0+i_1+\cdots+i_{k-1}\leq n-1.$$

Pertanto il sistema

$$(1'''_{III}) \qquad \varphi_{i_0,i_1,\cdots,i_{k-1}}(x_k,\cdots,x_r)=0 \qquad (0\leq i_0+i_1+\cdots+i_r\leq n-1)$$

comprende in tutto

$$c'''=\binom{n+k-1}{k}$$

equazioni omogenee nelle $r-k+1$ variabili $x_k,\cdots,x_r$, di cui ve n'è una sola di grado massimo n, e

$$k_i=\binom{k+i-1}{i} \qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

di grado $n-i$. Il sistema $(1'''_{III})$ ha le caratteristiche $n'''=n$, $a'''=1=a$; dunque, in virtù del n. 2 e delle (5), (III), potremo ad esso applicare il teorema del n. 1 con $k'''=0$, ciò che conduce a supporre

$$r-k\geq\mu(n,\{n-1\}_{k_1},\cdots,\{1\}_{k_{n-1}}|0),$$

dove $\{n-i\}_{k_i}$ stia a rappresentare l'intero $n-i$ ripetuto k_i volte. Vediamo così che, se vale questa limitazione, si possono attribuire alle $x_k,\cdots,x_r$ valori non tutti nulli

$$x_k=p_k,\cdots,x_r=p_r$$

che soddisfino alle $(1'''_{III})$ ed appartengano ad un campo che sia un'estensione di Γ^* del tipo voluto. Ma allora le

$$x_k:\cdots:x_r=p_k:\cdots:p_r$$

rappresentano nell'S_r uno spazio S_k (contenente S_{k-1}), che appartiene al campo suddetto e giace sulla $(1''_{III})$. Perciò anche nelle ipotesi attuali il teorema del n. 1 sussiste, potendosi assumere

$$\mu(n|k)=k+\mu(n,\{n-1\}_{k_1},\cdots,\{1\}_{k_{n-1}}|0).$$

6. Il procedimento per induzione descritto nei nn. 2–5 permette di definire ricorrentemente la funzione μ ed il campo Γ^* in forma precisa, che tuttavia non è necessariamente la migliore possibile.

Così ad esempio, in base ai nn. 5 e 2, abbiamo

$$\mu(2|k)=k+\mu(2,\{1\}_k|0)=2k+\mu(2|0)=2k+1.$$

Questo risultato non può venir migliorato, in quanto notoriamente per $r < 2k+1$ una quadrica non singolare di S_r, considerata in un campo arbitrario, non contiene ivi nessun S_k.

Poggiando sul risultato testè ottenuto e sul n. 4, si vede agevolmente che

$$\mu(\{2\}_a, \{1\}_b | k) = (k+1)2^a + b - 1. \tag{9}$$

Dai nn. 5 e 3 segue quindi

$$\mu(3 | k) = k + \mu(3, \{2\}_k, \{1\}_{k(k+1)/2} | 0) = k + \mu[\{2\}_k, \{1\}_{k(k+1)/2} | \mu(3 | 0)];$$

ora è $\mu(3 | 0) = 1$ (n. 2), onde, avuto anche riguardo alla (9), si deduce

$$\mu(3 | k) = 2^{k+1} + k(k+3)/2 - 1.$$

Non è difficile, così proseguendo, determinare esplicitamente μ (e, volendo, Γ^*) in casi più generali; l'espressione che in tal guisa si ricava per la funzione (3) diventa però rapidamente complicata al crescere delle n.

Si possono talora ottenere per μ (e Γ^*) determinazioni più ristrette, modificando opportunamente il procedimento suddetto. Esaminiamo ad esempio il caso in cui, colle notazioni del n. 2, si abbia

$$a = c > 1 \quad , \quad k > 0.$$

In queste ipotesi, invece di procedere come indicato nel n. 4, si determini anzitutto un S_{k-1} giacente sulla varietà di S_r rappresentata dalle (1) ed appartenente ad un campo opportuno; supposto, com'è lecito (n. 5), che tale S_{k-1} sia lo spazio (8), si tratti quindi simultaneamente ciascuna delle equazioni (1) nel modo esposto al n. 5 per la $(1'_{III})$. Si vede così che nell'enunciato del n. 1, in luogo della funzione $\mu(\{n\}_a | k)$ data dalla formula finale del n. 4, può porsi la

$$\mu_1(\{n\}_a | k) = k + \mu(\{n\}_a, \{n-1\}_{ak_1}, \cdots, \{1\}_{ak_{n-1}} | 0),$$

dove le notazioni sono ancora quelle del n. 5. In particolare, per $n = 2$, l'ultima equazione diventa

$$\mu_1(\{2\}_a | k) = k + \mu(\{2\}_a, \{1\}_{ak} | 0),$$

e la funzione μ che qui compare nel secondo membro può senz'altro venir desunta dalla (9): ciò fornisce per μ_1 l'espressione.

$$\mu_1(\{2\}_a | k) = 2^a + (a+1)k - 1,$$

la quale risulta sempre inferiore alla

$$\mu(\{2\}_a | k) = (k+1)2^a - 1$$

data dalla (9) per $b = 0$.

Fisica. — *Un'esperienza sulla teoria della relatività.* Nota II (*) del Corrisp. A. Amerio.

Nella mia Nota *Nuovo metodo per misurare la velocità della luce* (1) ho mostrato che si può fare questa misura stabilendo in due stazioni A e B, in modo simmetrico, due complessi allineati, ciascuno fatto con due nicol e una cellula di Kerr, inviando nella direzione $A \rightarrow B$ un fascio di radio-onde le quali servano per attivare le cellule di Kerr e nelle due direzioni opposte $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$ due intensi fasci di luce attraverso ai nicol e alle cellule.

Se queste onde sono molto lunghe rispetto al percorso che fa la Terra nella direzione AB mentre esse da A arrivano a B, si vede che la luce passa sempre in modo intermittente, quando è diretta da A a B, mentre quella che è diretta da B verso A *passa* attraverso a questa stazione se la distanza AB è un multiplo intiero di quarti d'onda e *non passa* se essa è un multiplo dispari di ottavi d'onda.

Nella Nota successiva *Un'esperienza sulla Teoria della Relatività* (2) ho fatto vedere che utilizzando il metodo spiegato nella Nota precedente si poteva eseguire una specie di *experimentum crucis* discriminante fra la teoria classica della propagazione della luce e la teoria della relatività. Caratteristica di questa esperienza è che essa si fonda sulla misura di un rapporto pari a quello che c'è tra la velocità della Terra e quella della luce e non a quello del quadrato di questo rapporto. Un ulteriore esame mi fa vedere che è possibile tutta una serie di prove discriminanti fra le due teorie.

Nella seconda Nota citata, che è un'esposizione schematica dell'esperimento che mi sono proposto, mi limitavo infatti a considerare ciò che avviene se fra le due stazioni A e B (supposte ferme) fra le quali si propaga il fascio di radioonde, siano comprese 2500 onde o $2500 \pm \frac{1}{4}$, avendo considerato il rapporto tra la velocità di traslazione della Terra nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole e quello della luce come eguale a 1/10000.

In questi tre casi si trova che la luce che è diretta da B verso A *non passa* attraverso questa stazione secondo la teoria classica e *passa* secondo la teoria della relatività.

Ma si può fare una trattazione più completa che espongo brevemente.

Le due stazioni A e B siano disposte su un parallelo; detta v la velocità istantanea della Terra nella sua rivoluzione annua, la componente di essa nella direzione AB a mezzodì o a mezzanotte sarà

$$v_1 = v \cos 23^\circ 27' = 0{,}917\, v .$$

(*) Presentata nella seduta del 14 febbraio 1948.

(1) «Atti Acc. Lincei», ser. VIII, vol. II, p. 238 (1947).

(2) «Atti Acc. Lincei», ser. VIII, vol. II, p. 736 (1947).

A questa bisognerebbe aggiungere o togliere la velocità v_2 dovuta alla rotazione della Terra sul suo asse; il valore di questa a 45° di latitudine è di 328 m. al secondo e rispetto ai 27 Km. circa di v_1 si potrà trascurare. Altri moti propri della Terra dànno contributi ancora minori ad eccezione di quello di trascinamento dovuto al moto di tutto il sistema solare di cui parlerò in seguito e perciò a maggior ragione si possono pure trascurare. Chiamando a il rapporto $c/0{,}917\ v$, dove c è la velocità della luce e N il numero intiero più prossimo ad $a/4$, facciamo in modo che quando si annulla la componente della velocità v nella direzione AB, cioè intorno alle 6 e alle 18, tra le due stazioni A e B siano comprese radioonde in numero di

$$N_1 = N \pm \frac{n}{4}$$

dove n sia un numero intiero. Il valore di n deve essere piccolo rispetto a N in modo che il quarto della lunghezza d'onda differisca di poco dal percorso della Terra nel tempo che impiega la luce ad andare da una stazione all'altra e vedremo in seguito tra quali limiti converrà contenerlo.

Il valore del rapporto a è variabile con v. In media poichè $v = 29{,}76$ Km. e $c = 299.800$ Km. si ha $v_1 = 27{,}30$ e $a = 10.980$; il valore massimo della velocità si ha al perielio ed è 30,25 Km; il minimo all'afelio ed è 29,36 Km, cui corrispondono rispettivamente i valori $v_1 = 27{,}74$ Km., $a = 10.800$ e $v_1 = 26{,}92$ Km. $a = 11.130$.

Bisognerà quindi che i numeri di radioonde comprese nell'intervallo AB nelle condizioni sopradette varino fra $2700 \pm \frac{n}{4}$ e $2782 \pm \frac{n}{4}$, ciò in dipendenza dall'epoca in cui si eseguiranno le misure.

Ammettiamo dunque che il numero di onde comprese fra le due stazioni quando sia nulla la componente della velocità della Terra nella direzione AB sia $N \pm \frac{n}{4}$ dove N e n sono numeri intieri.

In tale caso la differenza di fase delle radioonde tra A e B, indicando con T il periodo, è $\left(N \pm \frac{n}{4}\right)T$, sicchè quando la luce entra per B che è in fase massima, A è nella fase

$$\frac{T}{4} + \left(N \pm \frac{n}{4}\right)T$$

e quindi è in fase massima se n è pari, in fase minima se n è dispari.

Mentre la luce va da B ad A, se la Terra si muovesse in direzione normale ad AB le radioonde compirebbero esattamente $N \pm \frac{n}{4}$ oscillazioni, quindi per n pari, B ed A sarebbero entrambi in fase massima e perciò dopo $N \pm \frac{n}{4}$ periodi A sarebbe ancora in fase massima.

Se n è dispari, B è in fase massima quando vi passa la luce ed A in fase minima, perciò dopo $N \pm \frac{n}{4}$ periodi, A sarà passata in fase massima; in entrambi i casi quindi la luce *passerà*.

La cosa andrebbe così anche se la Terra si muovesse nella direzione AB, stando alla teoria della relatività, ma secondo la teoria classica no.

Infatti se la Terra si muove nella direzione da A a B la stazione A va incontro alla luce e mentre questa percorre il tratto BA essa le va incontro di un cammino che è tanto più prossimo ad un quarto di lunghezza d'onda quanto più piccolo sia n, perciò se n è abbastanza piccolo, la vibrazione in A nel momento in cui vi giunge la luce sarà non già in un massimo, ma nel minimo precedente e la luce *non passerà*.

Lo stesso si dica se il moto della Terra è nel verso $B \rightarrow A$ perchè in questo caso la stazione A sfugge in modo che il cammino si allunga di un quarto d'onda e quando la luce vi arriva trova la stazione nel minimo successivo al massimo che vi avrebbe trovato se la stazione fosse stata ferma e perciò *non passa*.

Vediamo infine ciò che avviene se nel tratto AB, nel momento in cui esso è normale allo spostamento della Terra, siano comprese onde in numero di $N \pm \frac{n}{8}$ per n dispari e, come prima, non troppo grande.

Tra gli stati della vibrazione in B ed in A, supposta al solito nulla la componente della velocità della Terra nella direzione AB, ci sarà sempre la differenza di fase $\left(N \pm \frac{n}{8}\right) T$.

Quindi quando la luce entra per B che è in fase massima, A sarà in fase $\frac{T}{4} + \left(N \pm \frac{n}{8}\right) T$, e quando la luce giungerà in A, troverà la fase:

$$\frac{T}{4} + 2\left(N \pm \frac{n}{8}\right) T = \left(2N + \frac{1 \pm n}{4}\right) T$$

e poichè n è dispari $\frac{1 \pm n}{2}$ è un numero intiero di mezzi periodi e perciò A sarà in fase minima e la luce *non passerà* (fig. 1, *a* e *b*).

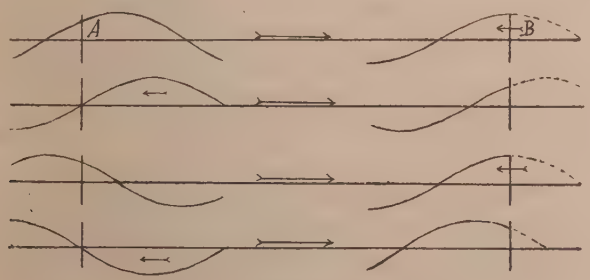


Fig. 1.

La freccia maggiore indica la direzione delle radioonde, la minore quella della luce.

Questo sta bene secondo la teoria della relatività anche quando la Terra si sposti nella direzione AB.

Invece secondo la teoria classica, dato il moto della Terra da A verso B e indicando con λ la lunghezza delle radioonde, la stazione A va incontro alla luce proveniente da B esattamente di $\frac{1}{4}\lambda$ se $N \cdot \lambda = AB$, o circa, se siamo nell'ipotesi fatta $\left(N \pm \frac{n}{8}\right)\lambda = AB$, e per conseguenza in luogo della fase precedentemente calcolata per questa stazione la luce vi giunge con anticipo di $\frac{T}{4}$ e perciò durante un massimo; in conseguenza essa *passa* (fig. 2, *c* e *d*).

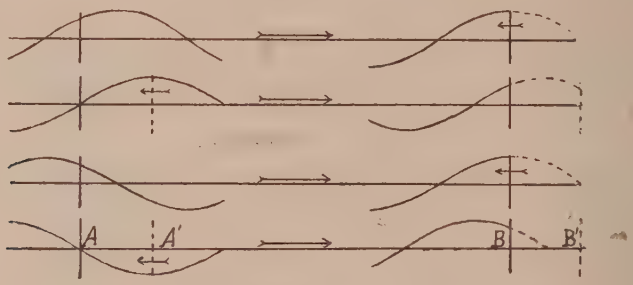


Fig. 2.

Se la Terra va da B verso A il cammino della luce si allunga di $\frac{1}{4}\lambda$, o circa, e perciò in A la luce trova un massimo e *passa*.

Riassumendo quindi si può dire che: se tra le due stazioni A e B (nel momento in cui la direzione AB è normale al moto della Terra) il numero di onde contenute è $N \pm \frac{n}{4}$ per n intiero e non troppo grande:

Secondo la teoria della relatività la luce diretta da B ad A *passa*; invece *secondo la teoria classica non passa.*

Se invece nello stesso intervallo sono contenute $N \pm \frac{n}{8}$ radioonde, per n dispari, secondo la teoria della relatività la luce diretta da B ad A *non passa*, secondo la teoria classica la luce *passa.*

S'inverte cioè per la teoria classica il comportamento che si ha per entrambe le teorie quando si operi con onde lunghe, mentre tutto resta inalterato secondo la teoria della relatività.

Da quanto precede risulta quindi la possibilità di tutta una serie numerosa di prove discriminanti tra le due teorie, perchè anche se ci limitiamo a quelle prove nelle quali il quarto dell'onda differisca di non oltre 1 % dal percorso che fa la Terra mentre la luce va da A e B o da B ad A, potremo sperimentare con onde le cui lunghezze varino in modo che i numeri di esse

che sono contenuti nel tratto AB passino da $\frac{99}{100}N$ a $\frac{101}{100}N$ per esempio all'afelio da 2675 a 2725, al perielio da 2760 a 2810 circa, ossia poichè si procede di ottavo in ottavo di onda si potrebbero fare centinaia di verificazioni.

La sicurezza di queste prove è fondata sull'esattezza di misura delle frequenze delle radioonde, misura la cui esattezza è notevolmente superiore a quanto qui si richiede che è nell'ordine di 10^{-4} a 10^{-5}.

Altre più gravi difficoltà si palesano, ma nessuna mi pare tale da essere insuperabile. La distanza fra le due stazioni dovrà essere scelta tenendo conto anche del tempo di disattivazione o di rilassamento delle cellule.

Per solfuro di carbonio, vecchie esperienze di Abraham e Lemoine avevano provato che questo tempo è certo inferiore a 10^{-8} secondi. Esperienze più recenti (3) riducono questo tempo a meno di 10^{-10} e, secondo i calcoli di Ranzi, fondati sulla teoria di Debye, questo tempo si riduce pel solfuro di carbonio a meno di 10^{-11} e pel nitrobenzolo a poco più di 10^{-11}. In questo tempo, 10^{-11} secondi, le radioonde percorrono cm. 0,3 quindi una onda intiera potrebbe essere lunga meno di 3 cm. e la distanza fra le due stazioni potrebbe essere ridotta a meno di 100 m. Ma la grave difficoltà attuale di avere onde così brevi con sufficiente energia e sopratutto la convenienza di non ridurci a tempi troppo prossimi a quello del rilassamento della cellula, impongono naturalmente di collocare le stazioni A e B a distanza notevolmente maggiore.

Si tratterà quindi di scegliere quel complesso di circostanze che permettano l'esecuzione dell'esperienza nelle condizioni più convenienti.

Tra le circostanze da considerare c'è che la Terra ha vari movimenti che si compiono con notevoli velocità, oltre a quello di rivoluzione intorno al Sole, sin qui considerato.

C'è il moto di trascinamento dovuto alla traslazione del sistema solare verso il cosidetto *apice*. Questo moto avviene in una direzione che fa un angolo di circa $53° \frac{1}{2}$ col piano dell'ecclittica, e quindi di 30° con quello del parallelo. con una velocità di circa 19,5 Km. al sec.

La proiezione di questa velocità sul piano del parallelo è di Km. 16,9 e questa, componendosi con quella di rivoluzione della Terra intorno al Sole, complica il problema; infatti in certi casi essa si somma con la precedente e aumenta quindi il rapporto $\frac{v}{c}$ che si vuol misurare, ciò che favorisce la misura, in altri si sottrae, ciò che peggiora molto le condizioni della misura, riducendo quel rapporto a meno di metà. Ma poichè si tratta di un dato quantitativamente non molto sicuro, è forse meglio fare l'esperienza in quei momenti nei quali la componente di questa velocità nella direzione del moto proprio della Terra intorno al Sole sia nulla o almeno ridotta a quantità tali da non influire, secondo la teoria classica, sulla misura.

(3) Ivo Ranzi, « Nuovo Cimento », p. 270, 1930.

Per esempio limitando le misure a quei periodi nei quali questa componente è ridotta a ± 3 Km. si devono considerare i tempi nei quali la direzione di questa componente fa con la velocità di rivoluzione un angolo maggiore di $\pm 80^0$. Il tempo che impiega la Terra nel suo moto annuale per passare da una direzione che fa con la componente della velocità di trascinamento un angolo di $+ 80^0$ a quella in cui fa un angolo di $- 80^0$ è di 20/360 dell'anno, vale a dire 20 giorni. Si hanno quindi nell'anno quaranta giorni favorevoli all'esecuzione dell'esperienza.

Se poi si vorrà vedere se fosse possibile approfittare del periodo in cui la componente sul piano del parallelo si somma con quella di traslazione, con uno scarto di non oltre 2 Km. passando da 16,9 Km. a 14,9, si potranno fare esperienze nell'intervallo di tempo che impiega la Terra a percorrere il tratto nel quale l'angolo compreso fra le direzioni delle due velocità si conserva tra circa $- 28^0$ e $+ 28^0$; questo tempo dura 56/360 dell'anno, cioè 56 giorni consecutivi. In questo periodo il rapporto c/v si riduce a 6800 e il numero di onde compreso fra le due stazioni si riduce a 1700, con notevole vantaggio della misura.

L'incertezza che circonda questa velocità di trascinamento mi consiglia tuttavia di seguire il concetto precedente, cioè di eseguire le misure quando la sua componente sia praticamente trascurabile.

Geologia. — *La costituzione geologica sintetica delle Alpi.* Nota (*) del Socio F. Sacco.

Se, con occhio geologico e visione sintetica, osservasi la Catena alpina, si può constatare che essa, verso occidente, è divisibile in due parti, ben diverse tra loro, da una linea arcuata che denominerei *linea geodivisoria* o *limite alpino-franco-elvetico* per analogia col *limite alpino-dinarico* che si trova nella regione *alpina* sud-orientale.

Tale linea geodivisoria sorge dal mare ligure presso Ceriale (Albenga) ad Est della grande insenatura eocenica di Imperia, si svolge nella fratturata e tettonicamente tormentata zona montuosa di Zuccarello–Castelbianco–Nasino, sino in Val Tanaro presso Ormea.

Da Ormea detta linea segue la valle del Tanaro–Negrone e, attraverso le Carsene, si dirige su Limone in Val Vermenagna sin sotto Vernante; dopo di che passa nella bassa Valle del Gesso sopra Roccavione, poi in Valle Stura (Demonte–Vinadio–Bersezio) sino al Colle della Maddalena, passando così in Francia (Larche–S. Paul, ecc. dove presenta il grande slargo eocenico ebrodunico), dirigendosi poi verso Guillestre (in Val Durance)–Argentiére–Monetier–S. Jean Maurienne–Moutiers, nelle cui vicinanze cessa (dopo circa 200 chilometri di sviluppo da Imperia) l'interessante penetrazione eoce-

(*) Presentata nella seduta del 13 dicembre 1947.

nica entroalpina, tanto importante per segnarci l'epoca posteocenica (oligo–miocenica) del grande diastrofismo alpino.

Da Moutiers la linea geodivisoria rientra in Italia pel colle della Seigne e ne riesce al Colle Ferret, donde scende in Svizzera nella Valle del Rodano per Sion–Visp–Briga–Binn–Bedretto–Airolo (alta Val Ticino) S. Gottardo–Campo. Poi questa linea, che intanto è diventata una zona calcescistosa, si allarga ampiamente nella conca dei Grigioni (Haus–Churs o Coira–Malans–Klosters, ecc.) dove nuovamente si collega coll'Eocene della fascia alpina esterna che giunge da Elm–Klausen–Altdorf, ecc. Ma detta zona, quasi urtando contro il Massiccio gneissico di Silvretta, che ne sbarra l'ulteriore sviluppo regolare verso est, viene deviata a sud estendendosi così sino a raggiungere il fianco destro di Val d'Adda tra Chiavenna e Silvaplana.

Però questa zona calcescistosa dei Grigioni, quasi attraverso il grande sviluppo dolomitico triassico delle Alpi Retiche, riappare, in lunga conca isolata frammezzo ai Massicci gneissici, nell'alta Valle dell'Inn tra Schulz e Landech (Engadina p. p.). Prevale sempre la tettonica a sinclinali.

Riappare ancora tale zona calcescistosa nell'alta Valle dell'Isarco estendendosi attorno a Vipiteno, donde va a costituire coi suoi deboli scisti la famosa depressione del Brennero per discendere in Austria, continuando però verso est nella lunga zona di S. Giacomo-Windisch Matrei (sempre con strati scistosi varii, fortemente pigiati e sollevati), avvicinandosi così notevolmente, negli alti Tauri, all'opposto limite alpino–dinarico.

È specialmente nelle Alpi Occidentali che l'accennata linea geodivisoria nel suo arcuato sviluppo, di circa 500 chilometri, assume la notevole importanza di dividere due mondi geologici ben diversi fra di loro, cioè: 1° quello esterno occidentale che (salvo i Massicci antichi di Argentera o Mercantour, Pelvoux, Belle Donne, Monte Bianco ed Aar) è essenzialmente costituito da calcari e marne fossilifere del Mesozoico a facies normale (sovrapposto, come potente manto, all'Archeopaleozoico, tettonicamente spesso tormentato e fisicamente eroso, decapitato), rappresentando il deposito regolare di un mare bati–neritico, già popolatissimo di ogni sorta di esseri marini; 2° quello interno, orientale, essenzialmente costituito da terreni cristallini metamorfici, generalmente senza fossili, ma con frequenti intercalazioni di roccie endogene, simiche (Pietre verdi, *Grunstein*, ecc.) dell'Archeopaleozoico e del Mesozoico, in gran parte abissolitico; terreni rappresentanti depositi bati–abissali sul cui fondo, o entro di essi, dovettero verificarsi (specialmente nel Mesozoico medio) intensi fenomeni endogeni, in rapporto colla non lontana (sotterraneamente) zona o involucro simico caldo, fluido che, premuto, cercava di intrudersi in alto.

Dal punto di vista TETTONICO (per il che sarebbe opportuno esaminare le nove sezioni geologiche, obiettivamente segnate, allegate al mio lavoro sopra *Les Alpes Occidentales*, 1913) si può notare che, in linea generale, le formazioni calcaree esterne alla linea geo–divisoria (mesozoiche sino all'Eocene compreso) sono fortemente ripieghettate con rovesciamenti verso l'esterno, contro e fra i Massicci antichi sovraccennati, mentre, che allontanan-

dosene verso l'esterno (ovest o nord ovest all'incirca) esse (comprendendo anche il Miocene) diventano solo più ondulate, oppure (come nelle Alpi calcaree settentrionali) spesso fortemente disturbate da pieghettature, faglie, scorrimenti, ribaltamenti, accartocciamenti, trasgressioni, ecc.; fenomeni tanto bene studiati ed illustrati da Schardt, Heim, Lugeon, ecc., ecc. e che talora presentano carreggiamenti così notevoli da derivarne, per stacchi ed erosioni, anche grandi lembi ora persino isolati, come per esempio quelli di Le Chamossaire, Les Annes, Sulens, ecc.

Invece le formazioni interne alla linea geo–divisoria, pur essendo analogamente foggiate in corrugamenti e rovesciamenti, questi vi si presentano disposti nei più diversi sensi secondo il Massiccio a cui sono collegati, accavallati o solo appoggiati ma talora anche rovesciati, come per esempio attorno alle cupole anticlinali, regolari o rovesciate, del Gran Paradiso, del M. Rosa, dell'Ambin, della Dora Maira, di Lanzo Sesia, ecc.; talora anche con ribaltamenti che originarono lembi anche isolati, come per esempio, quello del Cervino.

Quanto alla linea o zona geodivisoria essa è prevalentemente foggiata a sinclinale, semplice o multipla, regolare o rovesciata, spesso fagliata, appoggiata trasgressivamente e discordemente su terreni più o meno antichi.

Nella costituzione geologica di tale zona talora appare tutta la serie mesozoica sino all'Eocene compreso, talora solo il Trias (come in Val Vermenagna), spesso la sola formazione calcescistosa (con o senza calcari triasici nella parte inferiore), talvolta ridotta esigua (come nella media Valle del Rodano), talora invece amplissima come nel centro delle Alpi piemontesi, nella vasta conca di Coira nei Grigioni, nonchè nell'alta Valle dell'Inn.

Quanto al METAMORFISMO è notevole che all'esterno della linea geodivisoria, salvo i terreni antichi fondamentali dei Massicci cristallini, tutta la serie mesozoica non ha subìto metamorfismo intenso, eccetto il semplice sclerometamorfismo di indurimento o lapidificazione per pressione e cementazione.

Invece nel lato interno a detta linea, almeno nelle Alpi Occidentali, non solo i terreni antichi sono cangiati in Gneiss, Micascisti ed altri svariati Scisti cristallini, colle relative Anfiboliti, Prasiniti, ecc., ma anche i terreni del Paleozoico superiore (come per esempio il potente Antracitifero della Valle d'Aosta e della Savoja, con Micascisti talora gneissiformi, la Mollieresite, ecc. ed il Permiano, cogli Scisti besimauditici, con varii Micascisti, la Rojaite, ecc. delle Alpi Marittime) sono più o meno profondamente metamorfosati, cristallizzati, talora sino al Trias inferiore.

Ma di più, se il Mesozoico inferiore (Trias) è spesso, in tutto od in parte, ancora abbastanza ben conservato come Calcare dolomitico (per esempio in estese zone delle Alpi Marittime, ampiamente nelle Retiche, ecc.), invece la serie mesozoica in generale ha subìto un fortissimo metamorfismo di tipo abissolitico, per cui i suoi depositi, originariamente argilloso–calcarei, si sono trasformati in *Calcescisti*, Micascisti, ecc. (i cosidetti *Schistes lustrés* dei francesi, i *Bündnerschiefer* dei tedeschi, ecc.) inglobanti spesso più o meno po-

tenti roccie endogene di tipo laccolitico, più o meno basiche, simiche, le cosidette *Pietre Verdi* degli italiani, *Grünstein* dei tedeschi, *Greenstone* degli inglesi ecc., cioè svariati Metabasiti (Diabasi, Peridotiti, Anfiboliti, Serpentine, Gabbri, ecc.), oltre a qualche Calcare semicristallino, ed a Radiolariti silicee.

Di questo speciale importantissimo fenomeno abissale ebbi già più volte ad occuparmi in pubblicazioni a cui quindi rinvio [1]; solo qui ricordo che, mentre nell'Appennino le formazioni abissali, siccome limitate al Cretaceo, subirono solo lo Sclerometamorfismo di pietrificazione parziale della Sclerozona, trasformandosi in Scisti galestrini, Argilliti, Pietraforte, Calcari alberesi e simili, con Diabasi, Peridotiti, ecc. invece nelle Alpi le formazioni abissali, iniziatesi già nel Trias superiore e continuate sino al Giurese e forse al Cretaceo [2], subirono un metamorfismo più lungo, più intenso (sia dinamico con conseguente laminazione, sia termo-idrico-pneumatolitico che portò alla loro cristallizzazione, produzione di minerali, ecc.) collegato all'Epizona; per cui le formazioni abissali si cangiarono in Calcescisti, Micascisti, ecc. (colle relative Pietre Verdi anche prasinitico-anfiboliche) talora persino in Gneiss che già accennano alla Mesozona; nella quale dovettero in gran parte metamorfizarsi i sottostanti terreni più antichi archeopaleozoici.

Riguardo all'ETÀ delle formazioni costituenti le Alpi, non è qui il caso di trattarne per le regioni esterne alla linea geodivisoria ed interne alla linea o limite alpino-dinarico, essendo essa ben conosciuta per la loro ricchezza paleontologica e riferita a diversi piani del Mesozoico.

Invece per le formazioni interne a dette linee, in causa del loro abissolitismo, quasi senza fossili, la loro posizione cronologica rimase a lungo *incertae sedis*. Per gli Argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino, creduti generalmente eocenici, da oltre mezzo secolo vado provando, a base di studi tettonici e paleontologici (indicati da rari resti di Benettiti, Radiolari, Uintacrini, Inocerami, Pticodi, Ittiosauri, ecc.) che essi appartengono al Cretaceo.

Per i Calcescisti alpini con Pietre Verdi, è noto che, per la loro facies cristallina, antica, furono per lungo tempo attribuiti all'Arcaico o al Paleozoico, mentre che i rarissimi fossili raccoltivi (Arietiti, Belemniti, Grifee, Pentacrini, ecc.) ne provarono l'età mesozoica, iniziandosi tale metamorfismo (secondo le regioni) nel Trias superiore, predominando nel Lias e sviluppandosi sino al Giura e fors'anche al Cretaceo con certi scisti spesso rossigni e calcari a Calpionelle, talora siliciferi con Radiolariti, ecc.

L'interesse di queste formazioni abissolitiche del Mesozoico alpino-appenninico sta anche nel fatto che esse ci provano che in tale regione ora montuosa vi era allora una complessa fossa marina arcuata analoga a quelle

(1) F. Sacco, *Le facies del Cretaceo nell'Appennino.* « Atti Acc. Sc. Torino », vol. 66, 1930; *Le formazioni abissali in Italia.* « Atti Acc. Sc. Torino », vol. 66, 1931; *Origine abissale di gran parte dei terreni arcaici.* « Mem. Soc. geol. it. », vol. I, 1931; *I problemi delle formazioni ofiolitifere delle Alpi e degli Appennini.* « Boll. Uffic. geolog. », vol. LIX, 1934; *L'Abissolitismo.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. III, p. 1947.

(2) Secondo alcuni geologi.

delle Aleutine, delle Kurili (Giappone), di Kyu-Kyu, delle Mariane, delle Filippine, del Messico, di Atacama nell'Oceano Pacifico, della Sonda nell'Oceano Indiano, delle Antille meridionali nel Bacino argentino, ecc.

Discendendo dal Mesozoico nella serie stratigrafica incontriamo, nelle Alpi occidentali, potenti formazioni di scisti più o meno cristallini varii, besimauditici, rojaitici, micascistosi e perfino talora gneissici che, per la loro connessione, in alto col Trias inferiore ed in basso cogli scisti antracitiferi, debbono attribuirsi al *Permiano*.

Quanto agli scisti grafitosi–antracitiferi, essi, per racchiudere qua e là impronte di Pecopteri, Cordaiti, Calamiti, Lepidodendri, Asterofilliti, ecc. sono senza dubbio riferibili al *Carbonifero*; quantunque certi scisti carboniosi di varia età possano anche essere in rapporto con antichi Idrocarburi endogeni, talora metamorfosati anche in grafiti.

Ma quando discendiamo nella potentissima serie degli scisti cristallini filladici, parascisti micacei, gneissici, ecc. non trovandovi più resti fossili determinabili (causa l'intenso metamorfismo epi–metazonale con cristallizzazione, nonchè per la loro probabile mancanza o assoluta povertà di fossili in rapporto colla natura dell'ambiente batiabissale originario), resta incerta la loro attribuzione cronologica pur essendo presumibile la loro età paleozoica se pur non giungono anche, inferiormente, all'Archeozoico superiore.

A chiusa di queste sintetiche considerazioni sulla costituzione geologica delle Alpi sembra opportuno fare un cenno sulle moderne TEORIE DEI GRANDI CARREGGIAMENTI nella formazione delle Alpi e degli Appennini.

Per l'Appennino, siccome lo studiai geologicamente per un sessantennio, ho già avuto più volte occasione di esprimere il mio pensiero, che cioè, vi riconosco il carattere tettonico di regione corrugata a forti pieghe, talora anche ribaltate, nonchè persino carreggiate per alcuni chilometri, come per esempio segnalai con apposita Nota sopra *Una placca isolata di Cretaceo sul Miocene nell'Appennino reggiano* (« Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XXII, Roma, 1923) per completo rovesciamento; ma non vi potei mai osservare, e quindi non mi paiono ammissibili, quelle falde di carreggiamento sviluppate per centinaia di chilometri, sotto il nome di *Toscanidi*, *Liguridi*, ecc. che furono proposte ed appoggiate da diversi geologi stranieri (come Lencevicz, Tillmann, Kober, Stille, Termier, Staub, De Wijkerslooth, Teichmuller, ecc.) e sostenute anche da alcuni italiani, specialmente dal Rovereto; tanto che già trattando dei *Problemi delle formazioni ofiolitifere* ... (1934) ebbi ad indicare quella teoria come una magnifica *Geopoesia*. Invece per le Alpi, conoscendo specialmente le occidentali e poco le orientali, non ebbi autorità di interloquire, pur seguendo con interesse lo sviluppo di tali teorie sin dal loro sorgere per opera del mio compianto amico H. Schardt e nel loro estendersi e giganteggiare per opera di Argand, Lugeon, Staub, ed una pleiade di altri studiosi della geologia alpina, in modo da costituire una interessante storia, quale fu assai ben descritta dal Collet nel suo libro sopra *La structure des Alpes* e dall'Heritsch delineando *Die Deckentheorie der Alpen* (1927).

Però davanti a tale teoria che ammette per esempio, il carreggiamento di intiere formazioni dalla regione subalpina meridionale a quella settentrionale, gigantesche nappe di traslazione (Elvetidi, Pennidi, Grigionidi, Tirolidi, ecc.), nonchè, straordinari sviluppi sotterranei, grandi finestre e simili idee, rimasi sempre un po' scettico, limitandomi, quasi come contropartita, a pubblicare un lavoro sopra *Les Alpes Occidentales* (1913) corredato da numerose sezioni geologiche generali di carattere forse un po' semplicista ma fondate in gran parte su dirette osservazioni tettoniche fatte sul terreno.

Ma, dovendo ormai presto deporre martello e penna, penso che posso permettermi di accennare che per le Alpi dette idee ultranappistiche non mi sembrano accettabili per varî motivi, di cui ne accennerò alcuni.

Anzitutto tali straordinari fenomeni di sollevamento per migliaia di metri e successive traslazioni, scorrimenti di grandi masse per centinaia di chilometri, non paiono accordarsi colle leggi fondamentali della Meccanica; tanto più dovendo generalmente essi verificarsi fuori dell'ambiente termico ed idrico che avrebbe potuto facilitarne alquanto il meccanismo.

Inoltre le supposte radici o regioni meridionali di partenza di tali gigantesche falde di carreggiamento sono solo immaginarie, nè hanno riscontro positivo sul terreno.

Notisi che se si fossero verificati detti immensi straordinari scorrimenti, coi necessari scavalcamenti della Catena alpina, dovremmo trovare, nella sua regione esterna alla sovraccennata linea geodivisoria, una immensa quantità di frammenti grandi e piccoli di Calcemicascisti, Gneiss e Pietre Verdi tanto sviluppati nella regione interna, mentre ciò non si verifica e vi si incontrano invece frequenti «blocchi esotici» calcarei provenienti dalla regione esterna mesozoica calcarea in cui pur notevoli fenomeni di carreggiamento si poterono realmente verificare.

Di più si può notare coll'esame metodico dell'andamento degli strati, come ho direttamente osservato sul terreno (vedi le sezioni geologiche delle *Alpes Occidentales*, 1913), che, mentre nei terreni della regione esterna predomina veramente il rovesciamento verso l'esterno (ciò che s'accorda cogli scorrimenti in tale direzione), invece nella regione interna gli strati mesozoici pendono o sono rovesciati in tutti i sensi, spesso anche verso l'interno, essendo tale loro andamento collegato essenzialmente coi Massicci antichi dai quali tali terreni dipendono o contro cui sono rovesciati.

Infine certi supposti galleggiamenti di intiere montagne gneissiche (per esempio della Dent Blanche, del M. Maury, del M. Emilius, ecc.) sopra i Calcescisti, certe immaginate profonde retroflessioni sotterranee (come per esempio quelle del Gr. Paradiso, del M. Rosa, ecc.) e certe supposte finestre, ecc. sembrano quasi assurde, mentre ne riesce facile la spiegazione per semplici anticlinali radicate oppure per strette sinclinali (pseudo finestre).

Senza dilungarci in ulteriori considerazioni di dettaglio, anche da quanto ho schematicamente sovraesposto parmi si possa concludere che la teoria dei carreggiamenti mentre è accettabile come corrispondente alla realtà

dei fatti se circoscritta in limiti ragionevoli e fu utile come ipotesi di lavoro, quando invece viene estesa ad immensi innalzamenti ed a traslazioni dello sviluppo di centinaia di chilometri, sembra potersi considerare come una *Geofantasia*.

Riguardo all'annessa Tavola notisi: che le aree delle varie formazioni dovevano in origine essere assai più vaste, essendo poi state ristrette assai dai corrugamenti e dalle erosioni. Inoltre la linea divisoria tra il Mesozoico normale delle Dinaridi e quello abissale appenninico sotto la pianura padana è incerto mancando per ora le necessarie trivellazioni profonde trasversali per stabilirla.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

1. – Formazioni mesozoiche normali.

2. – Formazioni cretacee ofiolitifere, abissolitiche, dellAppennino.

3. – Formazioni mesozoiche (spec. liasiche) con Pietre Verdi, abissolitiche, metamorfiche.

4. – Formazioni antracitico–triasiche, semimetamorfiche, delle Alpi.

5. – Formazioni paleozoiche, bati–abissali, con Anfiboliti, metamorfiche, delle Alpi.

N. B. – In questo Quadro sintetico furono omessi per semplicità e chiarezza le formazioni cenozoiche ed antropozoiche.

Neuch
Ber.
Luc.
Thun
C.
Alti
Tauri
Li.
Aar
Oetz
Bolz.
G
Si.
Tic.
B.
D.
So.
Ad.
Tr.
Bell.
Ud.
R.
C.
Ber.
Tr.
Nov.
Mi.
Br.
Ver.
Pa.
Ve.
G.P.
Man.
Ferr.
Al.
M
Ge
Bo
Sa.
Corsica
Rim.
Ni.
Pi.
1
2
3
4
5

Geologia. — *La sinclinale di M. Antoroto–Mondolé* (tra Ormea e Limone Piemonte). Nota (*) del Socio F. Sacco.

Il M. Antoroto (2144 m. s. l. m.), quasi a cavallo fra Val Tanaro e Val Casotto, per la sua imponente massa calcarea, quasi sovraincombente al paese di Ormea, attirò spesso l'attenzione degli alpinisti e dei geologi. Sin dal 1884, durante le mie prime escursioni nelle Alpi Marittime, ebbi a delinearne lo sviluppo di questo gruppo calcareo nella Nota sopra *Nuove caverne ossifere e non ossifere nelle Alpi Marittime. Osservazioni geologiche.* (« Boll. C. A. I. », n. 51, 1884) con Cartina geologica al 50.000.

Se osserviamo la bella, per quanto irregolare, sinclinale di terreni mesozoici (con placche eoceniche sparse) che dalla Rocca d'Orse (in Val Tanaro) si estende verso ovest, la vediamo svilupparsi nel gruppo del M. Antoroto (alta Val Casotto) sino al gruppo di M. Fantino–Mondolé (alta Val Maudagna) attraverso la Serra di Monterossino (alta Val Corsaglia), in modo da raggiungere l'alta Valle dell'Ellero, dove si sovrappone trasgressivamente alla formazione scistoso-cristallina besimauditica del Permiano di Cima Durand–M. Grosso.

Di qui detta sinclinale si può ancora seguire, per quanto sempre irregolare, verso ovest (sempre piuttosto trasgressiva sul lato meridionale) nella ventagliforme alta Valle del Pesio, colla Cima Cars–Rocca Bruseis–Punta Labiaia Miranda, ecc.; quivi collegandosi coll'altra grandiosa sinclinale mesozoica subparallela, di Cima della Fascia–Monte delle Carsene–Punta Marguareis–Cima delle Saline–Mongioie.

Poscia detta zona di M. Antoroto–Mondolé–Labiaia si incurva verso la conca di Limone, dove la sinclinale scende nella Valle Vermenagna colla sua sola serie triasica, sviluppandosi poi verso NO, raggiungendo la bassa Valle del Gesso sopra Roccavione; dove si complica sempre più con varii corrugamenti e faglie, come segnai nella Cartina geologica allegata alla Nota *I Monti di Cuneo* (« Atti Acc. Sc. Torino », vol. XLII, 1906). La si potrebbe ancora seguire attraverso le Alpi Marittime in Val Stura (Demonte–Vinadio–Bersezio, ecc.), dove trovasi la *Massima elevazione dell'Eocene nelle Alpi Occidentali* (« Boll. C. A. I. », n. 52, 1885), e come è meglio precisato nella Carta e sezione geologica annesse al mio lavoro *Il Gruppo dell'Argentera* (« Mem. Acc. Sc. Torino », LXI, 1910), finchè la formazione in esame discende in Francia (attraverso il Colle della Maddalena), proseguendovi più o meno complicata verso il nord all'incirca.

Ritornando ora al gruppo del M. Antoroto vediamo che esso si appoggia, apparentemente, a sud al grande gruppo del Pizzo d'Ormea (2476 m.), ai cui strati besimauditici e porfirici però soggiace tettonicamente, mentre

(*) Presentata nella seduta del 10 gennaio 1948.

che a nord appoggiasi ai minori gruppi, pure besimauditici, di M. Berlino Cima Robert; nei primi vediamo apparire in basso (sulla destra di Va Chiapino) gli scisti carboniferi che precisano l'età e l'andamento dell sovrastanti Besimauditi; invece nei secondi vediamo ancora verificars minori pieghe sinclinali mesozoiche, quelle cioè del M. Grosso e del M. Mus siglione.

Queste ultime sinclinali nel loro sviluppo (per quanto interrotto) ricom paiono verso NO nelle ripieghettature che inglobano le famose grotte d Bossea e di Caudano, come già figurai nella Nota sopra *La caverna de Caudano* (« Riv. Unione Escurs. », Torino, VII, 1914).

Tutta questa regione è ammantata qua e là di detriti di falda e d morena perchè queste alte valli già accolsero nell'epoca glaciale notevol ghiacciai che si spinsero anche assai in basso, come delineai nello studio sopr *Il Glacialismo nelle Alpi Marittime italiane*. (« Uff. idrogr. del Po », Roma 1932) con Carta glaciologica al 100.000.

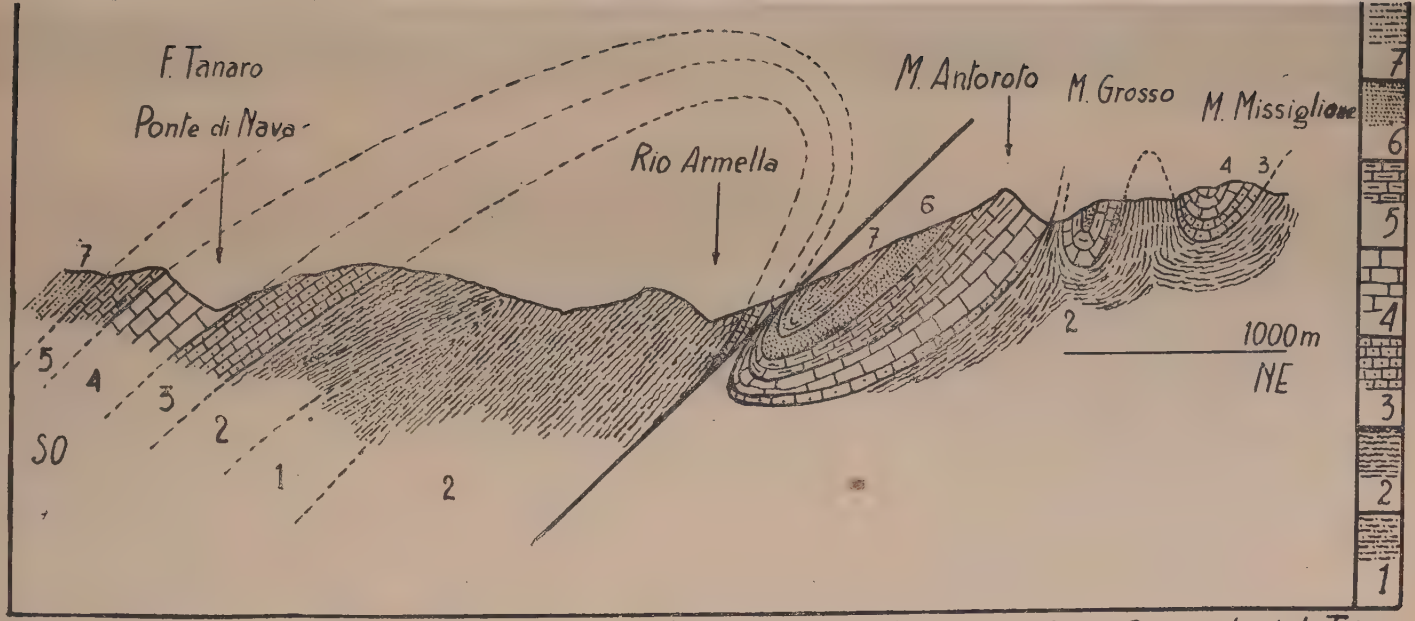
Di questa interessante regione ebbe già ad occuparsi l'ing. S. Franchi oltre che pel rilevamento del foglio « Boves » per l'Ufficio geologico, nell sua Nota sopra *Il Carreggiamento di Permiano sul Cretaceo nel contraffort orientale del M. Antoroto.* (« Atti Acc. Sc. Torino », vol. 33, 1924), nonch l'ing. D. Zaccagna, pure rilevatore di detto foglio, nelle sue *Osserva zioni geologiche sull'alta Valle del Tanaro.* (« Mem. Accad. Lunig. », XIV 1933) con una sezione in contrasto col vero andamento tettonico dell regione.

Una sezione geologica di questa regione presentai pure (Sez. 2ª) ne lavoro sopra *Les Alpes Occidentales*, Torino, 1913.

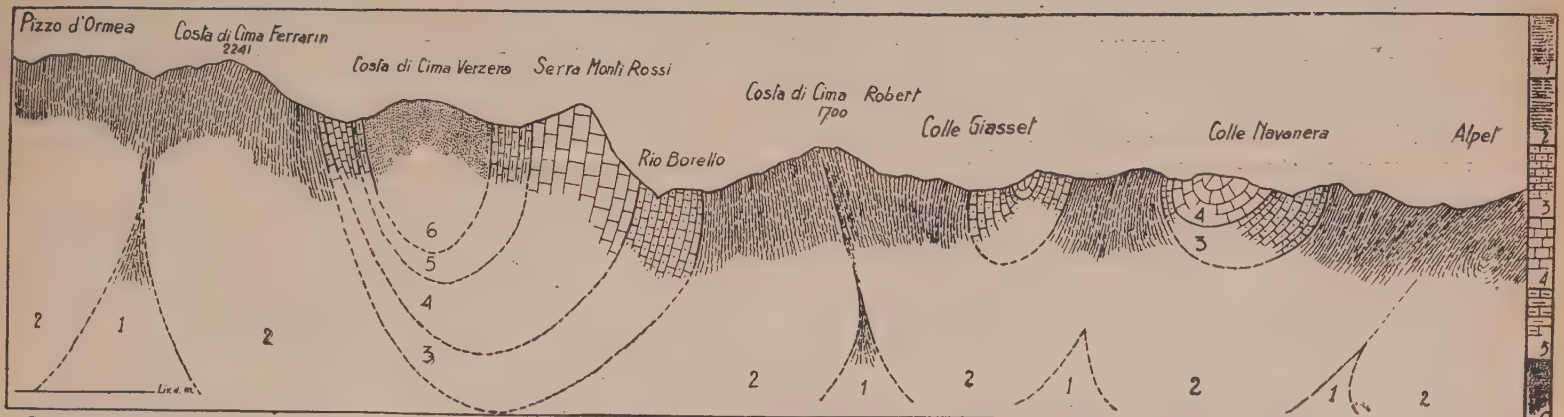
Infine recentemente il prof. S. Conti pubblicò nelle « Mem. Acc. Naz Lincei », s. VIII, vol. I, 1947, un suo studio *Sulla Tettonica del M. Antoroto* con presentazione del prof. G. Rovereto, il quale nella sua relazione accenn che l'autore *rifugge dal tradizionale semplicismo di chi lo ha preceduto, e d della tettonica del M. Antoroto una nuova spiegazione, asserendo che tale mont non è un anticlinale, nè una finestra, nè un Klippenfenster, ma una scagli intrusasi nella serie mesozoica.*

Perciò nella estate dello scorso anno 1947 ritornai ad esaminare l regione montuosa dell'Antoroto, e dovetti riconfermarmi nell'idea che trattas di un caso speciale di una sinclinale rovesciata in modo da appoggiarsi nord sulla formazione permiana di M. Berlino-M. Bausetti-Cima Robert mentre che a sud essa (troncata da una enorme faglia e dimezzata, dissim metrica, per grande abrasione di strisciamento, ecc. salvo il piccolo residu triasico di Cascine, ecc.) va a soggiacere all'anticlinale paleozoica coricat del gruppo di Pizzo d'Ormea (vedi sezione annessa).

Senza discendere a minute ulteriori descrizioni credetti miglior cos ricalcare la sezione (1ª) assai ben fatta, del Conti, ma secondo la mi interpretazione; indicandone, a prova, ad est la conca sinclinale della Rocc d'Orse affacciantesi sulla sinistra di Val Tanaro, e ad ovest la sinclinale d Cima Verzera (in Val Borello-Corsaglia) che si ripete verso nord colle minor



1: Scisti sericitici del Carbonifero. 2: Scisti besimauditici (Permiano). 3: Quarziti del Trias inferiore. 4: Calcari dolomitici del Trias medio e superiore. 5: Calcari grigi del Lias Giura. 6: Scisti marnosi del Cretaceo. 7: Calcari e scisti argillosi dell'Eocene.



Continuazione occidentale della sinclinale di Antoroto. 1: Scisti sericitici del Carbonifero. 2: Scisti besimauditici (Permiano). 3: Quarziti del Trias inferiore. 4: Calcari dolomitici del Trias medio e superiore. 5: Calcari grigi del Lias-Giura. 6: Scisti marnosi del Cretaceo.

sinclinali triasiche di Colle Giasset e Colle Novanera, come ho delineato nella 2ª sezione annessa a questa Nota.

La mia interpretazione tettonica, quantunque segua il tradizionale semplicismo, sembra assai logica e naturale, corrispondendo al caso comune di una piega-faglia, solo molto accentuata per la forte strettoia, ed il rovesciamento della grande formazione paleozoica, come mostra il suo rapido e forte restringimento sulla sinistra di Val Tanaro nella regione di Ormea, colle intense e note ripercussioni tettoniche nel gruppo dell'Armetta, sulla destra di detta Valle.

Paleontologia. — « *Salenia Hawkinsi* », *nuovo echinide del Cenomaniano della Somalia* (*). Nota (**) del Corrisp. G. Checchia-Rispoli.

In tutto il Cretaceo della Somalia era finora stata segnalata una sola specie di *Salenia*, *S. somaliensis*, descritta alcuni anni or sono dall'Hawkins, per la Somalia britannica (1). La grande rarità nei depositi di questi piccoli e graziosi echinidi, si constata anche nel ricco materiale paleontologico raccolto dalla Missione dell'AGIP, dove sono presenti cinque soli esemplari, dei quali quelli qui figurati si trovano in condizione di conservazione veramente soddisfacente. Questi esemplari, di varie dimensioni, appartengono ad una medesima specie, che distinguo col nome di *Salenia Hawkinsi* mihi. Essi sono stati raccolti nella formazione cenomaniana tanto sviluppata nei dintorni di Belet Uen e sono accompagnati da *Heterodiadema libycum*, fossile frequente a raccogliersi nel Cenomaniano della Somalia. Per questo ho creduto non senza interesse far conoscere la nuova forma, quando si pensi che l'Hawkins stabilì la sua su due esemplari, di cui uno erratico, molto mal conservati. Ma di questi mi occuperò in seguito e passo senz'altro a dare la descrizione di *Salenia Hawkinsi*.

Il guscio di questa *Salenia* può raggiungere dimensioni relativamente grandi: quello figurato a tav. I, figg. 2, 2 *a*, 2 *b*, ha un diametro di mm. 22 ed una altezza di mm. 10: esso ha un contorno regolarmente circolare, depresso sopra e sotto e a bordo arrotondato.

L'apparecchio apicale, non sporgente sulla superficie del guscio, è molto esteso, raggiungendo circa la metà del diametro di questo, circolare, e a contorno molto ondulato (fig. 1).

Placche genitali sviluppate, alte, a contorno poligonale, fortemente incavato; la metà esterna è più stretta della interna, a forma di lobo ottuso

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Paleontologia dell'Università di Roma.

(**) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1947.

(1) Hawkins, *Cretaceous Echinoidea*, in « Mesozoic Paleontology of British Somaliland », 1935.

all'estremità e penetrante profondamente nell'area interambulacrale corrispondente. La metà interna più larga presenta quattro lobi sporgenti, subeguali, determinati dalle impressioni suturali. Un po' più sviluppata è la madreporite; mentre le genitali 1 e 5 per causa della posizione del periprotto, che è spostato verso la parte destra del sistema, sono molto meno sviluppate e di forma alquanto irregolare, perchè, insieme con la placca suranale hanno contribuito alla formazione dell'anello del periprotto. La madreporite porta nel mezzo il corpo madreporiforme situato in una larga escavazione di forma variabile, per lo più subtriangolare, talora ovale. Questo corpo madreporiforme è sporgente ed è separato dal bordo dell'escavazione da una depressione; il corpo madreporico d'apparenza spugnosa, è ricoperto di numerosi forellini. Alla base del corpo, verso la parte esterna della placca, si apre il foro genitale, meno aperto di quelli, che si osservano sulle altre placche. Questi si trovano situati nel centro delle placche e sono di forma presso a poco ovale, e alquanto irregolare nelle placche. In un altro esemplare della stessa specie, la depressione che contiene il corpo madreporico è ovale ed oltre al foro genitale esterno se ne osservano altri due più piccoli, circolari, di diversa grandezza, situati verso la parte interna (fig. 2).

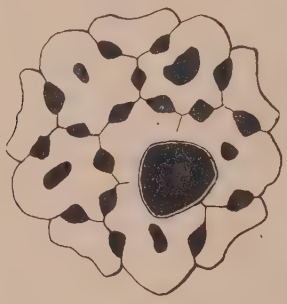


Fig. 1.

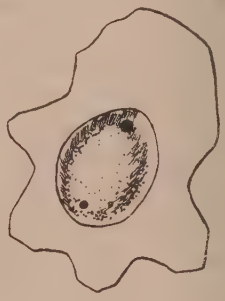


Fig. 2.

Le ocellari sono bene sviluppate, di forma triangolare, a lati fortemente scavati, specialmente il lato esterno, ciò che contribuisce a dare al contorno un aspetto ondulato. La placca suranale è di forma subtrapezoidale, anche essa a lati incavati. Il periprotto è largo, un po' subtriangolare, circondato da un anello sporgente, situato quasi completamente a destra dell'asse III–5. La superficie delle placche, anche a forte ingrandimento, appare liscia. Fossette suturali larghe, di forma rombica, quelle tra le placche genitali e la suranale, subtriangolare, quelle tra ocellari e genitali. In tutto si contano complessivamente 17 fossette suturali. Mancano le angolari [2].

Aree ambulacrali diritte, presso a poco di eguale larghezza dall'apice al peristoma, salvo verso l'ambito ove sono un po' più larghe e raggiungono la quarta parte della larghezza delle aree interambulacrali. Zone porifere

(2) In uno solo degli esemplari si nota un accenno di fossetta all'angolo tra le genitali 1 e 5 e l'ocellare I.

strettissime, un po' depresse con coppie di pori avvicinate. I pori di ogni coppia sono disposti un po' obliquamente e separati da un granuletto.

Le placche sono bisociate. Spazio interporifero largo circa tre volte una zona porifera, ornato di due serie regolari di tubercoletti disposti uno su ogni due placche semplici, alternanti con granuli più piccoli. I tubercoli di una serie si alternano con quelli dell'altra: in ogni serie se ne contano 21–22. Verso l'ambito e sulla faccia inferiore i tubercoli s'ingrandiscono un poco, per cui le due serie si avvicinano, anche perchè le aree si restringono verso il peristoma.

Aree interambulacrali larghe circa 4 volte un ambulacro, con due serie di grossi tubercoli, in numero di 6–7 per serie. Quelli periapicali sono molto piccoli e poco sporgenti; i successivi s'ingrandiscono rapidamente verso l'ambito per diminuire gradatamente verso il peristoma. Detti tubercoli sono sporgenti, a base larghissima e a mammellone piccolo con poche e forti crenelature alla base. Essi sono scrobicolati e i granuli scrobicolari formano dei cerchi completi, che verso l'ambito sono tangenti fra di loro. Lo spazio mediano dell'area è molto largo, specialmente sulla faccia superiore, e poi gradatamente restringentesi verso il peristoma. Esso è fittamente occupato da serie regolari, trasversali di granuli, ben allineati, gradatamente rimpicciolentisi verso la sutura mediana dell'area.

Peristoma superficiale, circolare, largo circa la terza parte del diametro del guscio; munito di stretti e profondi intagli branchiali; labbra ambulacrali larghe circa quanto le interambulacrali.

Questa nuova *Salenia* si distingue, oltre che per le sue grandi dimensioni, per il guscio depresso, per le aree interambulacrali ornate di grossi tubercoli circondati da cerchi scrobicolari completi e per la larga zona, mediana fittamente ricoperta di serie regolari trasversali di granuli allineati, e, soprattutto, per la scultura dell'apparecchio apicale. Come è noto nelle Salenie l'apparecchio apicale presenta grandi variazioni nella decorazione. Fra di queste la più comune è la presenza di fossette o di impressioni, variabili per dimensioni, forma, e numero, che si osservano lungo la sutura delle placche e negli angoli delle placche, onde la distinzione di fossette suturali e fossette angolari. Alle volte le fossette possono completamente mancare, come nella *Salenia minima* Desor del Senoniano; oppure sono poco visibili, che sembrano mancare, come in *Salenia clavata* Peron e Gauthier del Cenomaniano algerino. Ma generalmente sono ben visibili e possono nella stessa specie coesistere fossette suturali e fossette angolari. In tutti gli esemplari della *Salenia Hawkinsi* esistono solamente fossette suturali; complessivamente 17, di forma rombica, molto sviluppate, da determinare dei lobi sporgenti intorno alle placche. In nessuna altra *Salenia* si osserva una simile scultura. Alcuni anni or sono, come ho detto avanti, l'Hawkins descrisse per la Somalia britannica, una *Salenia somaliensis*, attribuita al Senoniano superiore con qualche dubbio ed istituita su due esemplari, di cui uno erratico; però la conservazione di questi lascia molto a desiderare, essendo scomparse del tutto le ornamentazioni del guscio per deterioramento; solamente

è conservato in parte l'apparecchio apicale, la cui scultura ricorda quella di *S. Hawkinsi*. Non è a mia conoscenza se il solo carattere dell'apparecchio apicale possa essere sufficiente a distinguere questi echinidi; ma si sa per altro che le decorazioni del guscio sono della massima importanza per diagnosticare le *Salenie*. Ora siccome l'ornamentazione non si conosce affatto in *Salenia somaliensis*, così riesce impossibile poter stabilire un completo confronto fra le due forme. Ma v'è di più: *S. somaliensis* sarebbe, secondo l'autore, del Senoniano superiore; gli esemplari da noi descritti appartengono sicuramente al Cenomaniano, essendo accompagnati da *Heterodiadema libycum*; inoltre, si deve tener presente un'altra circostanza di notevole importanza per il riferimento cronologico dei miei esemplari; io ho voluto eseguire alcune sezioni sottili del calcare aderente ancora ai fossili ed in esso ho constatato la presenza di *Orbitulina*. Questi foraminiferi non si conoscono nel Senoniano e la loro presenza nel Turoniano è molto controversa. Per queste ragioni io penso di tener separati gli esemplari cenomaniani da quelli senoniani.

Località. – Uebi Scebeli – N. 5643, Bur antistante alla ripa di Lamma-Bar, a c. 6 km. dal ponte di Lamma Bar (4-III-1938).

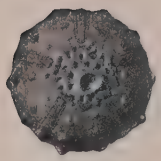
SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. – *Salenia Hawkinsi* n. sp. esemplare visto dalla faccia abactinale; 1 *a*, lo stesso dalla faccia actinale; 1 *b*, lo stesso di profilo.

Fig. 2. – » » Esemplare più grande visto dalla faccia abactinale; 2 *a*, lo stesso dalla faccia actinale; 2 *b*, lo stesso di profilo.

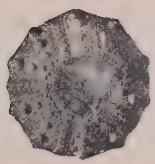
Fig. 3. – » » Faccia abactinale di un terzo esemplare.

Fig. 4. – » » Esemplare più piccolo visto dalla faccia actinale; 4 *a*, lo stesso di profilo.

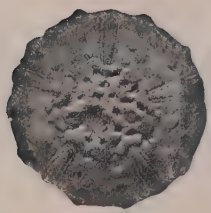


1a

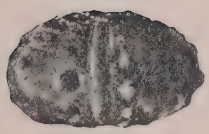
1b



1

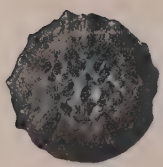


2a



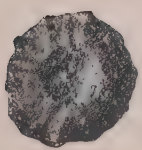
2b

2



4

4a



3

Biologia. — *La costituzione Zoologica degli Anfibi studiata con esperienze di parabiosi tra Anuri ed Urodeli*(*). Nota II di G. Cotronei e L. Urbani-Mistruzzi, presentata(**) dal Socio G. Cotronei.

In una Nota precedente (1) abbiamo comunicato i primi risultati delle nostre esperienze di parabiosi tra Anfibi Anuri ed Urodeli e nella stessa abbiamo accennato, in parte, ai problemi che ci hanno indotto ad eseguire questo genere di operazioni: fondamentalmente le ricerche rientrano nel quadro delle indagini che mirano a conoscere i problemi della costituzione biologica e zoologica degli Anfibi e che da quasi venti anni ha occupato l'attività dell'Istituto di Anatomia Comparata di Roma. Tra i molti fatti messi in risalto in questi lavori (Cotronei e allievi) uno particolarmente richiama oggi la nostra attenzione: abbozzi di organi di Anfibi Urodeli trapiantati su embrioni di *Hyla arborea* hanno una resistenza molto maggiore, ed un comportamento ben differente, che se vengono trapiantati su altri Anuri.

Questo risultato poteva sembrare contraddire tutto quanto riguarda (con conferme di molti altri autori) il differente comportamento che di solito si ottiene nei trapianti di abbozzi di organi di Urodeli su Anuri in confronto di quello di Anuri su Urodeli: è considerato infatti come fondamentale che sono assai più favorevoli i trapianti di Anuri su Urodeli.

Il complesso delle esperienze analitiche di Cotronei e allievi mostra delle incongruenze tra le esperienze biologiche e i dati della sistematica, almeno quelli raccolti in base ai vecchi criteri della sistematica. Intitolando le ricerche « Costituzione Zoologica e trapianti » si è voluto mettere in risalto il contributo che i metodi biologici sperimentali (compatibilità, incompatibilità nei trapianti, espianti, ibridazioni ecc.) possono recare allo studio dei rapporti intimi costituzionali (comprendendo in questi termini anche le condizioni biochimiche particolari) che intercorrono tra organismi più o meno vicini sistematicamente.

Con i metodi adoperati, in questo genere di ricerche si possono indagare i processi di difesa che ogni organismo mette in opera quando la sua purezza biochimica viene minacciata da altri organismi a costituzione biochimica diversa. Sotto questo aspetto le nostre ricerche si possono far entrare nel campo assai più vasto delle competizioni vitali e che recentemente ha avuto tanto sviluppo, per quanto riguarda gli organismi inferiori, con lo studio degli antibiotici.

Applicando il metodo della parabiosi abbiamo voluto esaminare la compatibilità e la incompatibilità tra organismi interi. È evidente che questa

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1948.

(1) G. Cotronei e L. Urbani-Mistruzzi, Nota I. « Rendiconti Acc. Naz. Lincei », Classe Sc. Fisiche, ser. VIII, vol. I, p. 869, 1946.

condizione è molto differente da quella dei trapianti: mentre in questo caso abbiamo un abbozzo di organo di un animale circondato dai tessuti di una diversa e completa unità organica, nel primo si trovano a svilupparsi e differenziarsi (se è così) insieme due individui in condizioni di parità, si hanno inoltre, nei due casi, differenti condizioni quantitative date da masse biochimiche differenti.

Eseguendo delle parabiosi abbiamo voluto vedere se alcune supposizioni teoriche potessero trovare una convalida sperimentale: a tale scopo accanto ad esperienze di unione tra embrioni di Rana ed embrioni di Tritone, già tentate prima di noi da Reverberi, ne abbiamo eseguite altre tra Hyla e Tritone, dove si poteva prevedere una relativa compatibilità. I primi risultati ottenuti ci hanno permesso di concludere, nella prima Nota, che la nostra previsione teorica era giusta: tre risultati positivi di parabiosi tra Hyla e Tritone ci hanno permesso di dimostrare la compatibilità embrionale e un differenziamento relativamente normale con riassorbimento vitellino tanto in Hyla che in Tritone mentre nella parabiosi Rana–Tritone non ottenemmo risultati che differissero notevolmente da quelli di Reverberi che già al terzo giorno notò l'inizio dei fenomeni di disfacimento.

Riassumendo: nella prima Nota abbiamo messo in risalto il primo risultato positivo di parabiosi tra Anfibi Anuri ed Anfibi Urodeli che abbiano dimostrato una compatibilità differenziativa. Risultati positivi tra Anuri di specie diverse (di notevole distanza sistematica furono ottenuti da Born *Rana–Bombinator*) e tra Urodeli di specie diverse sono noti in letteratura (Witschi e altri) ma si tratta di specie sistematicamente vicine. Forse le difficoltà che si incontrano nelle ricerche di parabiosi hanno distolto gli studiosi dal persistere su quella via sulla quale noi abbiamo voluto insistere, e già nella Nota precedente abbiamo accennato a queste difficoltà.

Nella serie di nuove operazioni eseguite nel 1947 abbiamo ottenuto una durata massima di vita della coppia Hyla–Tritone di ventuno giorni e per una di Tritone–Rana di giorni otto. Con questi risultati forse abbiamo ottenuto il massimo di convivenza con maggior differenziamento possibile: questo vale sopratutto nel caso Tritone–Rana. Per quanto riguarda la coppia Hyla–Tritone non escludiamo che si possano ottenere casi di maggiore durata, ma i risultati ottenuti ci fanno dubitare che la coppia possa raggiungere un differenziamento maggiore. I fenomeni di sofferenza che si mettono in evidenza, tra i quali la coppia che già si nutriva smette a un certo momento di mangiare ed altri tra i quali il rallentamento del battito cardiaco (in rapporto ai controlli normali) ci confortano in questa opinione.

Le esperienze del 1947 in sostanza hanno confermato quelle del 1946 permettendoci però di illustrare meglio il comportamento differenziale del Tritone in parabiosi con la Rana o con l'Hyla.

Nella tabella I che riguarda le parabiosi Tritone–Hyla sono riportati complessivamente i casi del 1946–1947 con le date della operazione e la fine delle esperienze e con poche osservazioni tanto per indicare approssimativamente le caratteristiche delle coppie: va riferito che abbiamo preso in esame soltanto

quei casi (nelle centinaia di operazioni compiute) nei quali fattori estranei a quelli esaminati non abbiano influito sull'andamento della esperienza.

TABELLA I.

Parabiosi Hyla arborea-Triton taeniatus.

N.	Data della operazione	Termine delle esperienze (morte o fissazione)	Giorni di parabiosi	OSSERVAZIONI
1	7-5-1946	18-5-1946	11	
2	7-5-1946	19-5-1946	12	Eliminazione degli escrementi attraverso il Tritone. Ingestione da parte della Hyla.
3	7-5-1946	23-5-1946	16	Eliminazione degli escrementi attraverso il Tritone. Al tempo della fissazione i due animali non mangiavano più.
4	25-4-1947	13-5-1947	18	Eliminazione degli escrementi attraverso il Tritone.
5	25-4-1947	16-5-1947	21	Fissata perchè sofferente. Nel Tritone è bene visibile l'arto anteriore.
6	25-4-1947	4-5-1947	9	L'Hyla presenta matassa intestinale completamente differenziata mentre il Tritone contiene ancora molto tuorlo.
7	9-5-1947	17-5-1947	8	Due coppie fissate perchè scoppiate dilacerandosi.
8	9-5-1947	18-5-1947	9	Fissata perchè presenta segni di sofferenza.
9	19-5-1947	29-5-1947	10	» » » » »
10	21-5-1947	31-5-1947	10	» » » » »

In tutte queste coppie è stata sempre riscontrata la fusione di vari tratti del tubo digerente e miscela di sangue dei due parabionti (con assoluta certezza nel tritone).

Come si vede dalla tabella in un caso (per la durata) ci siamo avvicinati ai risultati ottenuti da Born nelle parabiosi tra specie diverse dello stesso ordine; naturalmente va tenuta presente la temperatura di allevamento perchè è noto come lo stadio raggiunto non sia soltanto funzione del tempo ma sia grandemente influenzato dalla temperatura di sviluppo.

Abbiamo nelle parabiosi tra Hyla e Tritone costantemente osservato la fusione del tubo digerente dei due parabionti (fig. 1). La fotografia mostra l'intima unione dei tessuti istologicamente differenziati. In altre sezioni si nota una certa unione funzionale delle due muscolature.

Anche la miscela di elementi figurati del sangue è sempre molto evidente nel cuore, nei vasi e nel fegato del Tritone della coppia. Anche macroscopicamente in qualche caso abbiamo notato in un vaso ventrale che la corrente sanguigna andava dall'Hyla verso il Tritone. Un altro reperto che si nota

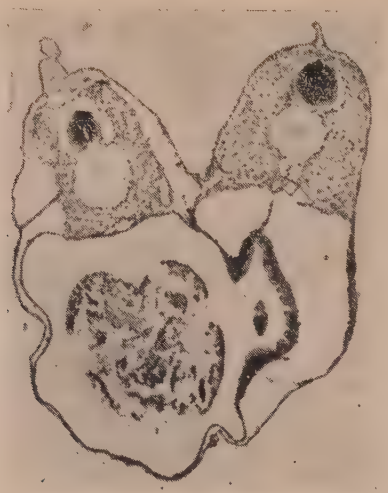


Fig. 1. – Parabiosi tra Hyla (a sinistra) e Tritone (a destra): si vede l'unione intima intestinale, le due zone sono distinguibili per la grandezza delle cellule dell'epitelio intestinale molto più grandi nel Tritone. Caso n. 3 della tabella I.

nelle coppie di maggior durata sono le alterazioni istologiche che si mettono in evidenza nel fegato del tritone. Lo studio analitico di questi fenomeni riguardanti il sangue è oggetto di ricerche speciali che E. Urbani sta eseguendo in questo Istituto con il metodo dei trapianti e degli espianti. Al passaggio di sangue (plasma con o meno presenza di elementi figurati) tra i due parabionti si può forse attribuire una eventuale azione sfavorevole reciproca, tra le altre, sulla ulteriore convivenza morfologica funzionale tra i due soggetti della coppia.

Se confrontiamo questi risultati con quelli ottenuti nelle parabiosi tra Rana e Tritone, riassunte nella tabella II risalta evidente il differente comportamento del tritone nei due tipi di parabiosi.

Inoltre abbiamo eseguito alcune parabiosi fra Rana e Hyla per vedere se ci fosse una eventuale incompatibilità tra queste due specie.

Le coppie tra Rana e Hyla riescono facilmente e si allevano bene almeno durante il periodo embrionale.

La mortalità è quasi eguale a quella che si riscontra in coppie fra individui della stessa specie quando hanno raggiunto il principio della vita larvale, nel quale, per ragioni meccaniche di rapporti intestinali in genere, si ha che una notevole percentuale di coppie muore.

Abbiamo allevato le coppie di Hyla–Rana fino ad un massimo di giorni 17 (fine maggio–primi giugno) e a parte differenze di mole somatica i due animali durante il periodo embrionale non presentavano differenze

notevoli rispetto ai controlli isolati. L'ulteriore comportamento delle coppie di questa combinazione sarà oggetto di un esame più approfondito; ma fin d'ora risulta che la coppia Hyla–Rana ha un comportamento ben differente dalla coppia Tritone–Rana.

Tabella II.

Parabiosi Rana esculenta–Triton taeniatus.

N.	Data della operazione	Termine delle esperienze (morte o fissazione)	Giorni di parabiosi	Osservazioni
1	17–5–1946	22–5–1946	5	Testa del Tritone semidistrutta; zona cardiaca fortemente idropica; miscela sangue; occhio con cristallino abbastanza ben differenziato.
2	29 5 1946	3–6–1946	5	La rana presenta branchie esterne; Tritone presenta notevoli processi distruttivi alla testa e in parte anche sul tronco.
3	29–5–1946	2–6–1946	4	idem
4	4–6–1946	8–6–1946	4	Zona di unione piccola, si sono separati; il Tritone è morto il 12–6.
5	5–6–1946	7–6–1946	2	Si sono separati, il Tritone è arretrato nello sviluppo rispetto ai controlli; è morto il 13–6 mentre la Rana il 14–6.
6	5–6–1946	9–6–1946	4	Manca tutta la parte cefalica del Tritone, sia la Rana che il Tritone sono arretrati nel differenziamento rispetto ai controlli.
7	5–5–1947	13–5–1947	8	Rana e Tritone arretrati nello sviluppo; i controlli sono a fine vitello (Rana); vasi del Tritone pieni di sangue di Rana.
8	5–5–1947	10–5–1947	5	Inizio disgregazione del Tritone; arretrati nello sviluppo.
9	9–5–1947	13–5–1947	4	Molti globuli rossi di Rana nel Tritone.
10	15–5–1947	19–5–1947	4	La zona di unione è molto piccola; si son separati e hanno vissuto presentando sviluppo quasi eguale ai controlli.

Come abbiamo già detto tra le moltissime coppie in parabiosi Rana–Tritone pochi sono i casi che superano i tre giorni di convivenza: sono quelli su cui abbiamo, naturalmente, portato di preferenza la nostra attenzione. Nella tabella sono riportati alcuni dati più importanti concernenti queste parabiosi tra *Rana esculenta e Triton taeniatus*; in essa si vede che il caso di durata massima di vita in comune è di giorni otto, caso che riteniamo assolutamente eccezionale in rapporto alle peculiari condizioni che conducono alla distruzione del Tritone. Da queste nostre esperienze risulta sopratutto

e ci riferiamo ora al Tritone, che si ha dapprima un rallentamento che culmina in un arresto di sviluppo, poi si iniziano i processi disgregativi.

Perciò crediamo opportuno distinguere una precoce azione embriostatica, azione inibitrice dello sviluppo e del differenziamento, da quella embriolitica.

Non è facile poter stabilire con precisione quando hanno inizio queste varie fasi data la diversità di comportamento dipendente essenzialmente dalla unione più o meno intima dei due parabionti. Anche la Rana unita in parabiosi presenta, più o meno evidentemente, rispetto ai controlli un grado di differenziamento e di sviluppo somatico minore, ma in essa non

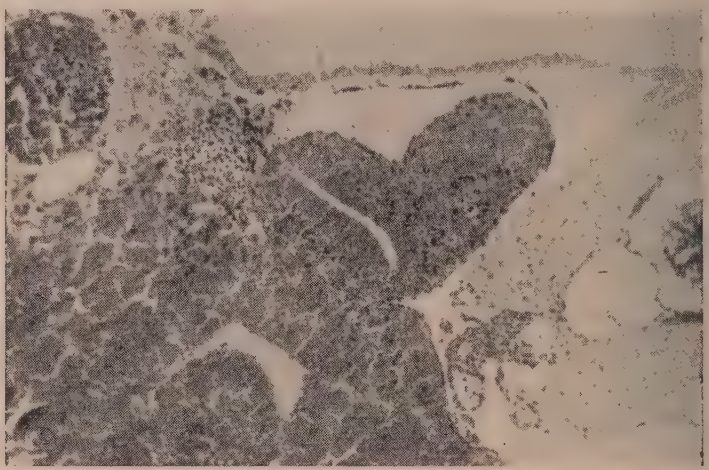


Fig. 2. – Parabiosi tra Rana (a destra) e Tritone (a sinistra): Caso 2 della tabella II.

abbiamo mai osservato fenomeni istolitici, ed in genere necrotici, durante quel periodo di tempo nel quale questi sono molto manifesti nel Tritone. Dai preparati istologici si nota come una grande quantità di sangue della Rana affluisca nel Tritone e come in esso si trovino zone tutte stipate di eritrociti prevalentemente della Rana (fig. 2).

Riassumendo per quanto riguarda la parabiosi tra Rana e Tritone i seguenti fatti sono meritevoli di rilievo.

Se la zona di unione è poco estesa e non molto intima gli animali di una coppia possono separarsi e continuare a vivere indipendentemente per un periodo più o meno lungo a seconda che la lacerazione abbia prodotto conseguenze di minore o maggiore gravità. Quando si determinano lacerazioni più gravi le probabilità di sopravvivenza vanno gradatamente scomparendo.

Quando l'unione è più intima, con una maggior durata di convivenza, il Tritone subisce i descritti processi di arresto e di disintegrazione e se avviene la separazione esso va rapidamente in disgregazione. La Rana in

questi casi muore dopo pochi giorni. Quando la zona di unione è vasta con ancora più intimi rapporti stabilitisi tra i due parabionti, il Tritone a partire già dal secondo o terzo giorno di vita comune comincia a presentare evidenti segni di arresti di sviluppo seguiti da processi disgregativi che nei nostri risultati, finora ottenuti, mostrano la loro sede iniziale nella zona cefalica.

Questi fatti ci delineano la importanza del fattore quantitativo di sostanze tossiche che si trasmettono da un organismo all'altro.

Fig. 3. – Fotografia della coppia Hyla Tritone: Caso 5 della tabella I.

Fig. 4. – Fotografia della coppia Rana Tritone: Caso 7 della tabella II.

Nelle coppie Rana–Tritone i risultati ci dicono che le sostanze della Rana hanno un'azione sul Tritone più energica di quella delle sostanze di questo ultimo sulla Rana.

In conclusione un embrione di *Triton taeniatus* presenta un comportamento notevolmente diverso a seconda che sia unito in parabiosi con un embrione di *Rana esculenta* o di *Hyla arborea*.

Basta confrontare tra loro le figure (fotografie) 3 e 4 che riportano la 3 una parabiosi Hyla–Tritone e la 4 il caso eccezionale della più lunga convivenza Rana–Tritone: si noti nella figura 3 il grado di sviluppo e di differenziamento dell'arto anteriore e delle branchie del Tritone unito all'Hyla in confronto (fig. 4) dell'arretrato differenziamento della regione cefalica del Tritone unito alla Rana.

In questo caso il Tritone presenta tosto segni di inibizione ed arresto di sviluppo e poi necrosi e lo stadio di sviluppo è molto lungi dall'aver raggiunto la fine del periodo embrionale.

Nel primo caso (Hyla–Tritone) invece gli individui della coppia trascorrono senza apparenti disturbi il periodo embrionale e solamente dopo parecchi giorni si notano a carico dei due parabionti segni di sofferenza che prima o poi portano alla morte della coppia.

Se confrontiamo questi risultati delle parabiosi con quelli ottenuti nei trapianti, vediamo come la parabiosi Rana–Tritone permetta a questo ultimo embrione un grado di differenziamento e di compatibilità maggiore di quello che si ottiene trapiantando organi dello stesso urodelo sullo stesso anuro. Mentre la parabiosi Hyla Tritone dà meno di quanto in base alle esperienze di trapianto di abbozzi di organi di Tritone su Hyla hanno ottenuto Cotronei e la sua scuola.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: compimento della dimostrazione.* Nota (*) di G. Scorza Dragoni, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

Questa Nota completa quelle, pubblicate in questi « Rendiconti » e ricordate in seguito con N. I), N. II) ed N. III), aventi come titolo: *A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate*, e come sottotitoli rispettivi: *considerazioni preliminari*; *proposizioni preliminari* e *dimostrazione nel caso di vertici di prima categoria*. Essa mantiene naturalmente tutte le convenzioni precedenti.

1. Richiami. – Rammentiamo che λ è un arco elementare di traslazione di t, $\Sigma(\lambda)$ è uno dei campi adiacenti a $\sigma(\lambda)$, n è il numero dei lati di λ ed m quello dei vertici di λ di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$.

In N. III) si è visto che il nucleo di λ contiene sempre punti fondamentali o metafondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$, se $m=0$. Ora si tratta, in sostanza, di dimostrare che, nel caso $m > 0$, o λ contiene punti fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$, oppure il nucleo di λ contiene punti, per λ e $\Sigma(\lambda)$, metafondamentali.

Atteso il risultato di N. III), possiamo procedere per induzione: ammettere vero il teorema se il numero dei vertici di seconda categoria è minore di un certo valore, e far vedere che esso è vero anche se quel numero è uguale a quel valore.

2. Dimostrazione. – Si supponga dunque che λ abbia almeno un vertice di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$; di guisa che $n \geq 2$, $m \geq 1$. Inoltre Q_i sia su λ (nel verso positivo) il primo vertice di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$; di guisa che $0 < i < n$, mentre Q_i appartiene sempre al nucleo di λ.

(*) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1947.

E q_i denoti la semiretta di origine Q_i, normale a $Q_i Q_{i+1}$ e rivolta, nel partire da Q_i, verso $\Sigma(\lambda)$; di guisa che $Q_{i-1} Q_i$ è sul prolungamento di q_i.

Ciò premesso,

1) Se $(q_i - Q_i) \cdot (t^{-1}(\lambda) \dotplus \lambda \dotplus t(\lambda)) = 0$, Q_i è fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, a norma della XI) di N. II); e il nucleo di λ contiene quindi punti fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Se $E_i = (q_i - Q_i) \cdot (t^{-1}(\lambda) \dotplus \lambda \dotplus t(\lambda)) \neq 0$, sia A il più vicino a Q_i dei punti di E_i; e si ponga $s = Q_i A$, di guisa che l'interno di s appartiene a $\Sigma(\lambda)$.

2) Se $s \cdot t(s)$ contiene punti simultaneamente interni ad s e $t(s)$, la X) della N. II) ci permette di concludere come in 1).

3) Se $s \cdot t(s)$ non è vuoto, ma contiene soltanto punti di estremo o per s o per $t(s)$, s è un segmento di traslazione [ved. M. I), nota (19); M. IV), n. 22]; e poichè Q_i è interno a λ mentre l'interno di s appartiene a $\Sigma(\lambda)$, è $s \cdot \lambda = Q_i$. Quindi, giusta le XVI) e XV) di N. II), Q_i è un punto metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, e contenuto nel nucleo di λ.

Se $s \cdot t(s) = 0$ e se $A \subset t^{-1}(\lambda)$, $t(A)$, a norma della I) di N. II), appartiene a $Q_i Q_{i+1} \dotplus \cdots \dotplus Q_{n-1} Q_n$ ed è diverso da Q_i, in virtù appunto della $s \cdot t(s) = 0$. L'arco ν, che si ottiene associando s al sottoarco di λ di estremi Q_i e $t(A)$, è un arco elementare di traslazione, contenuto in $\sigma(\lambda)$, a meno dei punti interni ad s, che appartengono a $\Sigma(\lambda)$. Se $\Sigma(\nu)$ è il campo adiacente a $\sigma(\nu)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$, i vertici di ν di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$ sono *al più m* — 1 (mentre i lati di ν sono *almeno* 2). Quindi i teoremi dei nn. 6 e 7 di N. I) sono veri per ν e $\Sigma(\nu)$. Ed ora bisogna distinguere due sottocasi.

4) Se ν ha *due* lati, Q_i è un vertice di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, s contiene nell'interno punti fondamentali per ν e $\Sigma(\nu)$; epperò a norma della XV) di N. II), Q_i, è un punto (del nucleo di λ) metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$. [Ma si può anche osservare che i punti fondamentali per ν e $\Sigma(\nu)$ interni a $t(A) Q_i$, sono fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$].

5) Se ν ha *più di due* lati, il nucleo di ν appartiene a quello di λ, e il lato estremo di ν diverso da s o è contenuto nel nucleo di λ, o è contenuto in un lato estremo di λ. Se il nucleo di ν contiene punti metafondamentali per ν e $\Sigma(\nu)$, una circostanza analoga si presenta per λ, $\Sigma(\lambda)$ e il nucleo di λ. Nel caso contrario, a norma dell'ipotesi a base del procedimento induttivo, almeno uno dei lati estremi di ν contiene un punto interno, R*, fondamentale per ν e $\Sigma(\nu)$. Se questo lato è s, Q_i è di nuovo metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, a norma della XV) di N. II). Se quel lato è diverso da s, R* è interno a λ, epperò è fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, a norma della XIII) di N. II). E anche in questo caso si ritrovano, per λ e $\Sigma(\lambda)$, i teoremi del n. 7 di N. I).

Le $s \cdot t(s) = 0$ e se A appartiene a $t(\lambda)$, $t^{-1}(A)$ è contenuto nel sottoarco di λ di estremi Q_0 e Q_i ed è diverso da Q_i. L'arco ν ottenuto associando s al sottoarco di λ di estremi $t^{-1}(A)$ e Q_i è un arco elementare di traslazione, contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$; e se $\Sigma(\nu)$ è il campo adiacente a $\sigma(\nu)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$, tutti gli eventuali vertici di ν sono di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$. Ed è venuto il momento di distinguere diversi sottocasi.

6) Se ν ha soltanto *un* lato, ν contiene almeno un punto, R*, fondamentale per ν e $\Sigma(\nu)$. Se R* appartiene a λ, esso è interno a λ e quindi [ved. XIII) di N. II)] è anche fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$; se R* non appartiene a λ, è interno ad s, ma allora Q_i è [ved. XV) di N. II)] metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$. Epperò si conclude come in 5).

7) Se ν ha *due* lati, è $i > 1$ e i punti di ν, fondamentali per ν e $\Sigma(\nu)$ e interni al lato $t^{-1}(A)\,Q_{i-1}$ di ν, sono interni anche a λ; e quindi fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$; ecc.

8) Se ν ha *più di due* lati, il nucleo di ν contiene (nell'interno) almeno un punto fondamentale o metafondamentale rispetto e ν e $\Sigma(\nu)$; e ciò a norma dei risultati dei nn. 2 e 3 di N. III). Ma nelle ipotesi attuali il nucleo di ν è contenuto in quello di λ; ecc.

Se $s \cdot t(s) = 0$ e se A è interno a λ (questa è l'ultima alternativa da considerare), si dica α l'arco di λ di estremi Q_i ed A e si ponga $\nu = (\lambda - \alpha) + s$. Allora ν è un arco elementare di traslazione contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$, e gli eventuali vertici di ν, di seconda categoria rispetto al campo $\Sigma(\nu)$ adiacente a $\sigma(\nu)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$, sono al più $m - 1$ [cfr. M. I), n. 39]. Quindi i teoremi dei nn. 6 e 7 di N. I) sono veri per ν e $\Sigma(\nu)$. E distinguiamo tre sottocasi.

9) Se ν ha un solo lato, e se R* è un punto fondamentale per ν e $\Sigma(\nu)$, o R* è interno a λ, e in tal caso [N. II), prop. XIII)] R* è fondamentale anche per λ e $\Sigma(\lambda)$; oppure R* è interno ad s, e in tal caso α – e quindi anche λ – contiene nell'interno un punto fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$ [N. II), prop. XIV) e dimostrazione relativa].

10) Un ragionamento del tutto simile sussiste, se ν ha due lati e se il suo vertice è di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$. Basta supporre che R* sia un punto, fondamentale per ν e $\Sigma(\nu)$, interno a quel lato di ν che contiene s [ma potrebbe considerarsi anche l'altro lato di ν, e ciò condurrebbe a un punto, fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, contenuto in $Q_i Q_{i+1} + \cdots + Q_{n-1} Q_n$].

11) Se ν ha più di due lati, o almeno un vertice di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, allora o il nucleo di ν contiene almeno un punto R*, fondamentale o metafondamentale per ν e $\Sigma(\nu)$, oppure ν possiede (almeno un vertice di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$ e) almeno un punto fondamentale, relativo a $\Sigma(\nu)$ e interno a uno dei due lati estremi di ν. Inoltre un punto del nucleo di ν o è interno ad s o appartiene al nucleo di λ; mentre un punto, interno a uno dei lati estremi di ν, o è interno a λ, o è interno ad s. In ogni caso, le proposizioni XIV) e XV) di N. II) ci permettono di concludere che, anche nelle ipotesi attuali, o λ contiene un punto fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, oppure il nucleo di λ ne contiene uno metafondamentale.

E la dimostrazione è ultimata, nel senso che si è visto che o il nucleo di λ contiene punti metafondamentali, o λ contiene punti fondamentali.

Se $i > 1$, un esame più approfondito della dimostrazione precedente prova che, tolto il caso 7) e il caso 11), o il nucleo di λ contiene punti metafondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$, oppure la spezzata $Q_1 Q_2 + \cdots + Q_{n-1} Q_n$ contiene punti fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$. Orbene per riconoscere che questo accade

anche nel sottocaso 7), basta considerare allora un punto fondamentale per ν e $\Sigma(\nu)$ interno ad AQ_{i-1}; se questo punto appartiene anche a $Q_i\,Q_{i-1}$, esso è fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$; se esso è interno ad AQ_i, Q_i, è metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$. Per riconoscere che quella circostanza si presenta anche nel caso 11), basta supporre che una circostanza analoga si presenti per ν e $\Sigma(\nu)$, e procedere (per induzione) come in 11). Si conclude che tutte le proposizioni di N. I) sono dimostrate.

Matematica. — *Sulla continuità degli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni* (*). Nota II (**) di LANDOLINO GIULIANO, presentata dal Corrisp. G. SANSONE.

4. Diamo una semplice dimostrazione diretta del seguente teorema di Mc Shane [12]:

TEOREMA. — *Se* $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ *e* $P(x,y,z)$ *sono tre funzioni definite e continue in tutti i punti di un campo* A *dello spazio* (x,y,z) *e* L *è un numero positivo, l'integrale*

$$I_C = \int_C \{M(x,y,z) + y' N(x,y,z) + z' P(x,y,z)\}\, dx$$

è funzione continua della curva assolutamente continua C *nella classe* $\{L\}$ *delle curve assolutamente continue appartenenti al campo* A *ognuna di lunghezza minore di* L.

Per un lemma di Lebesgue (cfr. nota (16)) possiamo ritenere che le funzioni $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$, $P(x,y,y)$ siano definite e continue in tutti i punti dello spazio (x,y,z).

a) Considerata una curva C_0 assolutamente continua della classe $\{L\}$

$$C_0 : \begin{cases} y = y_0(x) \\ z = z_0(x) \end{cases} \qquad a_0 \leq x \leq b_0$$

per dimostrare la continuità di I_C sulla C_0 rispetto alle curve della classe $\{L\}$, consideriamo dapprima soltanto le curve assolutamente continue della classe $\{L\}_0 \subset \{L\}$:

$$C : \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \qquad a_0 \leq x \leq b_0$$

tali cioè che le funzioni $y(x)$ e $z(x)$ siano definite nello stesso intervallo (a_0, b_0) in cui sono definite le $y_0(x)$ e $z_0(x)$.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(**) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1947.

(12) Loc. cit. in (3) p, 206.

Esaminiamo per tali curve la differenza:

$$(7)\qquad I_C - I_{C_0} = \int_{a_0}^{b_0} \{ M(x, y, z) - M(x, y_0, z_0) \}\, dx +$$

$$+ \int_{a_0}^{b_0} \{ y' N(x, y, z) - y_0' N(x, y_0, z_0) \}\, dx + \int_{a_0}^{b_0} \{ z' P(x, y, z) - z_0' P(x, y_0, z_0) \}\, dx =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 .$$

Per la continuità della funzione $M(x, y, z)$, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un numero $\rho_1 > 0$ tale che per ogni curva della classe $\{L\}_0$ appartenente propriamente all'intorno (ρ_1) della C_0, si abbia:

$$(8)\qquad |I_1| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Occupiamoci ora di I_2. Per la continuità della funzione $N(x, y, z)$, si può determinare un numero $\rho_2 > 0$ tale che per ogni punto (x, y, z) di A distante da (x, y_0, z_0) non più di ρ_2, si abbia:

$$|N(x, y, z) - N(x, y_0, z_0)| < \frac{\varepsilon}{8L} .$$

Si può scrivere:

$$I_2 = \int_{a_0}^{b_0} \{N(x, y, z) - N(x, y_0, z_0)\}\, y'\, dx + \int_{a_0}^{b_0} N(x, y_0, z_0)\, (y' - y_0')\, dx$$

e quindi:

$$(9)\qquad |I_2| < \frac{\varepsilon}{8L} \int_{a_0}^{b_0} |y'|\, dx + \left| \int_{a_0}^{b_0} N(x, y_0, z_0)\, (y' - y_0')\, dx \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{8} + \left| \int_{a_0}^{b_0} N(x, y_0, z_0)\, (y' - y_0')\, dx \right| .$$

Si fissi H in modo che in (a_0, b_0) sia sempre $|N[x, y_0(x), z_0(x)]| < H$. Com'è noto, si può costruire una successione $\{\pi_n(x)\}$ di polinomi tale che sia in ogni punto di (a_0, b_0):

$$|\pi_n(x)| \leq H \quad \text{e, uniformemente,} \quad \lim_{n \to \infty} \pi_n(x) = N[x, y_0(x), z_0(x)] .$$

Sia n sufficientemente grande perchè risulti in tutto (a_0, b_0):

$$|\pi_n(x) - N[x, y_0(x), z_0(x)]| < \frac{\varepsilon}{32L} .$$

Si ha:

$$\left| \int_{a_0}^{b_0} N[x, y_0(x), z_0(x)] [y'(x) - y_0'(x)] \, dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{a_0}^{b_0} \{N[x, y_0(x), z_0(x)] - \pi_n(x)\} [y'(x) - y_0'(x)] \, dx \right| + \left| \int_{a_0}^{b_0} \pi_n(x) [y'(x) - y_0'(x)] \, dx \right|.$$

Integrando per parti nel secondo integrale, detto Φ un numero tale che sia, in tutto (a_0, b_0): $|\pi_n(x)| < \Phi$ e supposto che la curva C appartenga propriamente ad un intorno (ρ_3) $(\rho_3 < \rho_2)$ di C_0, si ottiene:

$$(10) \qquad \left| \int_{a_0}^{b_0} N(x, y_0, z_0) (y' - y_0') \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{32 L} \int_{a_0}^{b_0} \{|y'| + |y_0'|\} \, dx +$$

$$+ |[\pi_n(x) (y - y_0)]_{a_0}^{b_0}| + \left| \int_{a_0}^{b_0} \pi_n'(x) (y - y_0) \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{16} + 2 H \rho_3 + \Phi \rho_3 (b_0 - a_0) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{16} + \rho_3 [2 H + \Phi (b_0 - a_0)]$$

e se si assume

$$\rho_3 < \frac{\varepsilon}{16 [2 H + \Phi (b_0 - a_0)]}$$

tenendo conto delle (9) e (10) si ha:

$$(11) \qquad |I_2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Analogamente, si può determinare un numero $\rho_4 > 0$ tale che sia per ogni curva della classe $\{L\}_0$ appartenente propriamente all'intorno (ρ_4) della C_0:

$$(12) \qquad |I_3| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Se ρ è il più piccolo dei tre numeri ρ_1, ρ_3, e ρ_4 si ha, per le (7), (8), (11) e (12) che in corrispondenza al numero $\varepsilon > 0$ risulta determinato un numero $\rho > 0$ tale che per ogni curva della classe $\{L\}_0$ appartenente propriamente all'intorno (ρ) della C_0 si abbia:

$$|I_C - I_{C_0}| < \varepsilon.$$

b) Con considerazioni analoghe a quelle esposte nel n. 3, *b*), si passa al caso generale.

5. Occupiamoci ora della questione posta nel n. 2.

Sia A un campo dello spazio (x, y, z) e $\mathfrak{I}$ un insieme di curve assolutamente continue appartenenti ad A con la proprietà che esista in $\mathfrak{I}$ almeno una curva C_0 tale che, fissati ad arbitrio i numeri $\rho > 0$ e $L > 0$, esistano

curve C di $\mathfrak{I}$ appartenenti propriamente all'intorno (ρ) di C_0 e aventi lunghezza maggiore di L [13].

a) Sia $\{C_n\}_1$ una successione di curve estratta dall'insieme $\mathfrak{I}$ e convergente a C_0 tale che, detta L_n la lunghezza di C_n, sia $\lim_{n+\infty} L_n = +\infty$. Dette $y = y_n(x)$, $z = z_n(x)$, $a_n \leq x \leq b_n$, le equazioni di C_n, ne segue che almeno una delle due successioni

$$\left\{\int_{a_n}^{b_n} |y_n'(x)|\,dx\right\}, \qquad \left\{\int_{a_n}^{b_n} |z_n'(x)|\,dx\right\}$$

ha per maxlim $+\infty$. Supponiamo che la prima di queste due successioni abbia tale proprietà.

Si dica $\{C_n\}_2$ una successione estratta da $\{C_n\}_1$ per cui è

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} |y_n'(x)|\,dx = +\infty.$$

I punti di ciascuna curva C_n dell'insieme $\mathfrak{I}$ che non appartengono a C_0 costituiscono al più un'infinità numerabile di archi che si possono ordinare in una successione [14]:

$$(S) \qquad C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, \cdots, C_n^{(i)}, \cdots$$

Tali archi sono aperti, salvo al più quelli aventi come estremi i punti che corrispondono a $x = a_n$ oppure $x = b_n$.

Sia $\{\lambda_n\}$ una successione divergente di numeri tutti maggiori dell'unità. Esisteranno due minimi interi positivi n_1 e ν'_{n_1} per cui la successione (S) relativa alla curva C_{n_1} della successione $\{C_n\}_2$ sia costituita di almeno ν'_{n_1} archi $C_{n_1}^{(1)}, C_{n_1}^{(2)}, \cdots, C_{n_1}^{(\nu'_{n_1})}$ tali che, detto $\delta'_{n_1,r}$ $(r = 1, \cdots, \nu'_{n_1})$ l'intervallo di definizione di $C_{n_1}^{(r)}$ $(r = 1, \cdots, \nu'_{n_1})$ si abbia:

$$\sum_{r=1}^{\nu'_{n_1}} \int_{\delta'_{n_1,r}} |y'_{n_1}(x)|\,dx > \lambda_1.$$

Sia ρ_1 un numero positivo tale che i punti degli archi $C_{n_1}^{(r)}$ $(r = 1, \cdots, \nu'_{n_1})$ che non appartengono all'intorno (ρ_1) della C_0 costituiscano un numero finito

(13) In caso contrario, ogni integrale $I_C \equiv \int_C \{M(x,y,z) + y'N(x,y,z) + z'P(x,y,z)\}\,dx$ con $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ e $P(x,y,z)$ funzioni continue in A, è continuo, come funzione di C, nell'insieme $\mathfrak{I}$.

(14) Vedi, per esempio, TONELLI, loc. cit in (1) p. 36.

di archi $\overline{C}^{(1)}_{n_1}, \overline{C}^{(2)}_{n_1}, \cdots, \overline{C}^{(\nu_{n_1})}_{n_1}$ per cui, detto $\delta_{n_1,r}\ (r = 1, \cdots, \nu_{n_1})$ l'intervallo di definizione di $\overline{C}^{(r)}_{n_1}\ (r = 1, \cdots, \nu_{n_1})$, si abbia:

$$\sum_{r=1}^{\nu_{n_1}} \int_{\delta_{n_1,r}} |\, y'_{n_1}(x)\,|\, dx > \lambda_1 .$$

Sia ora n_2 il minimo intero positivo per cui la curva C_{n_2} della successione $\{C_n\}_2$ appartenga propriamente all'intorno (ρ_1) della C_0 e tale che esista un numero positivo $\rho_2 < \rho_1$ e ν_{n_2} archi $\overline{C}^{(1)}_{n_2}, \overline{C}^{(2)}_{n_2}, \cdots, \overline{C}^{(\nu_{n_2})}_{n_2}$ di C_{n_2} tutti costituiti di punti non appartenenti all'intorno (ρ_2) di C_0 nè alla curva C_1 per cui, detto $\overline{\delta}_{n_2,r}\ (r = 1, \cdots, \nu_{n_2})$ l'intervallo di definizione di $\overline{C}^{(r)}_{n_2}\ (r = 1, \cdots, \nu_{n_2})$ si abbia:

$$\sum_{r=1}^{\nu_{n_2}} \int_{\delta_{n_2,r}} |\, y'_{n_2}(x)\,|\, dx > \lambda_2$$

e così via.

In tal modo si determina una successione decrescente e tendente a zero di numeri positivi $\{\rho_n\}$ e una successione [15] di curve $\{C_n\}$, con C_n appartenente propriamente all'intorno (ρ_{n-1}) di C_0, con la seguente proprietà: esistono μ_n archi aperti $C_{n,r}\ (r = 1, \cdots, \mu_n)$ di C_n che non appartengono all'intorno (ρ_n) di C_0 e che non hanno punti a comune con le curve $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ (e di conseguenza nemmeno con $C_0, C_{n+1}, C_{n+2}, \cdots$) e tali che detto $\delta_{n,r}$ l'intervallo di definizione di $C_{n,r}$ e posto

$$\sigma_{n,r} = \int_{\delta_{n,r}} |\, y'_n(x)\,|\, dx$$

si abbia $\sum_{r=1}^{\mu_n} \sigma_{n,r} > \lambda_n$.

Segue dalla loro costruzione, che due qualunque archi C_{nr} $(n = 1, \cdots ; r = 1, \cdots, \mu_n)$ non hanno mai un punto a comune.

b) Definiamo nel campo A una funzione $N(x, y, z)$ che risulti ivi continua come segue.

Sia E l'insieme costituito dai punti della curva C_0 e delle curve della successione $\{C_n\}$. L'insieme E è *chiuso*. Cominciamo col definire la funzione $N(x, y, z)$ nei punti di E. Poniamo $N(x, y, z) = 0$ nell'insieme $E - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\mu_n} C_{nr}$. Definiamo ora, per ogni n, la funzione $N(x, y, z)$ nei punti di ciascun arco $C_{n,r}\ (r = 1, \cdots, \mu_n)$. Consideriamo un insieme *chiuso* $e'_{n,r}$ di $\delta_{n,r}$ su cui la $y'_n(x)$ sia continua e tale che

$$\int_{e'_{n,r}} y'_n(x)\ dx > \sigma_{n,r} - \frac{1}{2^{r+2}} .$$

(15) Le proprietà di cui devono godere le successioni $\{C_n\}_2$ e $\{C_n\}$ indicano che si può dare una legge per la loro costruzione.

Posto $\varepsilon_{n,r} = \frac{1}{(b_n - a_n)\,2^{r+2}}$, sia $e_{n,r}$ il sottoinsieme di $e'_{n,r}$ in cui è $|y'_n(x)| \geqq \varepsilon_{n,r}$. $e_{n,r}$ è un insieme *chiuso*; in esso la $y'_n(x)$ è continua ed è:

$$\int_{e_{n,r}} |y'_n(x)|\,dx > \sigma_{n,r} - \frac{1}{2^{r+1}}.$$

Nei punti $[x, y = y_n(x), z = z_n(x)]$ con $x \in e_{n,r}$ si ponga:

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \quad \text{se è} \quad y'_n(x) \geqq \varepsilon_{n,r}$$

$$N(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \quad \text{se è} \quad y'_n(x) \leqq -\varepsilon_{n,r}.$$

Nei punti di $C_{n,r}$ che corrispondono ai valori del plurintervallo aperto $\delta_{n,r} - e_{n,r}$ si definisca la $N(x, y, z)$ in modo che, in ogni arco di C_n che corrisponde a un intervallo di tale plurintervallo essa varii linearmente fra i valori che assume nei punti che corrispondono agli estremi di tale intervallo. La $N(x, y, z)$ è così definita in tutti i punti di $C_{n,r}$ e pertanto in tutti i punti di C_n e perciò in E.

Dimostriamo ora che la $N(x, y, z)$ è *continua* in E. Essa è continua nell'insieme dei punti di C_n quando si prescinda dai valori che essa assume nei punti di E che non appartengono a C_n. Basta infatti osservare che nei punti di C_n che non appartengono a un arco (aperto) $C_{n,r}$ $(r = 1, \cdots, \mu_n)$ si è posto $N = 0$, che la $N(x, y, z)$ è continua nell'insieme dei punti di $C_{n,r}$ che corrispondono agli x di $e_{n,r}$ e che in ogni punto di $C_{n,r}$ corrispondente a un valore x di un intervallo del plurintervallo aperto $\delta_{n,r} - e_{n,r}$ la $N(x, y, z)$ varia linearmente fra i valori che essa assume nei punti che corrispondono agli estremi di tale intervallo. Proviamo ora che la $N(x, y, z)$ è continua in tutti i punti di E. Essendo la successione $\{C_n\}$ convergente alla C_0, per ogni punto di E non appartenente a C_0 di può determinare un intorno tale che i punti di E di tale intorno appartengano a un numero finito al più di curve di $\{C_n\}$. Poichè nei punti di C_n, quando si prescinda dai valori che la $N(x, y, z)$ assume nei punti di E che non fanno parte di C_n, la $N(x, y, z)$ è continua, basta limitarsi, per dimostrare la continuità di $N(x, y, z)$ su E, ai punti di C_0, su cui la $N(x, y, z)$ vale zero. Sia dunque B_0 un punto di C_0. Sia $\bar{n}$ tale che se $n > \bar{n}$ risulti $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} < \varepsilon$, essendo ε un numero positivo prefissato. Si può determinare un intorno Δ_0 di B_0 tale che tutti i punti degli archi $C_{i,j}$ $(i = 1, \cdots, \bar{n}\,;\, j = , \cdots, \mu_i)$ non appartengano a Δ_0. Poichè nei punti di ogni curva C_n che non fanno parte degli archi $C_{n,r}$ $(r = 1, \cdots, \mu_n)$ si è posto $N = 0$ e in ogni punto di ciascun arco $C_{m,\nu}$ $(m = \bar{n} + 1, \cdots, \nu = 1, \cdots, \mu_m)$ la funzione $N(x, y, z)$ o vale $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ o vale $-\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ o assume un valore inter-

medio fra i numeri $0, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}, -\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ ne viene che in ogni punto di E che appartiene a Δ_0 è: $|N(x,y,z)| < \varepsilon$.

Ci rimane da definire la funzione $N(x,y,z)$ nei punti di A che non appartengono a E in modo che essa sia continua in A. Per questo basta applicare un noto lemma di Lebesgue (16).

c) Poniamo, in tutti i punti di A:

$$M(x,y,z) \equiv P(x,y,z) \equiv 0$$

e consideriamo l'integrale

$$I_{C_n} \equiv \int_{C_n} \{M(x,y,z) + y' N(x,y,z) + z' P(x,y,z)\} dx = \int_{C_n} y'_n(x) N(x, y_n, z_n) dx$$

dove C_n è una curva della successione $\{C_n\}$.

È, supposto $n > 0$:

$$\int_{C_n} y'_n(x) N[x, y_n(x), z_n(x)] dx = \sum_{r=1}^{\mu_n} \int_{\epsilon_{n,r}} y'_n(x) N(x, y_n, z_n) dx +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\mu_n} \int_{\delta_{n,r} - \epsilon_{n,r}} y'_n(x) N(x, y_n, z_n) dx .$$

È:

$$\sum_{r=1}^{\mu_n} \int_{\epsilon_{n,r}} y'_n(x) N(x, y_n, z_n) dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sum_{r=1}^{\mu_n} \int_{\epsilon_{n,r}} |y'_n(x)| dx > \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sum_{r=1}^{\mu_n} \left(\sigma_{n,r} - \frac{1}{2^{r+1}} \right)$$

$$\left| \sum_{r=1}^{\mu_n} \int_{\delta_{n,r} - \epsilon_{n,r}} y'_n(x) N(x, y_n, z_n) dx \right| \leq \sum_{r=1}^{\mu_n} \int_{\delta_{n,r} - \epsilon_{n,r}} |y'_n(x)| dx \leq \sum_{r=1}^{\mu_n} \frac{1}{2^{r+1}}$$

e perciò:

$$I_{C_n} > \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sum_{r=1}^{\mu_n} \sigma_{n,r} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sum_{r=1}^{\mu_n} \frac{1}{2^{r+1}} - \sum_{r=1}^{\mu_n} \frac{1}{2^{r+1}} >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \lambda_n - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} - \frac{1}{2} = \sqrt{\lambda_n} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} - \frac{1}{2}$$

da cui

$$\lim I_{C_n} = +\infty .$$

Poichè è $I_{C_0} = 0$, è così dimostrato che su C_0, I_C non è continuo.

(16) H. LEBESGUE, *Sur le problème de Dirichlet.* « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. XXIV, pp. 371–402, p. 379, 1907; V. anche TONELLI, loc. cit. (1) p. 383.

Matematica (Analisi). — *Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti.* Nota III (*) di L. Castoldi, presentata dal Socio L. Berzolari.

9. Se nelle argomentazioni precedenti si lascia cadere l'ipotesi di analiticità delle funzioni considerate, ma ancora si ammette che nel campo fondamentale G siano contenuti, in numero finito o in una infinità numerabile, campi parziali G_s ($s = 1, 2, \cdots$) in ciascuno dei quali siano di nuovo verificate le condizioni di analiticità, tutti i risultati ottenuti valgono immutati entro i singoli campi G_s, generalmente verificandosi una diversa determinazione dei coefficienti costanti e del numero delle relazioni lineari indipendenti da campo a campo.

Ciò accade, in particolare, se le y^i e le loro derivate successive sono, in G, *continue a tratti*, talchè G stesso risulti scomponibile in un numero finito di campi G_s, in ciascuno dei quali si verificano le condizioni indicate.

D'altra parte, se si tien conto del fatto che, a togliere l'analiticità delle y^i può contribuire anche soltanto il comportamento di loro derivate di ordine non inferiore a un qualunque intero M prefissato, si riconosce immediatamente che

Non può esistere alcun criterio di sufficienza per la dipendenza lineare di funzioni non analitiche, il quale vincoli soltanto il comportamento di un numero finito di loro derivate.

Con questo enunciato generale contrastano sia il noto teorema del Wronskiano, sia alcune proposizioni contenute nel citato lavoro del Coronato (1), e precisamente, laddove essi si riferiscono, con riguardo a funzioni anche non analitiche, a una condizione di non contemporaneo annullamento di minori di un determinante *Wronskiano* relativo alle funzioni date.

A chiarire tale divergenza e ad avvalorare le conclusioni tratte nel presente lavoro, valgano gli esempi che seguono

1° Si considerino, col Peano, le due funzioni di una variabile x

$$y^1 = (x)^2 \quad , \quad y^2 = x\,|\,x\,|\,,$$

definite in un intorno qualunque G di $x = 0$, per esempio, in $-1 < x < 1$. Ci troviamo qui nel caso 2° del numero 8, e, come subito si verifica, la matrice Wronskiana è

$$\Delta^2_{0+1} = \| (x)^2 \quad x\,|\,x\,| \|$$

mentre, per il determinante Wronskiano W, si ha identicamente in G:

$$W = \begin{vmatrix} (x)^2 & x\,|\,x\,| \\ 2x & 2\,|\,x\,| \end{vmatrix} = 0\,.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1947.

(1) S. Coronato, Loco citato, p. 293.

Poichè inoltre nell'origine, e soltanto ivi; la derivata seconda della y^2 presenta una discontinuità, si conclude, secondo i precedenti risultati generali, che le due funzioni y^1, y^2 non sono linearmente dipendenti in G, ma separatamente nei due intervalli $-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$, in ciascuno dei quali sono legate da una sola relazione lineare. Effettivamente si ha, in $0 < x < 1$: $y^1 - y^2 = 0$; in $-1 < x < 0$; $y^1 + y^2 = 0$.

La possibilità di attribuire questi fatti alla circostanza che in $x = 0$ i complementi algebrici degli elementi dell'ultima orizzontale in W contemporaneamente si annullano è puramente fortuita, come risulta dal seguente altro esempio.

2° Siano

$$y^1 = x\left|x + \frac{a}{x}\right| \quad , \quad y^2 = x\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

(con a costante positiva non nulla) due funzioni di una variabile x nell'intervallo $-1 < x < 1$. Ivi esse hanno la matrice Wronskiana

$$\Delta^2_{2+1} = \left\| x\left|x + \frac{a}{x}\right| \quad x\left(x + \frac{a}{x}\right) \right\|,$$

ed è identicamente

$$W = \begin{vmatrix} x\left|x + \frac{a}{x}\right| & x\left(x + \frac{a}{x}\right) \\ 2\,|x| & 2x \end{vmatrix} = 0.$$

La prima delle funzioni assegnate ha nell'origine una discontinuità di prima specie, mentre le sue derivate, a partire dalla prima, ove si assuma $\left(\frac{dy^1}{dx}\right)_{x=0} = 0$, sono continue dappertutto nell'intervallo considerato. Per effetto della discontinuità di y^1, secondo la precedente teoria, non esiste, anche qui, un unico legame lineare tra y^1 e y^2 valido in tutto l'intervallo $-1 < x < 1$, bensì è $y^1 - y^2 = 0$ per $0 < x < 1$, e $y^1 + y^2 = 0$ per $-1 < x < 0$.

Tuttavia, in tutto il campo di definizione è, contrariamente al teorema del Wronskiano, $W = 0$ *e non sono mai contemporaneamente nulli i complementi algebrici degli elementi dell'ultima orizzontale in* W.

3° Si considerino ora le tre funzioni di x

$$y^1 = x + 1 \quad , \quad y^2 = \operatorname{sen} x \quad , \quad y^3 = x + 1 - |\operatorname{sen} x|$$

nell'intervallo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Anche qui, per la discontinuità in $x = 0$ della derivata prima e di tutte quelle di ordine dispari di y^3, le y^i non sono linearmente dipendenti in tutto l'intervallo dato, mentre la matrice Wronskiana è

$$\Delta^3_{1+1} = \begin{vmatrix} x+1 & \operatorname{sen} x & x + 1 - |\operatorname{sen} x| \\ 1 & \cos x & 1 - |\cos x| \end{vmatrix};$$

inoltre è identicamente (valendo i segni superiori e gli inferiori rispettivamente in $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ e in $0 < x < \frac{\pi}{2}$)

$$W = \begin{vmatrix} x+1 & \operatorname{sen} x & x+1-|\operatorname{sen} x| \\ 1 & \cos x & 1 \mp \cos x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \pm \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = 0,$$

e non sono mai nulli insieme i consueti complementi algebrici.

4° Più in generale, se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono due funzioni definite in un intorno G dell'origine, entrambe analitiche in G, e inoltre: la prima non nulla per $x=0$, la seconda ivi nulla e dispari in G; infine tali da non riuscire linearmente dipendenti in G (per il che basta che sia, in tale intervallo, $\begin{vmatrix} f & \varphi \\ f' & \varphi' \end{vmatrix} \neq 0$), allora le tre funzioni

$$y^1 = f(x) \quad , \quad y^2 = \varphi(x) \quad , \quad y^3 = f(x) - |\varphi(x)|$$

non sono linearmente dipendenti in G, benchè abbiano ivi Wronskiano nullo e non mai nulli insieme i soliti complementi algebrici. Si osservi che se le derivate successive di $\varphi(x)$ sono nulle nell'origine fino a quella di ordine l ed è $l > 2$, gli elementi della matrice Wronskiana, che ora è della forma Δ^3_{l+1}, sono tutti continui in G.

Un esempio di ciò, per $l = 1$ si ha in 3°; un altro esempio, con $l = 3$, è dato da

$$y^1 = f(x) = \cos x \quad , \quad y^2 = \varphi(x) = (x)^3 \quad , \quad y^3 = \cos x - |x^3| ,$$

come subito si verifica.

Matematica (Geometria). — *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari.* – II. *Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci*(*). Nota di M. Villa, presentata(**) dal Socio L. Berzolari.

3. Per fissare intrinsecamente l'iperpiano improprio in uno degli spazi occorre passare all'intorno del 3° ordine.

Tratteremo separatamente il caso $r = 2$ dall'altro $r > 2$. Per $r = 2$ il problema è già stato risolto dal Bompiani (20) ma lo scopo si consegue qui in modo assai più rapido (21).

Consideriamo una retta $\bar{l}$ per O′ (opp. O), diversa dalle tre rette caratteristiche (o meglio: consideriamo l'$\bar{E}_3$ di flesso di 2ª specie di centro O′ appar-

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(20) Bompiani, il lavoro cit. nella (5).

(21) Nel n. 7 si collega il procedimento qui seguito con quello seguito dal Bompiani.

tenente a t) e l'E_3 corrispondente in T. Questo E_3 (non di flesso) determina (n. 1) una proiettività non degenere (che si dirà *associata*) fra i punti della sua tangente t e il fascio delle rette di centro O. Si chiameranno *caratteristici* i punti di t corrispondenti alle tre rette caratteristiche nella proiettività associata [22]. Per ogni retta t (diversa dalle tre rette caratteristiche) per O (opp. per O') si ha dunque una proiettività (associata) fra i suoi punti e il fascio di rette di centro O, e su di essa tre punti particolari intrinsecamente individuati (i punti caratteristici).

Allora, per fissare intrinsecamente la retta impropria del piano S_2 (o S_2'), basta individuare due rette del fascio O mediante i loro birapporti con le tre rette caratteristiche (per esempio quelle che formano con le $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_1 = x_2$ i birapporti $-1, 2$) ed assumere come *punti impropri* un punto caratteristico dell'una e un punto caratteristico dell'altra.

Le equazioni di T, nell'intorno del 3° ordine di (O, O') per le (2.13), (2.14) ($r = 2$), si scrivono

$$(3.1)\qquad \begin{cases} y_1 = x_1 - x_1 x_2 + \varphi(x_1, x_2) + [4] \\ y_2 = x_2 - x_1 x_2 + \psi(x_1, x_2) + [4] \end{cases}$$

dove φ, ψ sono polinomi omogenei di 3° grado in x_1, x_2 e indicando con [4] i termini di grado > 3.

Alla retta per O' (o all'$\bar{E}_3$)

$$y_2 = k y_1$$

corrisponde l'E_3

$$x_2 = k x_1 + q x_1^2 + r x_1^3,$$

dove

$$q = k(1-k) \quad , \quad r = k(1-k)^2 + k\varphi(1, k) - \psi(1, k).$$

La proiettività associata determinata da questo E_3 fra i punti $(\bar{x}_1, k\bar{x}_1)$ della tangente $x_2 = k x_1$ e le rette $x_2 = \lambda x_1$ del fascio di centro O ha l'equazione

$$(3.2)\qquad \bar{x}_1 = \frac{(\lambda - k)\, k\,(1-k)}{2k^2(1-k)^2 + (\lambda - k)[k(1-k)^2 + k\varphi(1, k) - \psi(1, k)]}.$$

I tre punti caratteristici sulla $x_2 = k x_1$, relativi ai valori $\lambda = 0, \infty, 1$, hanno quindi risp. le coordinate

$$(3.3)\qquad \begin{cases} \bar{x}_1 = \dfrac{k(k-1)}{k(k-1)^2 - k\varphi(1, k) + \psi(1, k)}, \\ \bar{x}_1 = \dfrac{k(1-k)}{k(k-1)^2 + k\varphi(1, k) - \psi(1, k)}, \\ \bar{x}_1 = \dfrac{k(1-k)}{2k^2(1-k) + k(1-k)^2 + k\varphi(1, k) - \psi(1, k)}. \end{cases}$$

(22) Sulla retta t il birapporto dei tre punti caratteristici e del punto O uguaglia il birapporto, nel fascio di centro O, delle tre rette caratteristiche e della retta t. Infatti nella proiettività associata ad O corrisponde t.

Per $k = -1$, affinchè il punto caratteristico (3.3) corrispondente ad $x_2 = 0$, sia improprio dev'essere

$$\varphi(1, -1) + \psi(1, -1) = 4.$$

Per $k = 2$, affinchè il punto caratteristico (3.3) corrispondente ad $x_2 = 0$, sia improprio dev'essere

$$2\varphi(1, 2) - \psi(1, 2) = 2.$$

Con ciò i riferimenti intrinseci nei due piani sono perfettamente individuati e *si hanno per* T *le equazioni canoniche*

$$y_1 = x_1 - x_1 x_2 + \varphi(x_1, x_2) + [4]$$
$$y_2 = x_2 - x_1 x_2 + \psi(x_1, x_2) + [4]$$

dove

$$\varphi(1, -1) + \psi(1, -1) = 4 \quad , \quad 2\varphi(1, 2) - \psi(1, 2) = 2.$$

4. Per $r > 2$ definiremo certi E_3 piani che diremo *caratteristici*. Si consideri (ad esempio in S'_r) un iperpiano individuato da $r - 1$ direzioni caratteristiche $s_1, s_2, \cdots, s_{r-1}$ (distinte) e si consideri in S_r la V_{r-1} che gli corrisponde in T. Segando V_{r-1} con un piano individuato da due direzioni caratteristiche p_1, p_2 (diverse da quelle corrispondenti in ω alle $r - 1$ considerate in S'_r) si ottiene una curva il cui E_3 in O (non di flesso) si dirà l'E_3 *caratteristico relativo alle* $r + 1$ *direzioni caratteristiche* $s'_1, s'_2, \cdots, s'_{r-1}, p_1, p_2$. Poniamo in evidenza la retta t in cui il piano (p_1, p_2) sega l'S_{r-1} individuato dalle direzioni caratteristiche $s_1, s_2, \cdots, s_{r-1}$ corrispondenti in ω alle $s'_1, s'_2, \cdots, s'_{r-1}$. La t è la tangente in O all'E_3. Ora questo E_3 piano di centro O e di tangente t determina (n. 1) una proiettività non degenere fra la punteggiata di sostegno t e il fascio di raggi di centro O del suo piano. Orbene in questa proiettività alle rette p_1, p_2 corrispondono due punti P_1, P_2 di t che si diranno *punti caratteristici*.

È chiaro come per questa via si possa pervenire a fissare intrinsecamente sopra r rette uscenti da O, r punti che si assumeranno come *punti impropri*.

Si può procedere così: Si considerino (ad esempio in S'_r) r direzioni caratteristiche (distinte) $d'_1, d'_2, \ldots, d'_r$ (si prenderanno gli assi $y_1, y_2, \cdots, y_r$), in S_r si considerino le r direzioni caratteristiche corrispondenti $d_1, d_2, \cdots, d_r$ e in più un'altra direzione caratteristica l (si prenda la $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$). Si consideri poi l'E_3^i caratteristico relativo alle $d'_1, \cdots, d'_{i-1}, d'_{i+1}, \cdots, d'_r, d_i, l$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$. Gli r E_3^i così ottenuti si diranno *associati*. Sulla retta t_i in cui il piano (d_i, l) interseca l'S_{r-1} $(d_1, \cdots, d_{i-1}, d_{i+1}, \cdots, d_r)$ che è la tangente in O ad E_3^i, l'E_3^i determina due punti caratteristici. Assumendo uno di questi (ad esempio quello corrispondente alla retta d_i) come *punto improprio* (oppure assumendo come punto improprio il quarto armonico di O rispetto ai due punti caratteristici) si viene appunto a fissare in S_r l'*iperpiano improprio*.

Le equazioni di T, tenute presenti le (2.13), (2.14), si scriveranno

$$y_i = x_i + \sum_{k,n} b^i_{kn}\, x_k x_n + \sum_{k,n,p} c^i_{knp}\, x_k x_n x_p + [4], \tag{4.1}$$

dove

$$b^i_{kk} = 0 \quad , \quad \sum_{k,n} b^i_{kn^*} = -1 , \tag{4.2}$$

le c^i_{knp} sono costanti ($c^i_{knp} = c^i_{kpn}$ e analogamente) ($i, k, n, p = 1, 2, \cdots, r$), e si indicano con [4] i termini negli sviluppi di grado > 3.

Si consideri l'E^i_3 caratteristico relativo agli assi $y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_r, x_i$, e alla retta $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$. L'S_{r-1} individuato dagli assi $y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_r$ ha l'equazione $y_i = 0$.

La V_{r-1} che corrisponde in T a $y_i = 0$ ha per la (4.2) l'equazione

$$x_i + \sum_{k,n} b^i_{kn}\, x_k x_n + \sum_{k,n,p} c^i_{knp}\, x_k x_n x_p + [4] = 0. \tag{4.3}$$

Il piano individuato dall'asse $x_i (x_1 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_r = 0)$ e dalla retta $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$ ha le equazioni

$$x_1 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_r \tag{4.4}$$

e sega la V_{r-1} nella curva

$$x_i + \left(\sum_{\bar n} b^i_{i\bar n}\right) x_i x_j + \left(\sum_{\bar k,\bar n} b^i_{\bar k\bar n}\right) x_j^2 + \left(\sum_{\bar k,\bar n,\bar p} c^i_{\bar k\bar n\bar p}\right) x_j^3 + \cdots = 0 \tag{4.5}$$

dove j è uno dei numeri $1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, r$ e $\bar k, \bar n, \bar p$ assumono tutti i valori $1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, r$.

L'E^i_3 in O della curva (4.5) è

$$x_i = \rho_2 x_j^2 + \rho_3 x_j^3 \tag{4.6}$$

dove

$$\begin{cases} \rho_2 = -\sum_{\bar n \bar k} b^i_{\bar k\bar n} \\ \rho_3 = \left(\sum_{\bar n} b^i_{i\bar n}\right)\left(\sum_{k,\bar n} b^i_{k\bar n}\right) - \sum_{k,\bar n,p} c^i_{k\bar n p}. \end{cases} \tag{4.7}$$

La (4.6) è l'equazione dell'E^i_3 caratteristico considerato. La proiettività determinata da questo E^i_3 fra la punteggiata avente per sostegno la tangente $x_i = 0, x_1 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_r$ e il fascio di rette di centro O (situato in $x_1 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_r$) fa corrispondere al punto di coordinate $x_i = 0, x_j = \bar x_j$ della tangente la retta

$$x_j = \frac{\rho_2 - \rho_3 \bar x_j}{2\rho_2^2 \bar x_j}\, x_1 .$$

I punti caratteristici, cioè i corrispondenti dell'asse $x_i (x_1 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_r = x_j = 0)$ e della retta $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$ nella precedente

proiettività, hanno rispettivamente le coordinate $x_i = 0$, $\bar{x}_j = \frac{\rho_2}{\rho_3}$ e $x_i = 0$, $\bar{x}_j = \frac{\rho_2}{2\rho_2^2 + \rho_3}$.

Assumendo il primo di questi punti come *punto improprio* è

$$\rho_3 = 0,$$

ossia per la (4.7)

$$\sum_{k,\bar{n},\bar{p}} c^i_{\bar{p}\bar{n}\bar{p}} = \left(\sum_{\bar{n}} b^i_{i\bar{n}}\right)\left(\sum_{\bar{k}n} b^i_{k,n}\right)$$

che può anche scriversi

$$\sum_{\bar{k},\bar{n},p} c^i_{\bar{k}n\bar{p}} = -\left(\sum_{\bar{n}} b^i_{in}\right)\left(1 + \sum_{n} b^i_{in}\right), \tag{4.8}$$

essendo $b^i_{ii} = 0$ e per le (4.2)

$$\sum_{k,n} b^i_{kn} = \sum_{\bar{k},\bar{n}} b^i_{\bar{k}\bar{n}} + \sum_{n} b^i_{in} = -1.$$

Le coordinate dell'altro punto caratteristico sono allora $x_i = 0$, $x_j = \frac{1}{2\rho_2}$.

Gli r punti *impropri* così fissati, corrispondentemente agli r valori $1, 2, \cdots, r$ di i, individuano in S_r l'*iperpiano improprio* e con ciò i riferimenti intrinseci nei due spazi sono ormai ottenuti.

Dalle (4.1), (4.2), (4.8), segue:

Nei riferimenti intrinseci indicati la trasformazione T *è rappresentata dalle equazioni canoniche*

$$y_i = x_i + \sum_{k,n} b^i_{kn} x_k x_n + \sum_{k,n,p} c^i_{knp} x_k x_n x_p + [4], \tag{4.9}$$

dove

$$b^i_{kk} = 0,$$

$$\sum_{k,n} b^i_{kn} = -1,$$

$$\sum_{k,\bar{n},\bar{p}} c^i_{k\bar{n}\bar{p}} = -\left(\sum_{n} b^i_{in}\right)\left(1 + \sum_{n} b^i_{in}\right)$$

$$(i, k, n = 1, 2, \cdots, r \quad , \quad \bar{k}, \bar{n}, \bar{p} = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, r).$$

Meccanica. — *Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa.* Nota II di F. Levi, presentata (*) dal Corrisp. G. Colonnetti.

In una Nota recente (1), noi abbiamo proposto un procedimento generale per la risoluzione del problema dell'equilibrio in un solido elastico omogeneo nel quale si verifichi un comportamento viscoso. Ammettendo che la deformazione viscosa sia ad ogni istante proporzionale alla sollecitazione unitaria, noi abbiamo allora definito una « viscosità specifica » (deformazione viscosa unitaria, sotto l'azione di una sollecitazione di 1 Kg/cm^2), che abbiamo supposto legata al tempo da una espressione del tipo:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \gamma (1 - e^{-\delta t}). \tag{1}$$

Siamo allora giunti a scrivere l'equazione generale dell'equilibrio viscoso di un solido elastico omogeneo assimilabile ad un solido di de Saint Venant nella forma:

$$\int_V \sigma(\tau) \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma}{E} + \bar{\varepsilon} + \int_0^t \sigma \gamma \delta e^{-\delta t} \, dt \right) dV = 0 \tag{2}$$

dalla quale abbiamo ricavato la soluzione del problema statico nei casi in cui la deformazione impressa longitudinale $\bar{\varepsilon}$ era costante nel tempo.

Vediamo ora come il procedimento sia applicabile nel migliore dei modi anche per certune distorsioni le cui caratteristiche variano nel tempo, ed in particolare per lo studio degli effetti del ritiro.

In conformità con i dati sperimentali, noi ammetteremo che il fenomeno di ritiro sia identico in tutti i punti del solido preso in esame e che la sua legge di dipendenza dal tempo sia della forma:

$$\bar{\varepsilon}_R = \alpha (1 - e^{-\beta t}). \tag{3}$$

Anche qui, noi introdurremo l'ipotesi che deformazioni longitudinali e deformazioni trasversali dovute al ritiro siano legate dalla stessa legge che le unisce in regime elastico.

In queste condizioni, l'equazione generale dell'equilibrio viscoso si scrive:

$$\int_V \sigma(\tau) \frac{d}{dt} \left[\frac{\sigma}{E} + \alpha (1 - e^{-\beta t}) + \int_0^t \sigma \gamma \delta e^{-\delta t} \, dt \right] dV = 0.$$

Poichè, nel caso particolare, la distorsione varia nel tempo mantenendosi sempre simile a se stessa (2), noi possiamo ripetere punto per punto il

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1948.

(1) F. Levi, *Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa* (I Nota).

(2) A stretto rigore, per valutare gli effetti del ritiro, occorre distinguere il caso dei solidi suscettibili di essere resi semplicemente connessi mediante un unico taglio, da quello dei solidi i quali hanno un grado di connessione maggiore. In questo secondo caso, l'azione

ragionamento esposto nella Nota citata, ed esprimere la sollecitazione σ come una funzione lineare ed omogenea di una unica incognita iperstatica scelta ad arbitrio. Scriveremo dunque:

$$\sigma = AX_i \tag{4}$$

e, sostituendo:

$$\int_V \left[\frac{A}{E} \frac{dX_i}{dt} + \alpha\beta e^{-\beta t} + A\gamma\delta X_i e^{-\delta t} \right] \sigma(\tau)\, dV = 0.$$

Sviluppando l'integrale, viene:

$$\frac{dX_i}{dt} \int_V A\sigma(\tau)\, dV + E\alpha\beta e^{-\beta t} \int_V \sigma(\tau)\, dV + X_i E\gamma\delta e^{-\delta t} \int_V A\sigma(\tau)\, dV = 0.$$

Osservando allora che si ha, per la (4)

$$\sigma(\tau) = AX_i(\tau)$$

si può scrivere l'equazione sotto la forma:

$$\frac{dX_i}{dt} + E\alpha\beta e^{-\beta t} \frac{\int_V A\, dV}{\int_V A^2\, dV} + X_i E\gamma\delta e^{-\delta t} = 0.$$

Il rapporto R dei due integrali di volume che compare in questa espressione è una grandezza che caratterizza la struttura presa in esame nei riguardi dell'incognita X_i. Le sue dimensioni sono quelle stesse di X_i, divisa per una tensione unitaria (se X_i è una forza, R ha le dimensioni di una superficie). Noi daremo a questo coefficiente un valore più esplicito scrivendo:

$$A = \frac{\sigma(\tau)}{X_i(\tau)} = \frac{\sigma(o)}{X_i(o)}.$$

Dove si sono indicate con l'indice « o » le grandezze calcolate in regime elastico per una contrazione di volume uniforme (cioè costante in tutto il solido). Viene allora:

$$R = \frac{\frac{1}{X_{io}} \int_V \sigma(o)\, dV}{\frac{1}{X_{io}^2} \int_V \sigma^2(o)\, dV} = X_{io} \cdot R'$$

del ritiro va assimilata ad altrettante distorsioni di Volterra quanti sono i gradi di connessione del solido tagliato una volta. Se tuttavia si assimila ancora l'effetto statico di ciascuna distorsione a quello di due ben determinate forze eguali e contrarie applicate alle faccie di un taglio si trova: *a*) che il principio di sovrapposizione si applica anche all'azione di più distorsioni; *b*) che, in conseguenza, la legge di variazione nel tempo della σ è la stessa in qualsiasi punto. Il che consente di limitarsi in ogni caso a studiare la legge di variazione di una unica incognita iperstatica, poichè questa legge sarà la stessa per tutte le incognite.

dove R' è una nuova costante, valida per qualsiasi incognita iperstatica, e avente le dimensioni $L^2 F^{-1}$. In definitiva, noi otteniamo l'equazione differenziale del problema nella forma:

$$\frac{dX_i}{dt} + E\alpha\beta X_{io} R' e^{-\beta t} + X_i E\gamma\delta e^{-\delta t} = 0. \tag{5}$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare la cui integrale generale sarà:

$$X_i = e^{E\gamma e^{-\delta t}} \left[C - \int E\alpha\beta X_{io} R' e^{-\beta t} e^{-E\gamma e^{-\delta t}} dt \right]. \tag{6}$$

Calcoliamo l'integrale, indipendentemente dai coefficienti costanti. Integrando per parti si può scrivere:

$$\int e^{-\beta t} e^{-E\gamma e^{-\delta t}} dt = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta t} e^{-E\gamma e^{-\delta t}} + \int \frac{E\gamma\delta}{\beta} e^{-(\beta+\delta)t} e^{-E\gamma e^{-\delta t}} dt.$$

Integrando nuovamente per parti, si giunge al seguente sviluppo in serie dell'integrale citato:

$$\int e^{-\beta t} e^{-E\gamma e^{-\delta t}} dt = e^{-E\gamma e^{-\delta t}} \left[-\frac{1}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{E\gamma\delta}{\beta(\beta+\delta)} e^{-(\beta+\delta)t} - \right.$$
$$\left. - \frac{E^2\gamma^2\delta^2}{\beta(\beta+\delta)(\beta+2\delta)} e^{-(\beta+2\delta)t} + \dots \right].$$

Sostituendo nella (6) si ottiene:

$$X_i = Ce^{E\gamma e^{-\delta t}} + E\alpha X_{io} R' \left[e^{-\beta t} + \frac{E\gamma\delta}{\beta+\delta} e^{-(\beta+\delta)t} + \right. \tag{7}$$
$$\left. + \frac{E^2\gamma^2\delta^2}{(\beta+\delta)(\beta+2\delta)} e^{-(\beta+2\delta)t} + \dots \right].$$

Il valore della costante si calcola facilmente osservando che, all'istante iniziale, la deformazione impressa è nulla e devono dunque risultare identicamente nulle tutte le incognite iperstatiche.

Una notevole semplificazione si ottiene tuttavia se si osserva che, in pratica, nel caso del ritiro, si può sempre ammettere con buona approssimazione che si abbia:

$$\beta = \delta = \theta.$$

Introducendo questa ipotesi nella equazione differenziale (5) questa diviene a variabili separabili. Si può allora scrivere:

$$\frac{dX_i}{E\alpha X_{io} R' + E\gamma X_i} = -\theta e^{-\theta t} dt$$

per cui, integrando:

$$\frac{1}{E\gamma} \operatorname{Log} (E\alpha X_{io} R' + E\gamma X_i) = e^{-\theta t} + C.$$

Il valore della costante risulta dalla condizione $t = 0, X_i = 0$. Si dovrà perciò avere:

$$C = \frac{1}{E\gamma} \operatorname{Log} E\alpha X_{io} R' - 1$$

e, sostituendo:

$$\frac{1}{E\gamma} \operatorname{Log} (E\alpha X_{io} R' + E\gamma X_i) = e^{-\theta t} + \frac{1}{E\gamma} \operatorname{Log} E\alpha X_{io} R' - 1.$$

Ciò che si può scrivere

$$\operatorname{Log} (E\alpha X_{io} R' + E\gamma X_i) = E\gamma e^{-\theta t} + \operatorname{Log} E\alpha X_{io} R' - E\gamma$$

e, passando ai numeri:

$$E\alpha X_{io} R' + E\gamma X_i = E\alpha X_{io} R' e^{E\gamma(e^{-\theta t} - 1)}.$$

Donde si ricava:

$$X_i = \frac{\alpha}{\gamma} X_{io} R' [e^{-E\gamma(1 - e^{-\theta t})} - 1]. \tag{8}$$

A tempo indefinito, si ha infine:

$$X_i = \frac{\alpha}{\gamma} X_{io} R' [e^{-E\gamma} - 1]. \tag{9}$$

Sui risultati di questo studio, noi possiamo fare le seguenti osservazioni.

Anche in presenza dell'azione simultanea del ritiro e della viscosità, lo stato di tensione ad un istante qualsiasi può venir calcolato modificando opportunamente il valore del modulo secondo quanto indica il rapporto X_i/X_{io} ricavato dalla (8).

Affinchè questa affermazione abbia un senso, occorre tuttavia che la X_{io} sia calcolata per una entità del ritiro eguale a quella che si riscontra al tempo τ, e cioè: $\bar{\varepsilon}_R(\tau) = \alpha(1 - e^{-\theta\tau})$. Anche la R' andrà dunque calcolata per questo valore della deformazione impressa. Nel valore di questo coefficiente si potrà poi sempre mettere in evidenza il fattore $1/E\alpha$. Si nota che, nel caso attuale, il rapporto di riduzione del modulo, oltre ad essere funzione del tempo e dei coefficienti γ, θ, sembra dipendere anche dalle caratteristiche della struttura attraverso l'intervento del coefficiente R' (4).

Come già in presenza di una distorsione costante nel tempo, in assenza di forze esterne, la viscosità non muta il segno della sollecitazione.

Nella (9) non compaiono che i coefficienti α e γ (valori assintotici del ritiro e della viscosità specifica). D'altra parte, a tempo indefinito, il coefficiente R' va calcolato per $\bar{\varepsilon}_R = \alpha$. L'effetto finale del ritiro e della viscosità non dipende dunque dal coefficiente θ che caratterizza la forma delle curve rappresentative dei due fenomeni.

(4) In realtà si dimostra che, nel caso di un solido riducibile a semplicemente connesso mediante un unico taglio, si ha sempre $R' = -1/E\bar{\varepsilon}_R = -\cdot 1/E\alpha(1 - e^{-\theta t})$. Quanto dire che, almeno in quel caso, il rapporto di riduzione del modulo dipende sempre soltanto dai valori dei coefficienti γ, θ e dal tempo.

Questo fatto ha una importanza pratica notevole in quanto i valori dei coefficienti dell'esponenziale sono molto difficili da stabilire sperimentalmente. È infatti sempre poco agevole seguire con precisione un fenomeno che si prolunga per mesi ed anni e, d'altra parte, per quanto precise siano le esperienze su cui ci si basa, rimane sempre che la curva teorica non ha in comune con la curva sperimentale che tre punti (l'origine, l'asintoto e un altro punto). È molto interessante poter affermare che questa imprecisione della rappresentazione analitica non intacca la precisione del risultato finale del calcolo.

Osserviamo infine che il nostro studio presuppone che la deformazione viscosa possa, sin dall'inizio, venir considerata come proporzionale alla sollecitazione unitaria. È però poco probabile che questa ipotesi corrisponda alla realtà. Basandosi infatti anche su esperienze personali in corso di elaborazione, chi scrive esprime l'opinione che, nella prima fase dell'indurimento, si verifichi in realtà un fenomeno plastico–viscoso, caratterizzato da una deformazione che cresce rapidamente col valore della sollecitazione. È ovvio che a un andamento siffatto i risultati precedenti non possono venire estesi, i fenomeni corrispondenti essendo più che altro interpretabili attraverso uno studio dell'equilibrio elasto–plastico.

Spetta all'esperienza di precisare il campo di applicazione rispettivo alle teorie elasto–plastica ed elastico–viscosa.

Astronomia. — *Gli elementi orbitali di τ Persei* (*). Nota di A. COLACEVICH, presentata (**) dal Socio G. ABETTI.

Riconsiderando i risultati di alcune mie osservazioni e calcoli riguardanti la doppia spettroscopica τ Persei (1), ho creduto interessante di ricavare dai dati esistenti anche le caratteristiche del suo moto angolare. Ricordo come dalle osservazioni spettroscopiche risulti il seguente gruppo di elementi:

$$P = 1515^d.6 \pm 0^d.1$$
$$T = 2415693^d.4 \pm 1^d.2 \text{ G. G.}$$
$$\omega = 234°.6 \pm 1°.2$$
$$e = 0.734 \pm 0.005$$
$$K_1 = 19.0 \pm 0.3 \text{ km/sec.}$$
$$V_0 = +2.15 \text{ km/sec.}$$
$$a_1 \sin i = 269.000.000 \text{ km} = 1.80 \text{ Unità Astronomiche (U. A.)}$$
$$m^3 \sin^3 i/(m_1 + m_2)^2 = 0.337 \text{ in unità della massa del sole.}$$

(*) Lavoro eseguito all'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1948.

(1) A. COLACEVICH, *Osservazioni ed elementi orbitali di alcuni sistemi spettroscopici binari.* «Mem. Soc. Astr. It.», vol. XIII, p. 171 (1940) e «Oss. Mem. Arcetr», fasc. 59 p. 13 (1941).

Secondo le usuali convenzioni i simboli stanno ad indicare il periodo (P), l'istante del passaggio al periastro (T), l'angolo tra la linea degli apsidi e quella dei nodi (ω); l'eccentricità (e), la semi-ampiezza della curva di velocità radiale (K_1), la velocità radiale del sistema (V_0), il semi grand'asse dell'orbita percorsa dalla stella osservata rispetto al baricentro del sistema (a_1), l'inclinazione dell'asse del piano orbitale rispetto alla visuale (i), le masse della componente visibile e del compagno invisibile (m_1 e m_2).

Tra questi elementi è importante osservare che il valore di $a_1 \sin i$ è 1.80 volte la distanza della terra dal sole. Il più piccolo valore di a_1 è quindi di 1.80 U. A. Nel caso più sfavorevole detta ellisse si vedrà come un segmento pari all'asse minore, ossia pari a $2 \times 1{,}80\ (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} = 2.44$ volte la parallasse.

Questa stella è stata osservata per la determinazione della parallasse all'Osservatorio di Mc Cormick negli Stati Uniti con il rifrattore di 26" e sono stati pubblicati [2] i risultati di 14 misure di posizione nel senso della ascensione retta. Da queste misure è risultato un valore della parallasse relativa di $+ 0''.015 \pm 0''.007$ ed una parallasse assoluta di $0''.018$.

Sembra quindi opportuno investigare quello che risulta dai dati delle osservazioni di Mc Cormick allorchè si tenga conto della duplicità della stella. Intanto è evidente che, essendo una sola delle componenti visibile nello spettro, si può assumere che una sola delle componenti contribuisce a formare l'immagine fotografica sulle lastre di parallasse. Il caso è del tutto simile a quello già da me trattato anni or sono per la stella ν Octantis [3], [4].

Il periodo che intercorre tra la prima e l'ultima osservazione di Mc Cormick è di 851 giorni e risulta disposto quasi a cavallo dell'apastro. A meno che la massima parte del moto non avvenga in declinazione, il moto della stella deve influire notevolmente nella soluzione delle equazioni di condizione che servirono a stabilire la parallasse stessa.

Queste equazioni, nel caso che includano l'eventuale moto orbitale, si scrivono come segue [5]:

$$c + t\mu + P\pi + BX + GY = m$$

dove c è una costante di misura da determinare, μ il moto proprio in ascensione retta, π la parallasse e B e G costanti del moto orbitale. Risultano invece coefficienti noti t, P, X, Y. La misura di posizione sulla lastra fotografica è rappresentata da m.

Le costanti B e G fanno parte delle costanti dette di Thiele-Innes [5] e sono legate alle più note costanti orbitali angolari dalle relazioni:

(2) « Publ. Mc Cormick Obs. », vol. IV, p. 36 (1927); v. anche p. 4.

(3) A. Colacevich, *Provisional elements of the spectroscopic binaries* ζ *Phoenicis and* ν *Octantis*. « Publ. Astr. Soc. Pac. », vol. 47, p. 84 (1935).

(4) A. Colacevich, *Gli elementi orbitali di* ν *Octantis*. « Rend. Lincei », vol. XXVI, p. 7 (1937).

(5) « U. O. C. », *68*, p. 355 (1926), « Transactions of the U. A. I. », vol. V, p. 334 (1935).

$$B = a_1 (\quad \cos\omega \operatorname{sen}\Omega + \operatorname{sen}\omega \cos\Omega \cos i)$$
$$G = a_1 (- \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\Omega + \cos\omega \cos\Omega \cos i)$$

dove Ω indica la posizione della linea dei nodi.

I coefficienti X e Y possono essere stabiliti allorchè si conoscano l'eccentricità ed il tempo passato dal momento del passaggio al periastro. Questi valori si trovano tabulati [6].

Adottando l'eccentricità 0,734 degli elementi spettroscopici e così pure T, si calcolano dapprima le anomalie medie per gli istanti in cui vennero compiute le osservazioni di parallasse di Mc Cormick e quindi si trovano X e Y. Gli altri coefficienti delle equazioni di condizione sono pubblicati da Mc Cormick [2] e non vengono per brevità qui riprodotti. Con quei dati si calcolano facilmente le equazioni normali pesate seguenti:

$$\begin{array}{rrrrrr} 12.9\,c - 0.2722\,\mu + 3.2004\,\pi - 16.895\,B - 1.663\,G = -0.11667 \\ + 1.6116 \quad - 7.2699 \quad + 1.497 \quad - 2.218 \quad - 0.00305 \\ + 8.9240 \quad - 5.155 \quad + 0.228 \quad - 0.0209 \\ + 23.384 \quad + 0.662 \quad + 0.14804 \\ + 3.395 \quad + 0.02247 \end{array}$$

La soluzione del sistema è:

$c = -0.01183$ mm

$\mu = -0.00078$ mm $= -0''.0162$ per 1000 giorni $= -0''.0059$ per anno

$\pi = -0.00002$ mm $= -0''.0004$

$B = -0.00219$ mm $= -0''.0455$

$G = +0.00084$ mm $= -0''.0174$

dove la conversione da mm in secondi d'arco è fatta sulla base di 1 mm $=$ $= 20''.76$ [4].

Risultano evidenti due fatti: *a*) la grande influenza che l'introduzione dei termini orbitali ha sulle altre incognite da stabilire e *b*) il fatto che la soluzione trovata con parallasse relativa negativa e quindi parallasse assoluta dell'ordine di $0''.003$ porterebbe a valori della luminosità e della massa incompatibili con i dati del problema. Per quest'ultimo motivo non si sono calcolati gli errori probabili delle quantità trovate.

Volendo ricavare dalle misure di Mc Cormick un qualche risultato e tenendo presente che il fattore predominante in questa stella deve essere quello orbitale, si è deciso di assumere un valore per parallasse e precisamente quello spettroscopico fornito dal catalogo di Schlesinger [7] pari a $0''.026$ da cui deriva una parallasse relativa di $0''.23$. Per il fatto che, come risulta dai dati, il moto orbitale può essere in parte mascherato da un

(6) « U. O. C. », *71*, Appendix (1926).

(7) F. SCHLESINGER, *General Catalogue of Stellar Parallaxes* (1935).

fittizio moto proprio introdotto nelle osservazioni come incognita indipendente, si è ritenuto più appropriato assumere il moto fornito dal catalogo di Boss[8] al n. 3462. Si trova facilmente $\mu_\alpha \cos\delta = +\,0''.0018 \pm 0''.0006$. I coefficienti moltiplicativi del moto proprio non superano 0,430 e quindi gli effetti del moto proprio non raggiungendo la mezza unità dell'ultima cifra che si ricava dalle osservazioni, possono essere trascurati. Ciò è vero nell'ipotesi che le stelle di riferimento non presentino moto proprio sensibile nel loro insieme. In definitiva si hanno le seguenti equazioni normali pesate:

$$\begin{aligned} 12.9\,c - 16.895\,B - 1.663\,G &= -0.12015 \\ +23.384 \quad +0.662 \quad\quad &+0.15360 \\ +3.395 \quad\quad &+0.02225 \end{aligned}$$

La soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned} c &= -0.01041 \text{ mm} \\ B &= -0.00100 \text{ mm} = -0''.018 \pm 0''.032 \\ G &= +0.00165 \text{ mm} = +0''.34 \pm 0''.019 \end{aligned}$$

dove gli errori probabili sono calcolati con le usuali norme del metodo dei minimi quadrati. Il forte valore relativo di questi errori indica l'incertezza dei risultati. In ogni modo, in linea di massima, i dati confermano che la parallasse è nel rapporto previsto in confronto al moto orbitale; sarebbe quindi questo un caso degno di essere preso in esame sia per una nuova osservazione sia per un calcolo accurato del moto orbitale con misure in ascensione retta ed in declinazione.

Assumendo i risultati qui ottenuti si può facilmente risalire dalle costanti B e G e con gli altri dati ai soliti elementi. Infatti dalle equazioni che forniscono B e G in funzione di a'', ω, Ω ed i, si ha, posto $B/G = k$

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}\Omega \cos i &= (k \sin\omega + \cos\omega)/(k\cos\omega - \sin\omega) = h \\ a_1''^2\,(1 - \cos^2\Omega \sin^2 i) &= B^2 + G^2 \\ a_1'' \sin i &= (a_1 \sin i \text{ U. A.})\,\pi = j. \end{aligned}$$

Elevando a quadrato la prima e la terza e posto $(B^2 + G^2) : j^2 = s^2$, si trova, eliminando prima a_1'' tra le ultime due e poi $\sin^2 i$ con la prima, con alcuni facili passaggi:

$$\sin^2\Omega = \frac{1}{2}\{1 + s^2 - [(1+s^2)^2 - 4\,s^2/(1+h^2)]^{\frac{1}{2}}\}$$

e quindi, a parte il segno, $\sin\Omega$. Con l'ausilio della prima delle precedenti si trova $\cos i$ che è sempre positivo, essendo per convenzione i in valore assoluto minore di 90°; l'ultima equazione fornisce quindi il valore di a_1''. Il valore

(8) B. Boss, *General Catalogue of 33342 stars* ecc.

di Ω viene definito dalle equazioni che definiscono B e G. In esse il segno di sin Ω e cos Ω sono univocamente stabiliti e devono soddisfare i valori numerici.

Nel nostro caso, posti i valori come noti di π, μ, ω, $a_1 \sin i$ in U.A., e quelli calcolati per B e G, si ha con facilità il seguente risultato

$$\Omega = 93^\circ \quad ; \quad i = -88^\circ \quad ; \quad a_1'' \; 0.047.$$

Il segno meno per la i risulta dal fatto che la stella principale nel momento in cui attraversa il nodo $\Omega = 126^\circ$, si allontana dall'osservatore.

Con questo valore di i si trova subito che è $m_2^3/(m_1 + m_2)^2 = 0.347$. Al sistema binario così determinato si può applicare a riprova la relazione massa–luminosità per determinarne la parallasse dinamica (9). Assumendo vari valori per la differenza di grandezza tra le due componenti, si trova che quella che meglio soddisfa il valore della funzione di massa (0.347) è di 0,65 grandezze stellari, l'orbita relativa ha allora un semi–asse pari a 0".104 e la parallasse dinamica risulta di 0".022 in sufficiente accordo con quella qui assunta in partenza di 0".026.

Vi è infine una piccola probabilità che il sistema sia ad eclisse, ciò che deve accadere allorchè la componente visibile ha la velocità media. Fatti i calcoli si trova che ciò accade circa 16 giorni dopo il passaggio al periastro oppure 255 giorni prima. Nel primo caso la velocità radiale va crescendo e quindi è la componente oscura che verrebbe eclissata, nel secondo sarebbe la componente visibile ad esserlo. La prossima eclisse eventuale di questo ultimo tipo potrebbe accadere il 23 novembre 1950 mentre l'eclisse del compagno avrebbe luogo il 21 agosto 1951. L'inclinazione del sistema non dovrebbe differire più di 1° da 90°.

Conviene infine fare una considerazione sul calcolo degli elementi di questi sistemi che possono eventualmente essere ricavati dalle lastre di parallasse. Allorchè i calcoli vengono fatti sulle misure lungo una sola coordinata, come nel presente caso, allora le incognite che compaiono nelle equazioni sono tra loro indipendenti e, se si adottano i dati risultanti dalle osservazioni spettrografiche, si giunge ad un unico gruppo di elementi finali. La soluzione potrà essere criticata da un punto di vista fisico, matematicamente essa è determinata. Similmente dalle sole misure in declinazione sarebbe ugualmente possibile ricavare la parallasse e le costanti orbitali. Potendo usare sia le posizioni in ascensione retta che quelle in declinazione si giungerà in finale a due distinti valori per la parallasse ed a due distinti gruppi di elementi orbitali. Evidentemente tra i due gruppi di incognite devono sussistere tre relazioni che è facile stabilire. La prima è quella che impone l'uguaglianza dei due valori di parallasse ricavate dalle due serie di misure. Le altre due risultano dal fatto che le quattro costanti orbitali che si ricavano dalle equazioni servono a stabilire a mezzo delle loro espressioni le quantità

(9) A. COLACEVICH, *Sulle parallassi dinamiche* ecc. «Memorie S. A. I.», vol. XVI, p. 155 (1943), «Oss. Mem. Arcetri», fasc. 62, p. 47 (1944).

ω, Ω, i, a''_1. Di queste quattro quantità ω è però già nota dagli elementi spettroscopici ed i due valori dovrebbero quindi coincidere e nel caso precedente si è fatto proprio uso di questa conoscenza per stabilire le altre quantità. La terza ed ultima relazione è quella espressa da $a''_1 \sin i = (a \sin i$ U.A.) $\pi = j$, già qui usata precedentemente. Essendo la quantità entro parentesi nota dagli elementi spettroscopici, questa espressione indica una relazione tra a''_1, i e π che deve essere pure soddisfatta. Data la precisione nettamente superiore degli elementi spettroscopici, che del resto vengono usati per stabilire il valore dei coefficienti X ed Y delle equazioni di condizione, una ricerca rigorosa dovrebbe rispettare i valori trovati con le velocità radiali, limitandosi a stabilire quei valori di a''_1, i ed Ω che meglio soddisfano le equazioni di condizione.

Come esempio per queste considerazioni si può citare l'orbita calcolata da H. L. Alden [10] per ν Octantis. In essa viene assunto il valore della parallasse ricavato soltanto dalle misure in ascensione retta. Si trova un valore di ω pari a 37° e quindi di 53° inferiore a quello fornito dall'orbita spettroscopica (90°). Infine il valore di $a''_1 \sin i$, che si calcola facilmente, risulta pari a 0".047 e deve essere l'equivalente di 0.74 che è la lunghezza di $a_1 \sin i$ espressa in U.A. come risulta dall'orbita spettroscopica. Facendone il rapporto risulta una parallasse pari a 0".064 che è superiore a quella di + 0".048 trovata dalle misure in ascensione retta.

Elettrochimica. — *Sulla diffusione nel platino dell'idrogeno catodico.* Nota di G. Bianchi, presentata [*] dal Corrisp. O. Scarpa.

È noto che una parte dell'idrogeno che si fa sviluppare elettrochimicamente su un elettrodo metallico viene assorbita dal metallo modificandone le caratteristiche meccaniche, la resistività elettrica, l'effetto fotoelettrico ecc. nonchè le proprietà chimico-fisiche, tra le quali, in particolare, il potenziale elettrochimico. Ad esempio se del palladio sotto forma di lamina sottile chiude il fondo di un tubo di ebanite e su una delle facce A della lamina vien fatto sviluppare dell'idrogeno catodico mentre l'altra faccia B è in contatto con una soluzione completamente separata da quella in contatto con la faccia A e se all'inizio dell'esperienza, prima che si sviluppi idrogeno sulla faccia A, si misura il potenziale elettrochimico della faccia B rispetto ad un elettrodo a calomelano, si trova che lo sviluppo di idrogeno sulla faccia A è accompagnato da una variazione del potenziale elettrochimico della faccia B.

Per il caso della diffusione dell'idrogeno catodico nel platino, Nernst e Lessing [1] operando con lamine di platino dello spessore di 0,3 mm. non osservarono invece alcuna variazione del potenziale elettrochimico della faccia

(10) H. L. Alden, *The orbit of* ν *Octantis*. « A. J. », vol. XLVIII, p. 81 (1939).

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1948.

(1) Nernst e Lessing, *Göttinger Nachrichten* (« Math.-phys. Klasse »), *146* (1902).

opposta a quella su cui si scaricava idrogeno catodico nemmeno dopo 21 giorni, mentre operando con lamine dello spessore di 0,036 mm. ottennero una variazione del potenziale elettrochimico, ma la attribuirono a discontinuità della lamina. Schmidt e Lücke [2], sperimentando con lamine di platino dello spessore di 0,02 e 0,03 mm., poterono invece osservare una graduale variazione del potenziale elettrochimico della faccia della lamina opposta a quella su cui si scaricavà idrogeno (confermando quanto aveva già osservato Helmholtz) e trovarono che il tempo necessario per ottenere una data variazione del potenziale è proporzionale al quadrato dello spessore della lamina in accordo con le loro deduzioni teoriche. Simili esperienze vennero ripetute da Köhler [3] il quale, operando con lamine di platino dello spessore di 0,1 e 0,05 mm., confermò i risultati di Schmidt e Lücke. In seguito Ferguson e Dubpernell [4], operando con lamine di platino « allo stato crudo di laminazione » con spessori compresi tra 0,038 e 0,012 mm., conclusero che le rapide variazioni del potenziale elettrochimico di una faccia della lamina di platino che accompagnano l'inizio della scarica dell'idrogeno sulla faccia opposta della lamina stessa sono dovute a discontinuità della lamina, mentre, quando la lamina non presenta discontinuità, la scarica di idrogeno su una faccia non produce alcuna variazione del potenziale elettrochimico della faccia opposta. Fatti analoghi vennero osservati dal prof. O. Scarpa che, in collaborazione con l'Ing. G. Colombo, sperimentò con un dispositivo il quale permise di stabilire che, anche nei casi da essi studiati, le rapide variazioni del potenziale elettrochimico della faccia opposta a quella ove avveniva lo sviluppo dell'idrogeno catodico erano dovute all'esistenza di forellini microscopici, che poterono svelare con un particolare procedimento [5]. Discutendo tali fenomeni il prof. O. Scarpa concluse che si deve distinguere il caso in cui la lamina è perfettamente sana, cioè non ha nè fori nè incrinature, da quello in cui possiede fori o incrinature, anche se di grandezza microscopica. La scarica dell'idrogeno su una delle facce della lamina, se sufficientemente sottile, produce nel primo caso una lentissima variazione del potenziale elettrochimico della faccia opposta, nel secondo una variazione rapidissima. Nel primo caso si tratta evidentemente di una vera e propria diffusione dell'idrogeno attraverso lo spessore della lamina, fenomeno che nel secondo caso si sovrappone a quello dovuto alla esistenza dei forellini. Tali conclusioni danno ragione dei risultati ottenuti dai precedenti sperimentatori. Per consiglio del prof. Scarpa ho ripreso l'esame della questione ed all'uopo ho sperimentato nel modo seguente. La lamina di platino in esame del diametro di 25 mm. chiude ermeticamente il fondo di un cilindro cavo di ebanite T (fig. 1) nella cui parete passano due fili di platino H e K saldati alla lamina di platino. Nel cilindro di ebanite T è contenuta una soluzione

(2) SCHMIDT e LÜCKE, « Z. Physik », *8*, 152 (1922).

(3) KÖHLER, « Z. Physik. Chem. », *135*, 369 (1928).

(4) FERGUSON e DUBPERNELL, « Trans. Electroch. Soc. », *64*, 221 (1933).

(5) Tali ricerche non sono state ancora pubblicate. I risultati mi vennero gentilmente comunicati dal prof. O. Scarpa.

normale di acido cloridrico entro cui pesca il sifone S immerso, con l'altra estremità, in un bicchiere R contenente pure soluzione normale di acido cloridrico e una lamina di platino P saldata al filo pure di platino M Il filo K e il filo M sono rispettivamente collegati col polo negativo e col polo positivo di una batteria di accumulatori attraverso un interruttore I, un'amperometro tipo Weston e una resistenza regolabile. Il bicchiere di ebanite T è parzialmente immerso in una soluzione di acido cloridrico normale contenuta nel recipiente D entro cui pesca il sifone della cella a calomelano (satura) C: l'elettrodo di platino L della cella a calomelano e il filo H sono collegati al potenziometro. Tenendo l'interruttore I aperto, si misurava il potenziale elettrochimico della faccia B della lamina di platino quando ne era raggiunta la stabilizzazione. Chiuso poi I si faceva sviluppare idrogeno cato-

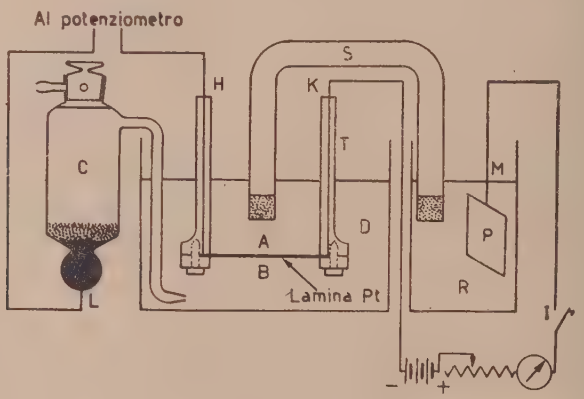


Fig. 1.

dico sulla faccia A della lamina di platino e si seguivano le variazioni di potenziale elettrochimico della faccia opposta B durante una ventina di ore. Le esperienze venivano effettuate alla temperatura ambiente (circa 18° C). Dai valori misurati del potenziale elettrochimico della faccia B della lamina di platino riferiti al potenziale del semielemento normale a calomelano saturo (+ 0,250 V), si calcolavano i valori riferiti al potenziale dell'elettrodo a idrogeno, con i quali vennero disegnati i diagrammi in funzione del tempo trascorso dall'istante di chiusura dell'interruzione I. Nelle prime esperienze si verificò che la chiusura dell'interruttore I era accompagnata da una rapida variazione del potenziale elettrochimico della faccia B della lamina, ma si potè stabilire che ciò era dovuto all'esistenza di piccole discontinuità del metallo, svelabili osservando le lamine contro una sorgente luminosa molto intensa. Sperimentando con lamine di platino che col sistema predetto non rivelavano discontinuità, lamine a cui si riferiscono i risultati riportati in seguito, non si verificarono rapide variazioni del potenziale elettrochimico nè all'atto della chiusura dell'interruttore I nè all'atto dell'apertura alla fine delle prove, il che conduce a ritenere che le variazioni così osservate si

debbono attribuire a idrogeno che diffonde attraverso il platino. Esistono tuttavia irregolarità nel periodo iniziale già osservate dai precedenti sperimentatori di cui non è chiara la spiegazione.

Le lamine di platino dello spessore di 0,03 e di 0,02 mm. vennero sperimentate allo stato crudo di laminazione e allo stato ricotto dopo essere state esaminate con i noti metodi roentgenografici di retrodiffrazione (radiazione Fe K, distanza tra il campione e la pellicola 47 mm, raggio incidente perpendicolare alla lamina di platino). Risultò che le lamine ricotte (8 h a 950° C) erano fortemente ricristallizzate e avevano subito un ingrossamento

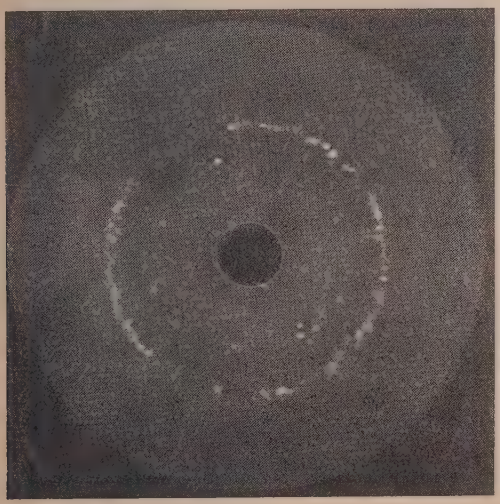


Fig. 2.

del grano (fig. 2) mentre le lamine crude mostravano un'incrudimento accompagnato da orientamento preferenziale (fig. 3).

Le esperienze sono state eseguite usando una corrente elettrolizzante di 20 m A (0,4 A/dm²) per produrre la scarica catodica dell'idrogeno sulla faccia A della lamina. I risultati ottenuti con lamine di platino dello spessore di 0,03 mm. sono riportati nella fig. 4 (linee continue) per il caso in cui la lamina era allo stato ricotto, allo stato crudo di laminazione e per il caso in cui la faccia A della lamina di platino ricotta su cui si scaricava l'idrogeno era stata preventivamente ricoperta con nero di platino. Le linee della stessa fig. 4 a tratto e punto danno i risultati delle esperienze eseguite con le lamine dello spessore di 0,02 mm. allo stato ricotto e allo stato crudo.

Il fatto per cui la differenza tra il potenziale elettrochimico di B e quello dell'elettrodo normale a idrogeno risulta dopo qualche ora assai minore di quando lo sviluppo dell'idrogeno catodico non è ancora avvenuto indica che il platino ha assorbito idrogeno che si è diffuso da A verso B. I diagrammi mostrano che ciò avviene in misura maggiore nella lamina ricotta non pla-

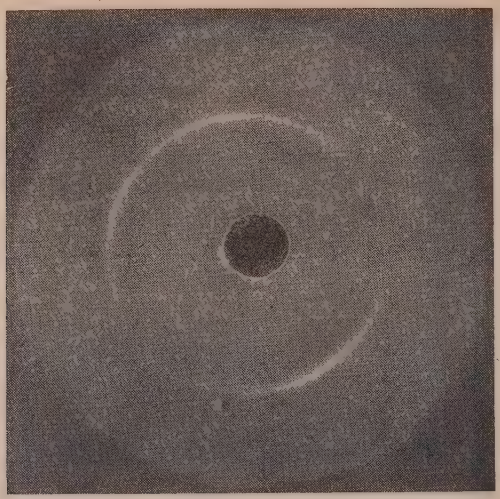


Fig. 3.

tinata, mentre in quella ricotta e platinata l'assorbimento sarebbe minore anche rispetto alla lamina cruda. Questo minore assorbimento di idrogeno (a parità di tempo) della lamina ricoperta con nero di platino deve essere messo in relazione con la minor tensione tra la lamina e l'elettrolita richiesta

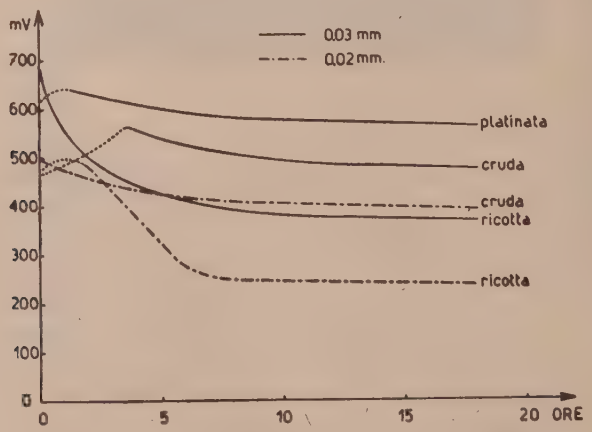


Fig. 4.

per far avvenire lo sviluppo dell'idrogeno catodico, mentre la maggior permeabilità all'idrogeno della lamina ricotta rispetto alla cruda è probabilmente dovuta, secondo un'ipotesi del prof. Scarpa, alla facilità con la quale l'idrogeno attraversa gli intervalli fra le superficie affacciate dei grossi microcristalli non in perfetto contatto fra di loro.

Riassumendo si può concludere che:

1° la diffusione nel platino dell'idrogeno catodico è molto influenzata dalla struttura del metallo;

2° rendendo con la platinatura molto piccolo il potenziale catodico con cui avviene la scarica dell'idrogeno, diminuisce la quantità di idrogeno che a parità di condizioni diffonde nel platino.

Ringrazio il Direttore del Laboratorio, prof. Oscar Scarpa, che mi ha guidato durante lo svolgimento della presente ricerca.

Biologia. — *Sul metabolismo dell'azoto in « Bombyx mori ». - IV. Ricerca degli enzimi allantoicasi ed allantoinasi nei bachi da seta durante lo sviluppo larvale*(*). Nota di C. MANUNTA, presentata(**) dal Socio G. LEVI.

Se l'acido allantoinico rappresenta veramente un prodotto *nella scissione o nella sintesi dell'acido urico* – come ho avuto motivo di sospettare – *enzimi quali l'allantoinasi e l'allantoicasi debbono entrare in gioco.*

Prima di intraprendere una loro ricerca sistematica lungo tutte le fasi dello sviluppo larvale, ho creduto opportuno praticare a diversi stadi saggi esplorativi.

Riferisco brevemente sui risultati ottenuti da questi saggi preliminari.

1. N. 60 bachi alla fine della II^a età (vicini al 3° sonno) pesanti complessivamente gr. 1,12, vengono triturati con sabbia di quarzo. Si aggiunge cc. 4 di soluzione tampone (Na_2HPO_4 N/5) e si lascia in frigorifero per due ore. Si centrifuga e del centrifugato mediante pipetta si versano cc. 2 in una provetta e altri 2 cc. in un'altra. Un tubo da saggio viene lasciato all'ebollizione per 1/2 ora ed infine ad entrambi si aggiunge 1 cc. di soluzione di allantoina a 50 mgr. %. Si lasciano stare i due tubi per 2 ore in termostato a 30° poi ad ogni tubo si aggiungono cc. 6 di H_2O e cc. 2 di acetato di uranio; si lascia riposare per 5 minuti e poi si filtra.

A 4 cc. di ogni filtrato si aggiunge cc. 1,2 di cloridrato di fenilidrazina e si idrolizza l'acido allantoinico, facendo bollire per 2 minuti. Si raffredda e poi si aggiunge ad ogni prova cc. 3,8 di HCl concentrato e cc. 1, 2 di ferricianuro di fresco preparato. Nello stesso modo si preparano due prove in bianco, cioè senza che si faccia subire il riscaldamento.

Tanto nella prova che nel controllo si ha reazione gliossilica negativa e viceversa positiva per l'acido allantoinico. I valori di estinzione per le rispettive prove risultano:

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Genetica del C.N.R. presso l'Istituto « Spallanzani » dell'Università di Pavia. Vedi anche questi « Rendiconti », fascicolo di gennaio 1948.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

Per il controllo (saggio, cioè, con il fermento inattivato): $E = 0{,}025$
per la prova: $E = 0{,}05$.

Sebbene la quantità di allantoina trasformata in acido allantoinico non sia molto grande, tuttavia già da questo primo saggio non si può escludere una allantoinasi, mentre parrebbe assente l'allantoicasi.

2. Si prendono n. 67 bachi entranti in III^a età (subito dopo la II^a muta) aventi il peso di gr. 2,20 e dopo averli ben triturati con sabbia di quarzo si aggiungono cc. 6 di soluzione tampone e si prosegue, come già indicato precedentemente. Si ha reazione gliossilica lievissima; e per l'acido allantoinico:

per la prova controllo con il fermento inattivo: $E = 0{,}25$
per la prova: $E = 0{,}30$.

Anche qui si può ammettere che il fermento allantoinasi sia presente sebbene in piccole quantità e parrebbe intravvedersi la presenza anche dell'allantoicasi a giudicare dalla lievissima reazione positiva per l'acido gliossilico.

3. Sono stati presi n. 30 bachi del peso di gr. 4,9 entranti in IV^a età (mangiano dopo la III^a muta) e si è proceduto nel modo sopra indicato. Si è ottenuto reazione gliossilica negativa; e per l'acido allantoinico:

per il controllo: $E = 0{,}30$
per la prova: $E = 0{,}33$.

L'azione dell'allantoinasi sembra ridotta solo a tracce ed annullata quella dell'allantoicasi.

4. N. 10 bachi del peso di gr. 5,10 entrati in V^a età (subito dopo la IV^a muta) sono stati trattati come già precedentemente indicato. Si è ottenuto reazione gliossilica positiva; e per l'acido allantoinico:

per il controllo: $E = 0{,}40$
per la prova: $E = 0{,}60$.

In questo saggio si è così potuto mettere in evidenza chiaramente la presenza e dell'allantoinasi e dell'allantoicasi.

5. N. 20 bachi, entrati in V^a età, del peso di gr. 10,04 presi subito dopo il pasto, sono stati preparati in modo da separare da una parte i corpi e dall'altra gli apparati intestinali pieni del loro contenuto e sui due materiali è stato eseguito il procedimento già indicato sopra: Per i corpi si è ottenuta reazione gliossilica negativa; e per l'acido allantoinico:

per il controllo: $E = 0{,}30$
per la prova: $E = 0{,}36$.

Per gli intestini: reazione gliossilica negativa e per l'acido allantoinico:

per il controllo: $E = 0{,}23$
per la prova: $E = 0{,}23$.

In questa esperienza solo debole azione di allantoinasi può essere rilevata nei corpi.

Dall'insieme di queste esperienze preliminari si può concludere che nei bachi da seta è presente tanto l'allantoinasi che l'allantoicasi che però entrano in azione in determinati stadi di sviluppo e in determinate condizioni (il digiuno deve avere una azione sua propria, a giudicare dalle esperienze successive). Parrebbe intravvedersi un meccanismo di attivazione e di inattivazione dei fermenti succitati sia in relazione ad altre condizioni che si vengono a stabilire durante lo sviluppo, sia in rapporto alla maggiore o minore secrezione di sostanze determinate che forse hanno la proprietà di trasformare il profermento in fermento. Questo studio è per ora appena all'inizio e qualcosa di più preciso si potrà dire quando saranno presi in esame tutti gli stadi di sviluppo considerando in modo particolare gli stadi di sonno, di muta, di maturazione, di filatura.

Esperienze sul contenuto in acido allantoinico durante il digiuno nei bachi in toto.

Poichè da alcuni dati mi era sembrato di intravvedere che il tenore in acido allantoinico andasse aumentando durante il digiuno; anche per controllare l'attendibilità dell'ipotesi che mi si era affacciata di una utilizzazione dell'acido urico e dell'allantoina durante il digiuno stesso, ho condotto la seguente esperienza.

Ho prelevato 300 bachi in III° sonno che vengono suddivisi in due lotti: uno viene lasciato a digiuno e l'altro è allevato normalmente, anzi con razione di foglia più abbondante del normale, come controllo. Ogni 6 o 7 ore si fa il prelevamento di n. 10 bachi e si eseguono le determinazioni dell'acido allantoinico e la reazione per l'acido gliossilico.

Variazioni del contenuto in acido allantoinico nel corpo dei bachi (n. 10) durante il digiuno.

	Prove		Controllo	
STADIO	Peso (in gr.)	Cont. ac. allant. (in mgr. allant.)	Peso (in gr.)	Cont. ac. allant. (in mgr. allant.)
III° sonno	1,00	0,08		
mutati III°	0,92	0,12		
6 ore dopo muta	0,92	0,14	1,42	0,22
14 ore dopo	0,80	0,33	1,30	0,13
20 ore dopo	0,80	0,71	1,45	0,27
25 ore dopo	0,80	0,67	1,48	0,06
38 ore dopo	0,78	1,32	1,50	0,066
48 ore dopo	0,75	3,00	1,87	0,087

A partire da 14 ore di digiuno nei bachi a digiuno trovo anche notevoli quantità di acido gliossilico libero, come da specchietto, mentre nei bachi controllo o reazione negativa o reazione assai lieve.

Variazioni del contenuto in acido gliossilico libero nel corpo dei bachi (10) *durante il digiuno.*

STADIO	Peso	Contenuto in acido gliossilico
III° sonno	1	reazione negativa
mutati III°	0,92	reazione negativa
6 ore dopo muta	0,92	lievissime tracce
14 ore dopo muta	0,80	0,037
20 ore dopo muta	0,80	0,063
25 ore dopo muta	0,80	0,060
38 ore dopo muta	0,78	0,150

Da questa esperienza preliminare già si può affermare che non solo il contenuto in acido allantoinico, ma anche in acido gliossilico, va aumentando con l'aumentare del numero di ore di digiuno.

Tale esperienza dimostra chiaramente la presenza di un fermento « allantoicasi » nei tessuti dei bachi, fermento la cui azione è più attiva con il progredire del digiuno. Il risultato di tale esperienza sembra inoltre confermare l'ipotesi che tale fermento, come quello che trasforma l'allantoina in acido allantoinico « allantoinasi », pur essendo presente nei tessuti dei bachi non esplichi la sua azione che in determinati stadi di sviluppo o sia inibito da produzione di particolari sostanze.

Per approfondire tale studio – che si profila sin d'ora interessante – la ricerca della presenza e della più o meno grande attività dei fermenti stessi deve essere estesa su più larga scala a tutti gli stadi di sviluppo, comparativamente per varie razze.

Biologia. — *Neurosecrezione e sintesi di proteine*(*). Nota preventiva di V. MAZZI, presentata(**) dal Corrisp. N. BECCARI.

Una serie di ricerche che si sono venute sviluppando contemporaneamente ed indipendentemente, con tecniche del tutto diverse, nei laboratori di J. Brachet e di Caspersson, hanno portato alla messa in evidenza in tessuti in via di proliferazione e di accrescimento (dischi imaginali di *Drosophila*, apici radicali di *Allium*: Caspersson e Schultz, 1938)(1) ed anche in tessuti normali (pancreas esocrino, giovani ovociti, zolle di Nissl, ecc.: J. Bra-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1948.

(1) « Nature » (Lond.), *142*, 294 (1938).

chet, 1940) [2], di tenori elevati di acido ribonucleinico, che, nelle cellule a forte attività secernente, si localizza in corrispondenza dell'ergastoplasma.

Successivamente J. Brachet (1941) [3] da una parte, e Caspersson, Landström-Hydén e Aquilonius (1941) [4] dall'altra, sono giunti a stabilire una stretta relazione fra contenuto in acido ribonucleinico ed attitudine di una cellula a realizzare sintesi di proteine.

Sulla scorta di numerose osservazioni compiute con il suo metodo spettrofotometrico di analisi citochimica, Caspersson (1941) [5] è giunto alla formulazione di una teoria che permette di spiegare le relazioni che intercorrono fra ribonucleotidi e sintesi di proteine.

Secondo questa teoria il nucleo rappresenterebbe il più importante centro di sintesi proteica resa possibile soltanto in presenza di acidi nucleinici. Nella cromatina nucleare esistono due tipi di acidi nucleinici; il desossiribosico, il quale è localizzato in corrispondenza delle zone eucromatiche, e regolerebbe la sintesi di proteine superiori, a tipo globuline, in rapporto con i geni: e il ribosico, il quale è localizzato in corrispondenza delle zone eterocromatiche, che medierebbe la sintesi di proteine basiche, a tipo istone. Questi istoni si localizzerebbero nel nucleolo, per diffondere poi verso la membrana nucleare, di contro la quale provocherebbero, nel citoplasma, la sintesi di pentosonucleoproteidi: gli acidi aminati basici (arginina ed istidina) darebbero luogo in questo punto a delle purine. I pentosonucleoproteidi medierebbero a loro volta la sintesi di proteine citoplasmatiche. Risulta evidente la grande importanza che in questa teoria viene assegnata al nucleolo, alla membrana nucleare e ai pentosonucleoproteidi citoplasmatici, che in un certo senso vengono a rappresentare dei mediatori fra la eterocromatina e le proteine citoplasmatiche.

Hydén, applicando gli stessi metodi microchimici di Caspersson, ha esteso alla cellula nervosa lo studio del metabolismo delle proteine giungendo a conclusioni che appoggiano la teoria di Caspersson.

Secondo Hydén la cellula nervosa è caratterizzata dall'avere altamente differenziato e fortemente funzionante l'apparato di sintesi delle proteine, che è rappresentato dal cromocentro nucleare, dal nucleolo, ricco di basi exoniche e di ribonucleotidi, dalla membrana nucleare, da ribonucleotidi e dalle basi exoniche citoplasmatiche. Si danno casi particolarmente favorevoli (cellule gangliari di *Lophius piscatorius*) in cui si possono seguire molto chiaramente vari stadi della sintesi endocellulare di proteine (Hydén, 1943 *a*) [6].

Nella maggior parte delle cellule somatiche, cessato l'accrescimento, l'apparato per la sintesi delle proteine si riduce. Nelle cellule nervose durante lo sviluppo si assiste ad un progressivo aumento nella sintesi di proteine, il

(2) « C. R. Soc. Biol. », *133*, 88 (1940).
(3) « Arch. Biol. », *53*, 207 (1941).
(4) « Chromosoma », *2*, 111 (1941).
(5) « Naturwiss. », *29*, 33 (1941).
(6) « Ztschr. f. mikroskop.-anat. Forsch. », *54*, 96 (1943).

cui ammontare (calcolato nel solo pirenoforo) quintuplica mentre il giovane neuroblasto dallo stadio bipolare passa a quello multipolare, e si fa 2000 volte più grande nel successivo sviluppo dallo stadio multipolare a quello di cellula adulta. Questa enorme sintesi di proteine è, secondo Hydén (1943 *b*) [7], resa possibile dall'eccitamento in cui entra il sistema endocellulare a ciò preposto. Ma anche quando è stato conseguito il definitivo sviluppo un vivace metabolismo proteico è attribuito della cellula nervosa, che, anche allo stato adulto, è caratterizzata da un cospicuo sviluppo dell'apparato nucleolare e cromocentrico e da notevoli quantità di proteine basiche e di ribonucleotidi nel citoplasma. Questi ultimi si localizzano in corrispondenza delle zolle di Nissl, ed il loro carattere funzionale (Hydén li chiama «functional nucleotides») e la loro importanza nei processi di ricostituzione delle proteine è dimostrata dalle variazioni a cui essi vanno incontro nei diversi stati funzionali della cellula.

L'intenso lavoro muscolare e la stimolazione faradica evocano (Hydèn, 1943 *b*) [7] in cellule radicolari motrici, ed in cellule gangliari sensitive rispettivamente, estesi processi di metabolismo proteico i quali, se lo stimolo si protrae a lungo, sono solo in parte compensati dalle cellule in cui il sistema per la sintesi delle proteine entra in uno stato di forte irritazione, come lo testimonia il nucleolo assai ingrossato e contenente più gruppi basici che non quello di corrispondenti cellule in riposo.

La resezione dell'assone (Hydén, 1943 *b*) [7] si riflette immediatamente sul contenuto dei nucleotidi e delle proteine citoplasmatiche, che, malgrado il sistema nucleolo–membrana cellulare entri in un primo tempo in forte attività, finiscono con lo scomparire quasi del tutto entro i primi quindici giorni dall'operazione. Questi avvenimenti sono accompagnati dal quadro citologico della cromotolisi. Quando il ritorno ai valori normali di cronassia indica il ripristino della funzione, la cellula riacquista il suo contenuto normale di proteine attraverso un'intensa attività del sistema, palesata nel citoplasma dalla presenza di quantità assai notevoli di ribonucleotidi di contro alla mebrana nucleare.

Da quanto sono venuto esponendo risulta quindi che nella cellula nervosa i processi del metabolismo proteico accompagnano le varie manifestazioni della fisiologia cellulare.

I fenomeni neurosecretori sono noti da un punto di vista morfologico per merito specialmente di E. Scharrer e della sua scuola (v. per ampi riferimenti bibliografici su questo argomento; Mazzi, 1941 [8]; E. e B. Scharrer, 1945) [9]. È sui dati morfologici che Scharrer fonda il suo concetto di neurocrinia, secondo il quale particolari cellule nervose hanno la capacità di elaborare ed emettere granuli o masse di natura colloide.

(7) « Acta physiol. Scand. », *6*, suppl. 17 (1943).
(8) « Arch. It. Anat. Embriol. », *46*, I (1941).
(9) « Physiol. Rewiews », *25*, 171 (1945).

Non tutti gli AA. accettano le vedute di Scharrer, alcuni anzi ritengono il concetto di neurocrinia insostenibile, in quanto in contrasto con il postulato di unità funzionale della cellula, e riportano pertanto le figure morfologicamente osservabili a fenomeni di assorbimento ed utilizzazione di colloide ipofisario (Collin, 1934)[10]. Ma le prove che si sono venute accumulando in questi ultimi anni, e che hanno dimostrato la possibilità che fatti di natura secretoria si instaurino anche in distretti del sistema autonomo periferico (Ito e Nagahiro (1937)[11], nel plesso mioenterico del ratto; Lenette ed E. Scharrer (1946)[12], nel ganglio perisurrenale di *Macaca mulatta*) o del sistema nervoso centrale, che non sono in relazione con l'ipofisi (nucleo della radice mesencefalica del trigemino, Mazzi, 1947 *b*)[13], sembrano non solo confermare, ma generalizzare ed estendere il concetto di neurocrinia.

Però la interpretazione funzionale di questi fenomeni resta per il momento oscura. Anche la recente ipotesi avanzata da E. e B. Scharrer, secondo la quale i centri vegetativi ipotalamici (nei quali più di frequente si rilevano fatti secretori) sarebbero legati alla parte nervosa dell'ipofisi in un complesso neuroendocrino ipotalamo–ipofisario, al quale potrebbe riferirsi la regolazione dell'attività stagionale dell'ipofisi, non sembra essere sufficientemente fondata (Mazzi, 1947 *a*)[14].

In due miei recenti lavori (Mazzi, 1947 *a* e *b*)[13][14] ho acennata e in parte sviluppata una ipotesi la quale, anche se non rappresenta un sostanziale progresso nell'interpretazione funzionale dei fenomeni neuroendocrini, tende a ricondurli nel quadro delle attività fisiologiche di cellule nervose perfettamente funzionanti. Secondo questa ipotesi infatti la neurosecrezione rappresenterebbe il risultato visibile di una sintesi proteica in cellule nelle quali il sistema endocellare a ciò preposto appare particolarmente ben sviluppato. A questa ipotesi sono giunto partendo dalla considerazione che, nel nucleo magnocellulare preottico del Tritone crestato, la formazione del secreto, che dà la reazione caratteristica delle proteine, avviene in cellule assai ricche in acido ribonucleinico citoplasmatico[14]. Successivamente[13] ho descritto nel nucleo della radice mesencefalica del V del Tritone crestato peculiari riassestamenti della sostanza cromofila a carattere neurosecretorio; i prodotti formati contengono acido ribonucleinico, ed in ciò differiscono dal colloide elaborato dai nuclei preottici, che dà una reazione di Brachet negativa. Anche in questo caso l'apparato endocellulare per la sintesi delle proteine, nel senso di Caspersson–Hydén, appare assai ben sviluppato.

Ricerche preliminari, che attendono ulteriore e più ampia conferma con i metodi citochimici di cui posso disporre, parrebbero indicare che le cellule di tutti quei distretti del sistema nervoso centrale – dei Pesci e degli Anfibi –

(10) « An. thèrap. biol. », *2*, (1934).
(11) « Folia anat. jap. », *15*, 609 (1937).
(12) « Anat. Rec. », *94*, I, (1946).
(13) « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. III (1947) (in corso di stampa).
(14) « Atti Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. III, fasc. 1–2, p. 155 (1947).

nei quali si manifesta evidente la capacità di secernere, palesano alcune almeno delle caratteristiche proprie di elementi nei quali è in atto una vivace sintesi di proteine: più precisamente, per quanto ho potuto fin'ora constatare, apparato nucleolare ben sviluppato e ricco di nucleotidi (nucleo della radice mesencefalica del trigemino del tritone; nucleo magnocellulare preottico del rospo, per esempio); membrana nucleare pieghettata, contro la quale si notano, nel citoplasma, addensamenti di sostanze, possibilmente a tipo nucleotidico (cellule dei nuclei magnocellulare preottico e laterale del *tuber* di molte specie di Pesci); quantità notevoli di acido ribonucleinico nel citoplasma; acidofilia dei prodotti della secrezione, possibilmente da riferirsi alla presenza di alte percentuali di basi exoniche.

Queste brevi considerazioni parrebbero quindi ulteriormente dare corpo all'ipotesi a cui testè accennavo.

Tenuto conto poi che le su citate ricerche di Hydén – a cui bisogna aggiungere le altre più recenti condotte in collaborazione con Hamberg (1945) [15] sull'effetto dello stimolo prolungato e del trauma nelle cellule del ganglio cocleare di cavia – hanno condotto l'A. svedese a ritenere i processi del metabolismo proteico manifestazioni della fisiologia cellulare, mi sembra che nulla si opponga al considerare i fenomeni neurosecretori, inquanto sintesi proteiche particolarmente attive, una forma di attività che rientra nelle attribuzioni fisiologiche di peculiari cellule nervose nelle quali la normale funzione di recezione e trasmissione degli stimoli non viene necessariamente soppiantata da quella secretoria.

La teoria di Caspersson–Hydén, nella sua piena accezione, rappresenta, nel caso dei fenomeni di neurosecrezione, un'ottima ipotesi di lavoro, in quanto permette di assegnare ad essi un ben definito posto nel quadro della fisiologia cellulare. Da questo punto di vista, mi sembra che il suo valore non venga per il momento sminuito dalle critiche di cui da più parti è stata fatta oggetto, sia nella sua parte più strettamente tecnica che in quella concettuale.

Gersch e Bodian (1943) [16] studiando i fenomeni conseguenti alla resezione dell'assone nella cellula nervosa, sono giunti a mettere in dubbio la funzione esclusiva del nucleolo e della membrana cellulare nei processi di ricostituzione delle proteine.

Mirsky, Pollister e Lavin (1947) [17], i quali hanno elaborato un nuovo metodo citochimico, che comporta l'impiego quantitativo della reazione di Millon, ritengono il metodo spettrofotometrico di Caspersson inadeguato per il dosaggio degli istoni.

Anche J. Brachet (1944) [18] muove diverse obbiezioni alla teoria di Caspersson, e ritiene fra l'altro che la grande importanza attribuita dall'A. svedese all'acido ribonucleinico come mediatore dei processi di sintesi pro-

(15) « Acta oto–lazyng. », Suppl. LXI (1945).
(16) « J. cell. comp. Physiol. », *21*, 253 (1943).
(17) Citati in J. Brachet, « Actual biochim. », *9* (1947).
(18) J. Brachet, *Embryologie chimique*, Masson et Cie, Paris (1944).

teica non sia del tutto giustificata. Una serie di ricerche compiute nel suo laboratorio hanno indotto il Brachet a ritenere che in questi processi giuochino un ruolo fondamentale anche fermenti ossidanti e proteasi contenuti in particolari granuli [19] localizzati in corrispondenza dell'ergastoplasma e separabili a mezzo dell'ultracentrifugazione.

Non posso in questa sede ulteriormente insistere su quest'argomento. D'altra parte, ai fini delle mie ricerche, non è di interesse immediato la conoscenza esatta dei meccanismi che entrano in giuoco nella sintesi proteica. Mi preme soltanto di aver segnalata la corrispondenza morfologica ed in parte citochimica fra i fatti neurosecretori e quelli che accompagnano le manifestazioni di sintesi proteica intensa.

Biologia. — *Il trattamento con colchicina e l'assunzione di ossigeno studiati sull'uovo in sviluppo di «Bufo vulgaris»* [(*)]. Nota di E. URBANI, presentata [(**)] dal Socio G. COTRONEI.

Gli effetti provocati dalla colchicina sulle cellule vegetali e animali sono stati oggetto di numerosi studi che hanno cercato di chiarire il meccanismo di azione di questo alcaloide. Mentre nei vegetali la colchicina porta alla formazione di corredi cromosomici poliploidi, ciò è discusso negli animali come pure è discusso se questo alcaloide possa avere oltre che azione inibente lo sviluppo anche, ad opportuna concentrazione, azione eccitante lo sviluppo stesso.

Quello che è certo è che negli animali la colchicina agisce durante le divisioni cellulari bloccando le cariocinesi in metafase; si riscontrano alterazioni diverse a carico dei nuclei che possono culminare con la distruzione di questi.

Data la controversa questione della possibilità di eccitare oltre che di inibire le divisioni cellulari mi è sembrato di interesse uno studio sul metabolismo di cellule colchicinizzate, studio che ho iniziato con la determinazione del consumo di ossigeno: i pochissimi dati esistenti in letteratura su questo argomento sono, come si vedrà, discordi e discutibili. Già in una breve Nota ho comunicato (Urbani 1947) [1] che uova di *Bufo* bloccate nella segmentazione con colchicina hanno un consumo di ossigeno inferiore ai controlli. Data l'importanza che l'argomento mi sembra rivestire ho ripreso, non appena la presenza del materiale lo ha consentito, queste ricerche per un esame analitico più approfondito e per l'esatta valutazione e delimita-

(19) Questi granuli sono stati messi in evidenza per la prima volta da CLAUDE, che li chiama microsomi, e sono fondamentalmente costituiti da un ribonucleoproteide, a cui si associano proteine sulfidrilate, lipidi a tipo plasmalogeno e fermenti ossidanti.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1948.

(1) E. URBANI, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.», *23*, 6, (1947).

zione dei risultati ottenuti in confronto ai risultati morfologici conseguiti da altri Autori.

Ho limitato la misura del consumo di ossigeno ai vari stadi dell'uovo di *Bufo vulgaris* che vanno dalle prime divisioni cellulari fino alla blastula–inizio della gastrulazione; questo è stato fatto per le seguenti ragioni:

Stefanelli (1938) [2] ha dimostrato che durante la segmentazione dell'uovo degli Anfibi non si ha un aumento apprezzabile del consumo di ossigeno, questo è solo lievissimo nella blastula ed invece si rende evidente con l'iniziarsi della gastrulazione. Al fine delle mie ricerche questo è un fatto della più grande importanza per poter confrontare il consumo di ossigeno di uova che si segmentano regolarmente, e nelle quali con la segmentazione non vi è aumento di respirazione, con il consumo di ossigeno di uova bloccate nella segmentazione. In ricerche del genere si pone difatti il quesito se un organismo arrestato nello sviluppo respiri di meno dei controlli perchè il suo normale ritmo respiratorio è stato depresso oppure respiri di meno in quanto la sua respirazione è rimasta bloccata e perciò inferiore a quella del controllo che è aumentata con l'accrescimento.

Operando perciò in quegli stadi (segmentazione) nei quali si ha un succedersi di divisioni cellulari senza incremento della respirazione del germe nel suo complesso mi sono messo nelle condizioni più omogenee per poter operare una esatta comparazione.

L'azione della colchicina sulle uova di Anfibi è stata studiata da Keppel e Dawson (1939) [3] che hanno visto ad opportune concentrazioni la soppressione di ogni attività mitotica e la scomparsa dei limiti cellulari.

Wolsky (1940) [4] ha compiuto una analisi morfologica e fisiologica (consumo di ossigeno) di embrioni posti a sviluppare in soluzioni di colchicina. Ha riscontrato alterazioni varie (embrioni quasi acefali, verrucosità e rigonfiamenti della cute, mancata chiusura del blastoporo). Per la misurazione del consumo di ossigeno ha usato un Warburg di piccola capacità e non ha rilevato nessuna differenza nel consumo di ossigeno tra individui colchicinizzati e controlli. Questi risultati meravigliano anche l'autore in quanto è notevole che una azione che conduce ad alterazioni così manifeste non si rifletta sul metabolismo gassoso. Secondo Wolsky perciò l'azione della colchicina è tale da non alterare le ossidazioni cellulari e ciò in contraddizione con Mann (1939) [5] il quale ha osservato un aumento del consumo di ossigeno nei pesci trattati con colchicina.

Colombo (1944 e 1947) [6] ha eseguito un accurato lavoro morfologico sulla azione della colchicina sullo sviluppo di vari Anfibi anuri: egli ha messo in evidenza particolari reazioni cariologiche (mitosi bloccate, blastomeri

(2) Alb. Stefanelli, « Arc. Sc. Biol. », *24*, 411, (1938).
(3) D. Keppel e A. Dawson, « Biol. Bull. », *76*, 153, (1939).
(4) A. Wolski, « Arb. Ung. Biol. Forschg. », *13*, (1940).
(5) H. Mann cit. da Wolsky.
(6) G. Colombo, « Atti Ist. Ven. Sc. Let. Arti », *103*, 267, 1944; « Arch. Ital Anat. Embr. », *72*, 147, (1947).

polinucleati) e tra l'altro ha visto che la colchicina agisce carioclasicamente negli abbozzi istologicamente più differenziati e non ha invece azione notevole sugli abbozzi in processo di differenziazione organogenetica. Watermann (1940) [7] ha studiato l'azione della colchicina sullo sviluppo del pesce *Oryzias latipes* riscontrando alterazioni e arresti di sviluppo simili a quelli che si ottengono con i raggi X. Leghissa (1947) [8] ho studiato l'azione della colchicina sullo sviluppo di embrioni e larve di Anfibi.

Poichè Keppel e Dawson ammettono che la colchicina abbia sulle uova in sviluppo solamente una azione di arresto o di ritardo dello sviluppo stesso e al contrario Laur [9] ha visto pure sulle uova di Anfibi che la colchicina alla concentrazione 1/20.000 ha azione stimolante lo sviluppo, Sentein (1947) [10] ha ripreso la questione su *Bufo* e altri Anuri usando svariate concentrazioni dell'alcaloide (da 1/1.000 a 1/1.000.000) e non ha riscontrato in nessun caso accelerazione dello sviluppo. Tra i reperti citologici egli conferma le statmocinesi, i nuclei picnotici e nota per le forti concentrazioni la completa distruzione dei nuclei, fatto sul quale ebbi anche io a richiamare l'attenzione nella prima Nota. In nessun caso ha notato poliploidia.

Lehmann (1947) [11] ha saggiato sull'uovo di *Tubifex* diversi antimitotici giungendo a conclusioni che quì per brevità di spazio non posso riportare. Egli distingue negli antimitotici, che possono essere forti (colchicina, chinoni) o deboli (alcool, cloroformio, cloralio), una diversità di azione che si può esplicare con inibizione delle divisioni nucleari (colchicina) o con inibizione delle divisioni citoplasmatiche (alcuni chinoni). Secondo Hadorn e Lehmann i chinoni inibiscono alcuni fermenti e modificano la struttura delle proteine [12]. Caratteristica di tutti gli antimitotici è quella di bloccare le divisioni cellulari senza uccidere l'uovo.

Beams e Evans (1940) [13] hanno visto che uova di *Arbacia* trattate con colchicina arrestano le loro mitosi e si ha una diminuzione della viscosità del plasma ovulare.

Monroy e Montalenti (1947) [14] sullo stesso materiale studiando le relazioni esistenti fra la birifrangenza corticale e i cicli dell'aster hanno soppresso l'aster stesso trattando le uova con colchicina mettendo in evidenza che i cicli stessi sebbene normalmente sincroni sono indipendenti.

Waldo e Wimsatt (1945) [15] hanno visto che nel topo a seguito di iniezioni intraperitoneali e sottocutanee di colchicina si ha un arresto della segmentazione delle uova in via di sviluppo nell'utero.

(7) A. WATERMANN « Biol. Bull. », *78*, 29, (1940).
(8) S. LEGHISSA, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », *76*, 153 (1947).
(9) C. LAUR cit. da SENTEIN.
(10) P. SENTEIN, « C. R. S. B. », *141*, 352, (1947).
(11) F. LEHMANN « Experientia », *6*, 223, (1947).
(12) Ho in corso esperienze sulla respirazione di uova di Anfibi bloccate nella segmentazione con Naftochinone.
(13) H. BEAMS e T. EVANS, « Biol. Bull. », *79*, 188, (1940).
(14) A. MONROY e G. MONTALENTI, « Biol. Bull. », *92*, 151, (1947).
(15) C. WALDO e W. WINSATT, « Anat. Rec. », *93*, 363, (1945).

Woodard e Estes (1944) [16] hanno studiato le mitosi del tubo neurale di embrione di pollo trattato con colchicina: le mitosi sono bloccate in metafase e non si ha un effetto stimolante la divisione cellulare.

Da questo brevissimo esame della letteratura solamente sugli argomenti più strettamente attinenti all'azione della colchicina sulla segmentazione dell'uovo degli Anfibi e sui primi stadi embrionali di questi e di altri Vertebrati ed Invertebrati risulta come fatto generale la possibilità che ha la colchicina di bloccare l'uovo in segmentazione, di solito in metafase, lasciandolo vitale per un certo tempo. L'azione cariotropa si esplica attraverso modificazioni del nucleo che giungono fino alla sua distruzione.

Le uova di *Bufo vulgaris*, sulle quali ho sperimentato, sono state deposte in laboratorio; private con forbicette dalla ganga gelatinosa (ad eccezione che nella esperienza N. 5) sono state poste ancora insegmentate in colchicina (Sandoz) portata in acqua di fonte alle concentrazioni: 1/3.000–1/5.000–1/10.000–1/15.000–1/30.000–1/50.000.

Ho potuto confermare (Sentein) che l'inibizione della segmentazione e dello sviluppo delle uova trattate con colchicina è, in linea generale, proporzionale alla concentrazione usata.

Le concentrazioni 1/3.000–1/5.000 permettono la formazione dei primi solchi di segmentazione portando ad una morula di 8–32 blastomeri, poi i solchi cominciano a regredire ed i blastomeri per un fenomeno di coalescenza si rifondono tra di loro. Ho potuto seguire al microscopio in « vivo » questo fenomeno che suggerisce si debba verificare in queste uova (come è stato visto in quelle di *Arbacia*: (Beams e Evans, loc. cit.) un abbassamento della viscosità e a questo scopo sono in corso esperienze in collaborazione con E. Szakacs interno in questo Istituto.

Nelle uova 1/10.000–1/15.000 si arriva alla formazione di una morula-blastula nella quale i solchi intercellulari cominciano a cancellarsi. Si hanno così delle blastule composte solamente di pochi blastomeri i nuclei dei quali o si distruggono o si presentano picnotici. Alcuni blastomeri si presentano polinucleati, questo probabilmente in dipendenza del fatto che più blastomeri si sono fusi insieme costituendo un unico elemento citoplasmatico con due o tre nuclei. In linea di massima le uova trattate con queste concentrazioni di colchicina non gastrulano.

Le uova trattate con la concentrazione di 1/30.000 mostrano delle anomalie nella gastrulazione come la mancata chiusura del blastoporo.

Le uova trattate con colchicina alla concentrazione 1/50.000 si sviluppano dando luogo a embrioni con malformazioni e arresti di sviluppo simili a quelli descritti da Wolski e da Colombo.

I reperti della indagine citologica delle uova trattate alle varie concentrazioni saranno oggetto di descrizione a parte.

(16) T. Woodard e S. Estes, « Anat. Rec. », *40*, 51 (1944).

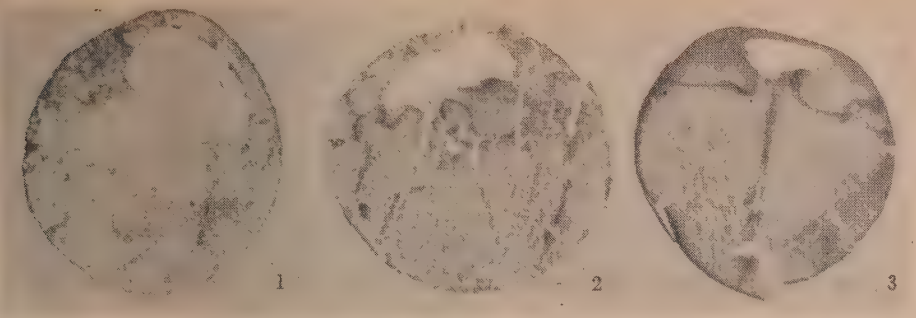


Fig. 1. – Microfotografia di blastula di *Bufo vulgaris* controllo.
Fig. 2. – Microfotografia di blastula di *Bufo vulgaris* sviluppatasi in colchicina alla concentrazione di 1/5.000.
Fig. 3. – Microfotografia di blastula di *Bufo vulgaris* sviluppatasi in colchicina alla concentrazione di 1/1.000. Da notarsi come siano scomparsi quasi tutti i limiti cellulari. I nuclei si sono quasi tutti distrutti.

Per determinare l'assunzione di O_2 ho impiegato un microrespirometro Stefanelli con camere a bordo smerigliato [17] sottoponendo a misura manometrica tre uova alla volta e facendo per ogni lotto di uova controllo o colchicinizzate alle varie concentrazioni non meno di cinque determinazioni della durata di cinque minuti primi ciascuna. I valori che sono appresso riportati sono la media delle determinazioni eseguite su ciascun lotto di tre uova ed hanno il valore di μl di ossigeno assunto da tre uova in cinque minuti, alle temperature indicate in ogni serie di esperienze; i valori stessi sono riportati a 0° C. e 760 mm. Hg. Le uova da sottoporre a misura manometrica sono state scelte al microscopio binoculare per controllarne lo stadio di sviluppo e le dimensioni identiche. Riporto dai protocolli alcuni dati riguardanti cinque serie di esperienze.

Esperienza N. 1.

13 gennaio 1948, ore 10.00.

Uova insegmentate poste in colchicina 1/5.000–1/10.000–1/30.000–1/50.000. Ore 17.30: tutte le uova a 4 blastomeri.

15 gennaio 1948, ore 16.00.

I controlli sono all'inizio della gastrulazione. Uova 1/30.000 e 1/50.000 allo stesso stadio dei controlli senza evidenti differenze. Uova 1/10.000 hanno l'aspetto di morula blastula con blastomeri irregolari dei quali alcuni grandi altri piccoli. Uova 1/5.000: pochi blastomeri di forma irregolare, il polo vegetativo appare scarsissimamente segmentato.

(17) Per le caratteristiche costruttive e di impiego dell'apparecchio vedi la mia rivista sintetica sui metodi microrespirometrici: E. URBANI, « Ric. Scient. e Ricostr. », (1947).

Assunzione di ossigeno il 15 gennaio agli stadi descritti.

Controlli		μl	0,02365
Colchicina	1/50.000	μl	0,02421
Colchicina	1/30.000	μl	0,02221
Colchicina	1/10.000	μl	0,01581
Colchicina	1/ 5.000	μl	0,00798

In nessuna delle uova colchicinizzate vi sono segni visibili di citolisi o necrosi.

Temperatura per la durata dell'esperimento 14° C. ± 1° C.

Esperienza N. 2.

17 gennaio 1948, ore 8.00.

Uova insegmentate poste in colchicina 1/5.000–1/10.000–1/30.000–1/50.000.

Ore 17,30 tutte le uova a 16 blastomeri.

18 gennaio 1948, ore 8.00.

I controlli sono allo stadio di blastula. Uova 1/50.000 uguali ai controlli. Uova 1/30.000 presentano qualche irregolarità nella segmentazione del polo vegetativo. Uova 1/10.000: si notano pochi micromeri turgidi al polo animale, in zona equatoriale l'uovo diviene più liscio e i limiti intercellulari sono appena marcati, al polo vegetativo sono evidenti solo i due solchi meridiani. Uova 1/5.000: sono rimasti pochi solchi di segmentazione, in alcune zone dell'uovo questi sono completamente scomparsi e la superficie appare liscia, al polo vegetativo sono evidenti i due solchi meridiani.

Assunzione di ossigeno il 18 gennaio agli stadi descritti.

Controlli I		μl	0.02454
Controlli II		μl	0,02423
Colchicina	1/50.000	μl	0.02455
Colchicina	1/30.000	μl	0,02181
Colchicina	1/10.000	μl	0.01773
Colchicina	1/ 5.000	μl	0.01657

In nessuna delle uova colchicinizzate vi sono segni visibili di citolisi o necrosi.

Temperatura per la durata dell'esperimento 16° C ± 1° C.

Esperienza N. 3.

31 gennaio 1948, ore 8.30.

Uova insegmentate poste in colchicina 1/5.000–1/.15000–1/30.000–1/50.000.

Alle ore 15.00 tutte le uova allo stadio di giovane morula (32 blastomeri circa). Non vi sono evidenti differenze tra le uova colchicinizzate ed i controlli. Alle ore 17,00 circa si è iniziata la fusione di blastomeri delle uova colchicinizzate 1/5.000, fusione che si è potuta seguire in vivo al microscopio.

Assunzione di ossigeno il 31 gennaio agli stadi descritti.

Controlli	μl	0,03504
Colchicinizzate 1/15.000	μl	0,03581
Colchicinizzate 1/ 5.000	μl	0,02712

1° febbraio 1948, ore 16.00.

Controlli a blastula. Uova 1/50.000 presentano lo stesso aspetto dei controlli e così le uova 1/30.000 e 1/15.000. Uova 1/5.000: sono scomparsi quasi completamente i limiti cellulari.

Assunzione di ossigeno il 1° febbraio agli stati descritti

Controllo I	μl	0,03515
Controlli II	μl	0,03800
Colchicinizzate 1/50.000	μl	0,03718
Colchicinizzate 1/30.000	μl	0,04429
Colchicinizzate 1/15.000	μl	0,03654
Colchicinizzate 1/ 5.000	μl	0,02763

In nessuna delle uova colchicinizzate vi sono segni visibili di citolisi o necrosi.

Temperatura per la durata dell'esperimento 17° C ± 0,5° C.

Esperimento N. 4.

1° febbraio 1948, ore 9.15.

Uova insegmentate poste in colchicina 1/3.000–1/5.000–1/15.000.

Ore 16,15 tutte le uova a 4 blastomeri senza apparenti differenze tra i controlli e le colchicinizzate.

Assunzione di ossigeno il 1° febbraio agli stadi descritti.

Controlli I.	μl	0,03235
Controlli II	μl	0,03397
Colchicinizzate 1/ 5.000	μl	0,03069
Colchicinizzate 1/ 3.000	μl	0,02952

Dopo la determinazione manometrica (ore 17.25) nelle uova colchicinizzate 1/3.000 e sottoposte a misura della respirazione i solchi intercellulari appaiono leggerissimi e in alcuni punti appena disegnati. Nelle uova colchicinizzate 1/5.000 i solchi intercellulari in alcuni punti sono leggeri in altri più marcati.

2 febbraio 1948, ore 13.00.

Controlli allo stadio di blastula. Uova 1/15.000: blastule con qualche irregolarità nella forma e nelle dimensioni dei blastomeri. Uova 1/5.000 i solchi intercellulari si sono quasi completamente cancellati al polo animale, il polo vegetativo è rappresentato da grossi e irregolari macromeri. Uova 1/3.000: presentano lo stesso aspetto delle uova 1/5.000 senza differenze di rilievo.

Assunzione di ossigeno il 2 febbraio allo stadio descritto.

Controlli		μl	0,03677
Colchicinizzate	1/15.000	μl	0,03271
Colchicinizzate	1/ 5.000	μl	0,02761
Colchicinizzate	1/ 3.000	μl	0,02555

In nessuna delle uova colchicinizzate vi sono segni di citolisi o necrosi.
Temperatura per la durata dell'esperimento 16° C ± 0,5° C.

Esperienza N. 5.

2 febbraio 1948, ore 10.00.
Uova insegmentate poste in colchicina 1/5.000–1/15.000–1/30.000–1/50.000.
Ore 17.00; tutte le uova a 8 blastomeri.
3 febbraio, ore 11.00
Controlli a blastula. Uova 1/50.000 e 1/30.000 apparentemente eguali ai controlli. Uova 1/15.000: presentano delle irregolarità nelle dimensioni dei blastomeri e nella profondità dei limiti intercellulari.
Uova 1/5.000: presentano zone liscie derivanti da fusioni di blastomeri e zone con tracce di segmentazione. La fusione dei blastomeri non è accentuata forse perchè le uova sono state poste in colchicina con la gelatina e l'alcaloide non è penetrato bene.
Assunzione di ossigeno il 3 febbraio agli stadi descritti.

Controlli		μl	0,03610
Colchicinizzate	1/15.000	μl	0,02760
Colchicinizzate	1/5.000 I	μl	0,02565
Colchicinizzate	1/5.000 II	μl	0,02450

3 febbraio 1948, ore 18.00.
Controlli all'inizio della gastrulazione. Uova 1/50.000: stesso stadio dei controlli. Uova 1/30.000: sta cominciando la gastrulazione.
Assunzione di ossigeno il 3 febbraio agli stadi descritti.

Controlli		μl	0,04012
Colchicinizzate	1/50.000	μl	0,03970
Colchicinizzate	1/30.000	μl	0,04130

In nessuna delle uova colchicinizzate vi sono segni di citolisi o necrosi.
Temperatura per la durata dell'esperimento 17° C. ± 0,5° C.
Ai risultati di queste cinque esperienze sono da aggiungere i risultati da me ottenuti nel 1947 e che già ho riportato nel citato lavoro.
La media delle determinazioni eseguite su gruppi di dieci uova per tempi di dieci minuti primi (l'apparecchio usato allora era di sensibilità inferiore a quello impiegato quest'anno) ha dato i seguenti valori.
Ricordo, come già ho avuto occasione di dire a suo tempo, che i valori stessi hanno un carattere solamente comparativo e non assoluto.

Controlli: stadio di blastula. Assunzione di O_2 . . . μl 0,0112
Uova colchicinizzate 1/5.000: aspetto di morula-blastula con blastomeri di diversa grandezza al polo animale, al polo vegetativo sono presenti pochi macromeri. Assunzione di O_2 . . . . . μl 0,0095
Uova colchicinizzate 1/1.000: solchi di segmentazione quasi completamente cancellati. Assunzione di O_2 . μl 0,0066

Le uova furono poste insegmentate in colchicina il 24 febbraio 1947 alle ore 10.00 e l'assunzione di ossigeno fu determinata il 25 febbraio 1947 alle ore 14.00.

Temperatura per la durata della esperienza 14° C ± 1° C.

I dati riportati si intendono ridotti a 0° C e 760 mm Hg.

Come si vede i risultati ottenuti nel 1948 per concentrazioni di colchicina forti confermano pienamente quelli ottenuti nel 1947.

A conclusione della esposizione dei risultati ottenuti mi si permetta qualche breve considerazione. Le esperienze compiute mostrano come nelle uova di *Bufo vulgaris* bloccate nella segmentazione per mezzo della colchicina alle concentrazioni di 1/1.000, 1/3.000, 1/5.000, 1/10.000. 1/15.000 il consumo di ossigeno sia inferiore ai controlli.

La percentuale di diminuzione della respirazione è in certo qual modo proporzionale alla concentrazione di colchicina usata, per forti concentrazioni la diminuzione è forte, mentre è più debole per le deboli concentrazioni. A proposito della esperienza N° 4 si nota una differenza non forte tra le uova a 4 blastomeri di controllo e quelle colchicinizzate 1/5.000 e 1/3.000. Bisogna tener presente che le uova della esperienza in questione hanno subito la misurazione manometrica quando appena si rendevano visibili gli effetti della colchicina sul cancellamento dei limiti intercellulari e che la colchicina aveva agito per poco tempo sulle uova in esperimento. L'esperienza stessa mostra di che ordine di grandezza possono essere le depressioni ossidative dell'uovo in segmentazione sottoposto all'azione iniziale dell'alcaloide.

Per ciò che riguarda l'assunzione di ossigeno di uova trattate con colchicina 1/30.000 e 1/50.000 la esperienza N° 1 mostra valori rispettivamente leggermente inferiori e superiori ai controlli, l'esperienza N° 2 valori inferiori e praticamente eguali ai controlli, l'esperienza N° 3 valori insolitamente superiori e praticamente eguali ai controlli, l'esperienza N° 5 valori leggermente superiori e leggermente inferiori ai controlli. Penso che questi dati, i soli di cui ora io sia in possesso non abbiano l'autorità per fare attribuire alle uova trattate con colchicina alle concentrazioni 1/30.000 e 1.50.000 un consumo di ossigeno nettamente superiore ai controlli. L'unico valore insolitamente alto è quello delle uova colchicinizzate 1/30.000 della esperienza N° 3 che non ha avuto conferma.

Posso perciò concludere che nelle uova trattate con colchicina 1/30.000 e 1/50.000 l'assunzione di ossigeno è praticamente eguale ai controlli o se è superiore lo è di un ordine di grandezza tale da non poter essere rilevata

con sicurezza dall'apparecchio, da me usato, che pure è di altissima sensibilità.

Per ciò che riguarda i dati negativi ottenuti da Wolski sulla respirazione di embrioni di Anfibi trattati con colchicina essi, a detta dello stesso autore, meravigliano altamente e se escludiamo errori sperimentali rimane molto difficile poter spiegare come alterazioni morfogenetiche e arresti di sviluppo notevoli del tipo di quelli descritti nel citato lavoro non si riflettano affatto sulla entità degli scambi gassosi.

Dato il carattere preliminare di questa mia Nota e dato sopratutto che l'assunzione di ossigeno negli stadi considerati da Wolsky non è stata da me presa in esame, ritengo non sia questo il momento per una critica dei suddetti risultati.

Biologia. — *La vitamina C durante la vita embrionale di «Rana esculenta»* (*). Nota di L. URBANI-MISTRUZZI e A. CANDUCCI-PITONI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Oggetto della presente Nota è l'esposizione dei dati delle determinazioni quantitative dell'acido ascorbico nell'uovo e nell'embrione di *Rana esculenta*. L'acido ascorbico ha, come è noto una grande importanza nelle catalisi di ossido–riduzione e sembra che eserciti un'azione protettrice sulle sintesi delle strutture cellulari negli organismi (Tonutti 1939) (1). Inoltre la sua localizzazione in seno alle cellule e le variazioni di disposizione in rapporto ai vari tessuti fa pensare che la vitamina C abbia un ruolo importante nell'attività metabolica delle cellule. Ci è sembrato quindi particolarmente interessante indagare il suo comportamento nell'organismo nel corso dello sviluppo. La presente ricerca rientra perciò nel campo della fisiologia embrionale in rapporto alle varie fasi del differenziamento. Riscontrare una sintesi di una sostanza o una sua variazione quantitativa in rapporto ad un dato momento biologico può essere molto utile per tentare una spiegazione dei fenomeni concomitanti ed eventualmente della funzione della sostanza in questione.

I dati bibliografici sull'argomento sono scarsi. Negli Intervertebrati Ries (1937) (2) con il metodo argentico di Giroud–Leblond ha studiato la localizzazione della vitamina C. Questo Autore ha riscontrato una distribuzione caratteristica nell'uovo di *Aplisia* e una netta limitazione della reazione ad una ben delineata genealogia cellulare. In *Pleurobranchaea* invece,

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1948.

(1) G. TONUTTI, *Ueber die Ascorbinsaure in der Zelle und ihre Bedeutung für die Zelltätigkeit–Zeit.* « Vitaminforschung », 9, pp. 349–364 (1939).

(2) E. RIES, *Die Verteilung von Vitamin C, Glutathion, Benzidinperoxidase, Phenolase ecc. waehrend der fruehen Embryonalentwicklung verschiedenen wirbellosen Tiere.* « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », XVI, p. 363 (1937).

non ha osservato alcuna reazione. Questo risultato è un po' sconcertante in quanto *Pleurobranchaea* e *Aplisia* sono Molluschi molto vicini sistematicamente e quindi si dovrebbe supporre un comportamento analogo di una sostanza, quale la vitamina C, che si pensa avere tanta importanza nei processi sintetici differenziativi particolari. Il valore delle ricerche di Ries su *Aplisia* viene infirmato dalla dubbia specificità della reazione. Determinazioni collaterali quantitative avrebbero in questo caso portato un grande aiuto.

Negli Anfibi (*Rana temporaria*) Suomalainen adoperando il metodo di Fujita e Ebihara (1939) (3) ha riscontrato una sintesi di vitamina C a partire dall'uovo insegmentato, che ne sarebbe privo, allo stadio di branchie esterne ed in seguito una diminuzione fino alla metamorfosi. Suomalainen ha voluto inoltre indagare da quali zuccheri eventualmente questa sintesi abbia inizio, ma l'aggiunta di glucosio, mannosio e ribosio non ha provocato nessun aumento del contenuto vitaminico delle larve allevate nelle soluzioni di questi zuccheri. Sempre secondo le ricerche si questo autore l'aggiunta di vitamina C all'acqua di allevamento delle larve non produce egualmente nessun aumento di tale sostanza in esse, mentre l'acido ascorbico viene in certo modo stabilizzato dalle larve stesse per cui Suomalainen pensa che i girini siano capaci di emettere una sostanza stabilizzante la vitamina C in soluzione acquosa. Sembra, e ciò in contrasto con le ricerche di Banerjiees (1938) (4), che l'acido ascorbico favorisca l'accrescimento delle larve.

Molte ricerche riguardano invece l'uovo di pollo il quale pure presenta poteri sintetici. Martini e Bonsignore (1934) (5) col metodo al bleu di metilene Ray (1934) con quello al 2–6 diclorofenolondofenolo, Suomalainen (1939) (6) con il reagente di Folin, hanno dimostrato una sintesi a partire dal quarto giorno di incubazione fino al 12° e poi una diminuizione sino al 15° e in seguito valori costanti. Per spiegare tale comportamento Martini e Bonsignore hanno emesso l'ipotesi che l'inizio della formazione della vitamina C coincida con il costituirsi di un dato organo (surrenali) che, una volta raggiunto il suo sviluppo anatomico e funzionale produce acido ascorbico a velocità costante; allora si stabilirebbe un equilibrio tra la produzione di vitamina C e l'accrescimento ponderale dell'embrione, senonchè questo al 12° giorno aumenterebbe molto più rapidamente, mentre la produzione di acido ascorbico resta costante per cui la concentrazione cadrebbe fino a che non si stabilisce un nuovo equilibrio. I valori ottenuti da Ray (7) sono un po' più alti ma la

(3) P. SUOMALAINEN, *The ability of the tadpole to stabilize ascorbic acid (vitamin C) and the role of ascorbic acid in the development of the frog.* « Ac. Sci. Fennicae », ser. A, vol. 53 (1939).

(4) BANERJIEES, citato da SUOMALAINEN, loc. cit. (1938).

(5) MARTINI e BONSIGNORE, *L'acido ascorbico nell'embrione di pollo.* « Biochimica e Ter. Sper. », *21*, p. 169 (1934).

(6) P. SUOMALAINEN, *Syntesis of ascorbic acid (vitamin C) in the egg of hen during hatching* « Ann. Acad. Sci. Fennicae », *58*, p. 8 (1939).

(7) S. RAY, *A note on the presence of vitamin C in the chick embryo.* « Bioch. J. », *28*, pp. 189–191. (1934).

curva presenta lo stesso andamento. Suomalainen ha notato un aumento nelle prime due settimane e poi una rapida diminuizione.

Sembra che gli embrioni dei mammiferi abbiano la capacità di sintetizzare la vitamina C e di proteggere la madre da una dieta scorbutigena (Mouriquand e Schoen (1933) [8].

Poichè Suomalainen, come già prima detto, ha adoperato per la determinazione della vitamina C negli embrioni di Anfibi il metodo di Fujita ed Ebihara con la riduzione del reagente di Folin, esaminata a mezzo di un fotometro, a noi è sembrato di interesse eseguire una serie di esperienze sugli embrioni di *Rana esculenta* con un metodo diverso.

È noto che a volte l'impiego di diversi metodi microchimici per determinare la stessa sostanza può portare a risultati non perfettamente concordanti ed inoltre la comparazione dei risultati stessi può chiarire e precisare alcuni aspetti del problema in esame.

In un primo tempo abbiamo impiegato il metodo Martini e Bonsignore che abbiamo però dovuto abbandonare perchè il bleu di metilene ridotto dall'acido ascorbico si riossidava troppo rapidamente per permettere un adeguato confronto con il controllo.

Abbiamo adoperato allora il metodo di Tillmans già impiegato con successo da Glick e Biskind nei microdosaggi, opportunamente modificato da Emmerie e Van Eekelen allo scopo di eliminare le sostanze che potrebbero turbare la reazione, in particolare le sostanze solforate, cisteina, glutatione ecc. Naturalmente abbiamo fatto vari tentativi per applicare il metodo al nostro materiale che contiene scarsa quantità di vitamina e che non può essere adoperato in quantità troppo grandi per ragioni che esporremo in seguito. La soluzione di 2–6 diclorofenolo–indofenolo adoperata era di 1/3000. Abbiamo notato che fra lotto e lotto di uova c'è una sensibile differenza in contenuto di vitamina C e per questa ragione abbiamo preferito suddividere ogni lotto in gruppi di 25 uova ciascuno da usarsi per gli stadi successivi dello sviluppo e di eseguire le determinazioni su due gruppi di lotti differenti che si trovavano allo stesso stadio di sviluppo. Le determinazioni sono state perciò eseguite su 50 uova alla volta ed il risultato è stato poi riportato ad un singolo uovo od embrione. Le uova sono state, appena giunte in laboratorio, divise in gruppi e allevate in cristallizzatori immersi in acqua circolante in modo da mantenere la temperatura di allevamento piuttosto costante ed evitare contemporaneamente uno sviluppo troppo rapido quale si effettua nella stagione estiva (giugno–agosto). Le uova per ogni determinazione, verificate che si trovassero tutte allo stesso stadio mediante esame microscopico, dopo scapsulamento dalla gelatina che non contiene acido ascorbico e che impedisce una accurata triturazione, sono state poste in un mortaio di vetro e pestate con sabbia di quarzo digerita e lavata, con tracce di acido triclo-

(8) G. Moriquand e Schoen, *Influence protectrice de la gestation sur la carence en vitamin C.* «C. R. Ac. Sc.», *197*, p. 203 (1933).

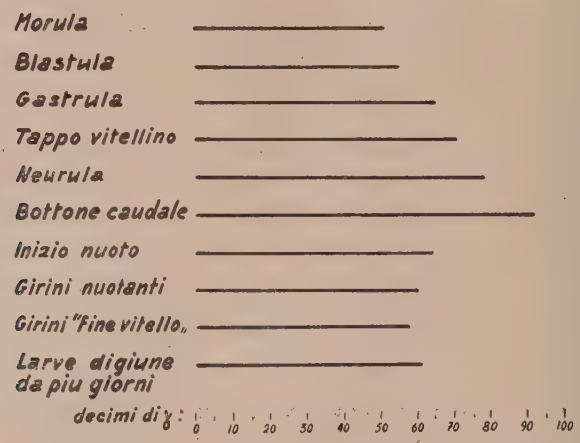
racetico 5 %. Da questa poltiglia con varie aggiunte di acido tricloracetico (in tutto 10 cc) si è fatta l'estrazione completa e poi l'estratto è stato centrifugato. Dopo centrifugazione l'estratto limpido è stato decantato e neutralizzato con $CaCO_3$ in polvere finchè la reazione non risultava neutra alla cartina al rosso congo e ancora leggermente acida al tornasole. Si aggiungeva in seguito acetato mercurico al 20 % (0,5 cc) che precipita le proteine e le sostanze solforate. L'estratto limpido separato per centrifugazione è stato sottoposto a una corrente di H_2S proveniente da un Kipp e passata attraverso una boccia di lavaggio per 10 minuti per ridurre tutto l'acido ascorbico che era stato ossidato dal sale di mercurio. Dopo filtrazione è stato saturato ancora con H_2S e messo in ghiacciaia al buio fino al giorno successivo. La soluzione di 2–6 diclorofenolo indofenolo 1:3000 è stata titolata con una soluzione di acido ascorbico puro (0,1 %) controllata con una soluzione di iodio 1:100 N. Il titolo del reattivo conservato al buio ed in ghiacciaia è stato registrato ogni 5 giorni ed in una giornata abbiamo cercato di eseguire tutta una serie di determinazione di stadi diversi. Prima della titolazione l'estratto è stato sottoposto ad una corrente di CO_2 (sviluppata da un Kipp con annessa boccia di purificazione) fino a che il controllo con la cartina all'acetato di Pb non indicava assoluta scomparsa dell'idrogeno solforato. All'estratto sono stati aggiunti altri 2 cc di acido tricloracetico 5 % che stabilizza l'acido ascorbico e crea il grado di acidità che sembra rendere più specifica la reazione. Con una microburetta si è fatto cadere il reattivo goccia a goccia fino ad avere una colorazione rosa persistente per 30″. Con l'estratto di ogni singolo gruppo sono state eseguite sempre 2 determinazioni e si è fatta la media dei valori ottenuti. Sono state eseguite tre serie complete di determinazioni e varie determinazioni ai vari stadi, di uova non appartenenti allo stesso lotto.

Riferendo i risultati ad un singolo uovo si nota una progressiva sintesi fino allo stadio di bottone codale e poi una diminuzione che giunge all'inizio del nuoto e poi valori quasi costanti fino al termine del periodo vitellino:

Morula	0,496 γ
Blastula	0,548 »
Gastrula (inizio).	0,644 »
Tappo vitellino	0,686 »
Neurula.	0,787 »
Bottone codale	0,914 »
Prime contrazioni . . .	0,689 »
Inizio nuoto.	0,645 »
Fine vitello	0,593 »

Questi valori sono riportati nel grafico allegato.

Acido ascorbico: valore medio riferito ad un uovo od embrione nei seguenti stadi:



I risultati sopra riportati rappresentano la media dei valori ottenuti nelle tre serie complete di determinazioni. Essi confermano i dati di Suomalainen su *Rana temporaria*, (ottenuti con un altro metodo); sebbene questo autore abbia riportato i valori ottenuti al peso del materiale esaminato mentre noi li abbiamo riferiti ad ogni singolo uovo od embrione, l'andamento della curva è lo stesso. Troppi pochi elementi possediamo per spiegare questa curva; mancano dati di riferimento per stabilire da quali sostanze ha avuto inizio la sintesi di acido ascorbico. Nè c'è rapporto netto con le curve respiratorie (Stefanelli) [9] e della catalasi (Friggeri) [10] e del glutatione (Brachet) [11] ottenute sugli Anuri durante il periodo embrionale. Si può pensare che l'acido ascorbico possa influire sulla metabolizzazione del vitello e sulla sua fluidificazione stimolando la proteolisi e la lipolisi. Secondo alcuni autori esso esercita un'azione stimolante sulla moltiplicazione cellulare. Secondo Tonutti (1939 loc. cit.) ed altri AA. la vitamina C sarebbe accumulata e quindi utilizzata nelle cellule che debbono compiere delle sintesi (formazione di ormoni, di fermenti, di fibrille, ecc.); si potrebbe pensare che dopo lo stadio di bottone codale l'acido ascorbico venga consumato dalle cellule in via di differenziamento; quindi la sua caduta in questo momento ed il suo mantenersi costante ad un livello più basso fino alla fine del vitello (termine delle nostre esperienze) potrebbe interpretarsi in un primo tempo come conseguenza dell'inizio del differenziamento istologico e poi come un rapporto

(9) A. Stefanelli, *Il metabolismo dell'uovo e dell'embrione studiato negli Anfibi anuri. L'assunzione di ossigeno.* « Arch. Sci. Biol. », *24* (1938).

(10) A. Friggeri, *La catalasi nello sviluppo embrionale di « Bufo vulgaris »*. « Boll. Soc. it. Biol. sper. » (1938).

(11) J. Brachet, *Embryologie chimique*, p. 399 (1944).

di equilibrio fra sua sintesi e suo consumo da parte delle cellule che debbono fabbricare i costituenti caratteristici del tessuto cui appartengono. Per chiarire questo punto sono in corso esperienze quantitative su parti isolate di embrioni in modo da vedere se esiste un gradiente di quantità di vitamina C e in quali tessuti essa si presenti in maggior concentrazione.

D'altra parte considerando che la caduta di acido ascorbico avviene alle prime contrazioni e si accentua all'inizio del nuoto, mantenendosi quindi costante, si potrebbe trovare una relazione tra i due fatti anche in considerazione delle esperienze di Ratsimamanga (1937) [12], secondo il quale durante il lavoro muscolare si avrebbe un maggior consumo di vitamina C.

Da ricerche eseguite da una di noi (Urbani-Mistruzzi) sulla localizzazione istochimica dell'acido ascorbico uova di *Rana esculenta* e nell'embrione si constata un certo parallelismo tra i dati quantitativi e quelli istochimici.

Queste ricerche non sono state ancora pubblicate perchè i preparati istologici eseguiti con il metodo di Giroud-Leblond al nitrato di argento acidificato, presentano evidenti analogie, per quanto riguarda la distribuzione dei granuli di argento ridotto nelle varie parti dell'uovo e dell'embrione con la distribuzione del pigmento in seguito alla segmentazione. Sorgeva quindi il dubbio sulla specificità della reazione adoperata, la quale d'altra parte è presentata anche dalle melanine. Data la gran quantità di melanine presenti nel materiale adoperato è naturale che di fronte ai reperti si dovesse rimanere perplessi se ascrivere la reazione all'acido ascorbico o piuttosto alle melanine e se ad ambedue, in che misura a ciascuno. Per chiarire questo punto sono state eseguite varie ricerche comparative sia su altre specie contenenti minor quantità o affatto melanine sia con modelli. I risultati di queste esperienze saranno oggetto di una prossima pubblicazione.

Ad ogni modo (a prescindere dalla sua specificità) la reazione di Giroud-Leblond presenta la seguente localizzazione nell'uovo di Rana: l'uovo appena deposto contiene alcune granulazioni argentiche mentre le determinazioni quantitative di Suomalainen non rivelano una reazione positiva nell'uovo a tale stadio. Successivamente si notano grosse granulazioni particolarmente nel polo animale e poi nel labbro dorsale del blastoporo; poi nelle creste neurali e nel tubo neurale; quando l'embrione è allo stadio di bottone codale nell'abbozzo della coda in particolare. Le granulazioni negli stadi successivi diminuiscono di grandezza e sono più dispersi. Quindi si potrebbe pensare che effettivamente l'acido ascorbico venga consumato nei tessuti che sono a più alto differenziamento e che si trovi in maggior quantità nei blastemi proliferativi.

Questa ricerca sulla distribuzione istologica dell'acido ascorbico e sulle sue variazioni quantitative durante lo sviluppo continua in rapporto a condizioni sperimentali.

(12) R. RATSIMAMANGA, *Rapports de l'acide ascorbique et l'activité musculaire.* «C. R. Soc. Biol.», *126*, 1134 (1937).

Conclusione. – Abbiamo determinato con il metodo di Tillmans il contenuto in acido ascorbico delle uova e degli embrioni di *Rana esculenta* in vari stadi di sviluppo. Abbiamo notato una evidente sintesi di tale sostanza fino allo stadio di bottone codale: i valori in seguito, dopo una brusca caduta, si sono mantenuti quasi costanti fino al termine del periodo vitellino. Questi risultati non hanno rapporti chiari nè con quelli della assunzione di ossigeno, nè con quelli della catalasi e del glutatione ottenuti sugli Anfibi, è quindi difficile per il momento emettere una ipotesi sulla funzione della vitamina C nella vita embrionale degli Anfibi.

Fisiologia. – *Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo.* – A) *La reazione orto–clinostatica nell'adulto normale*(*). Nota II di C. Rizzo, presentata(**) dal Socio G. Cotronei.

Le peculiarità e le differenze esistenti fra i vari tipi neurovegetativi dei soggetti normali emergono già in maniera sufficiente dallo studio dei grafici tracciati nel modo descritto nella Nota precedente(1). Però esse si possono cogliere con assai maggiore evidenza mediante un artificio da me escogitato e che ora illustrerò.

Sopra un comune foglio quadrettato si tracciano le solite coordinate cartesiane: sull'ordinata si riporta – a partire da 20 – il numero dei battiti cardiaci (quattro per quadretto), mentre sull'ascissa si riportano (intervallandoli di 3 in 3 quadretti) i « valori medi » delle cinque fasi della prova Pfister precedentemente descritta, calcolate nel seguente modo:

1 (= C^1): media – riferita al minuto primo – dei 12 conteggi fatti durante il primo *clinostatismo*. (Questo numero si ottiene dividendo per 3 la somma delle pulsazioni dei 12 conteggi).

2 (= M^1): numero delle pulsazioni registrate nei primi 15 secondi dell'ortostatismo (moltiplicato per 4, dovendolo riferire al minuto primo). Questa « fase di *movimento* » abbraccia, dunque, il tempo impiegato dal soggetto a rizzarsi in piedi, nonchè i 10–12 secondi successivi, e comprende, pertanto, sia il movimento di passaggio dal clino– all'ortostatismo, sia l'iniziale assestamento dell'organismo nella stazione eretta.

3 (= O): media – riferita sempre al minuto primo – dei rimanenti 11 conteggi in *ortostatismo* (ottenuta moltiplicando per 4 la somma delle pulsazioni registrate in tali conteggi e dividendo poi per 11 questo prodotto(2).

(*) Lavoro eseguito nella Clinica Neuropsichiatrica dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1948.

(1) Questi « Rendiconti », vol. IV, fasc. I, p. 104.

(2) In qualche raro caso (o perchè il movimento di passaggio dal clino– all'ortostatismo venne eseguito con eccessiva lentezza o per altre cause che potrebbero, forse, consistere in una latente insufficienza circolatoria) l'accelerazione che si suole osservare entro

4 (= M^2): pulsazioni raccolte nei 15 secondi della fase del *movimento* di ritorno in clinostatismo (moltiplicate per 4, al fine di riportarle anch'esse al minuto primo). Anche questa fase comprende non solo i pochi secondi impiegati dal soggetto a tornare in decubito supino, ma altresì l'iniziale riassetto dell'individuo in posizione clinostatica.

5 (= C^2): media – riferita ancora al minuto primo e, quindi, ottenuta come per il n.° 3 – dei restanti 11 conteggi in *clinostatismo*.

Riunendo con una linea i cinque punti calcolati nella maniera ora descritta si ottiene quello che io denomino « grafico dei valori medi » il quale prescinde, necessariamente, dai « dentelli » e da altri particolari (rilevabili soltanto nel tracciato in esteso) che ritengo di secondaria importanza, ma pone in assai più chiara e diretta evidenza le basilari peculiarità della reazione orto-clinostatica, consistenti in: *a*) una maggiore o minore distanza del grafico, nel suo assieme, dall'ascissa (espressione, rispettivamente, di orto- o di parasimpaticotonia); *b*) l'entità della « differenziale » (che – coeteris paribus – è modesta nei parasimpaticotonici e cospicua negli ortosimpaticotonici); *c*) la presenza o la mancanza delle due « guglie » (e la loro altezza): donde, nel primo caso, una configurazione ad M del grafico, indice di parasimpaticotonia, e, nel secondo caso, una configurazione a cupola od a Λ, indici di minore o maggiore ortosimpaticotonia.

Considerando ora i « grafici dei valori medi » dei miei 100 soggetti normali, esclusivamente in base alle loro diverse configurazioni, essi si possono ripartire nei seguenti gruppi:

1° Un folto gruppo di 58 individui il cui grafico assume la forma ad M, dato che il valore sfigmico della fase ortostatica è inferiore a quello di ciascuna delle due fasi di movimento. Tale grafico è sul genere di quello rappresentato alla lettera (*a*) della Tav. I [3].

2° Un secondo gruppo, costituito da 19 soggetti nei quali il numero delle pulsazioni in ortostatismo supera quello rilevato in ciascuno dei due movimenti. Qui il grafico – di cui riproduco un esempio alla lettera (*b*) della Tav. I [4] – assume la forma ad Ω (= a cupola) od anche a Λ, a seconda della minore o maggiore altezza del punto ortostatico sui punti di movimento.

i primi 15 secondi dell'ortostatismo si verificò, invece, qualche secondo più tardi, sicchè il numero di pulsazioni raccolto nel 2° conteggio ortostatico fu uguale o maggiore di quello della fase di movimento (mentre nei conteggi successivi la frequenza sfigmica diminuì). In tali casi conviene assumere – nel còmputo dei « valori medi » – come « fase di movimento » le pulsazioni contate nei primi 30 secondi dell'ortostatismo (moltiplicando poi questo numero per 2, al fine di riferirlo al minuto primo). S'intende che, in codesti casi, il valore della « fase ortostatica » sarà dato dal numero ottenuto sommando i restanti 10 conteggi in ortostatismo, moltiplicando la somma per 4 e poi dividendo per 10 questo prodotto.

(3) Alla lettera (*a*) è riprodotto il grafico dei valori medi del soggetto « parasimpaticotonico » il cui grafico per esteso venne riportato alla lettera B della Tavola annessa alla Nota precedente.

(4) Il grafico della lettera (*b*) rappresenta i valori medi del soggetto « ortosimpaticotonico » il cui grafico per esteso fu riprodotto alla lettera C della Tavola annessa alla precedente Nota.

3° Un terzo gruppo – formato dai restanti 23 individui – nel quale ciascuno dei due movimenti di passaggio si comporta diversamente dall'altro rispetto al valore della fase ortostatica. Ed abbiamo, precisamente, che:

a) uno dei movimenti di passaggio è più alto dell'ortostatismo, mentre l'altro ha lo stesso valore sfigmico di questo o ne è di poco inferiore (donde un grafico dall'aspetto affine a quello raffigurato alla lettera (*c*) di Tav. I, che si avvicina, quindi, al grafico ad M e con quest'ultimo va accomunato nella sua espressione clinica). Ho constatato questo andamento in 12 soggetti;

b) uno dei movimenti è più basso dell'ortostatismo, mentre l'altro ha lo stesso valore dell'ortostatismo medesimo o lo supera di poco (il grafico ha, all'incirca, la forma di cui alla lettera (*d*) della Tav. I; è, quindi, analogo al grafico a cupola e si apparenta a quest'ultimo nel suo significato clinico). L'ho osservato in 6 individui;

c) il punto ortostatico ha un valore intermedio o quasi intermedio fra quello dei due movimenti. Il decidere se in questi pochi casi (5) il grafico sia di tipo orto- ovvero parasimpatico non dipenderà tanto dalla forma (specie quando, come in due dei miei casi, i valori dei movimenti sono perfettamente equidistanti dal valore del punto ortostatico) quanto dalle altre caratteristiche (distanza dall'ascissa, ecc.) ricordate in precedenza. Di questi grafici – che riproduco schematicamente alla lettera (*e*) di Tav. I – tre tendevano verso il tipo parasimpatico e due verso quello ortosimpatico.

Riepilogando, in base alla loro forma i grafici dei valori medi si raggruppano nel modo seguente:

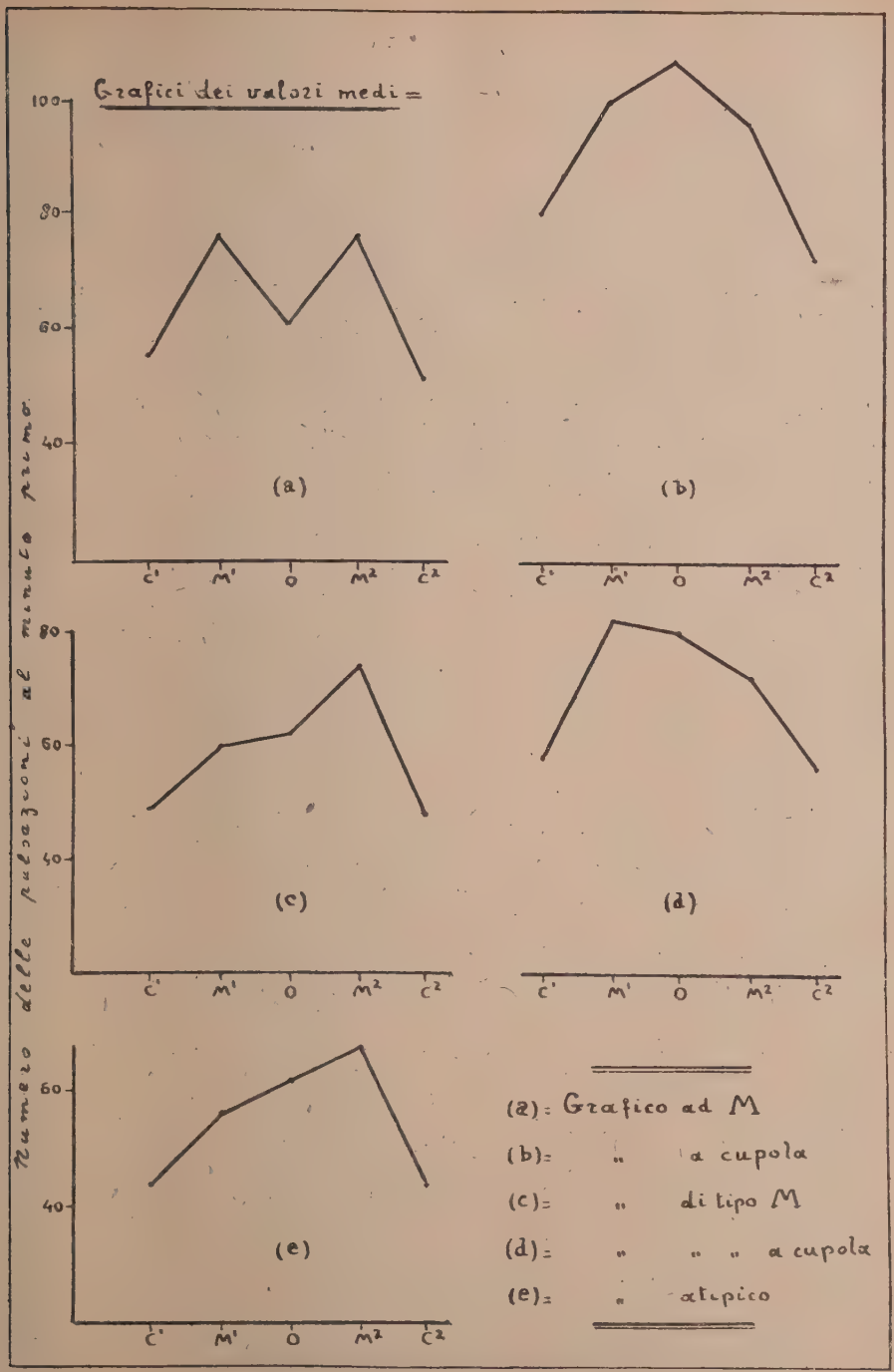
Primo raggruppamento (costituito da 70 soggetti): il grafico ha la forma di una M od è a questa affine. Si tratta d'un raggruppamento di tipo – grosso modo – parasimpatico, in cui la parasimpaticotonia è tanto maggiore quanto la M è più vicina all'ascissa ed è più pronunciata.

Secondo raggruppamento (25 individui): grafico a Λ od a cupola, donde – come ho già accennato – un grado rispettivamente maggiore o minore di ortosimpaticotonia.

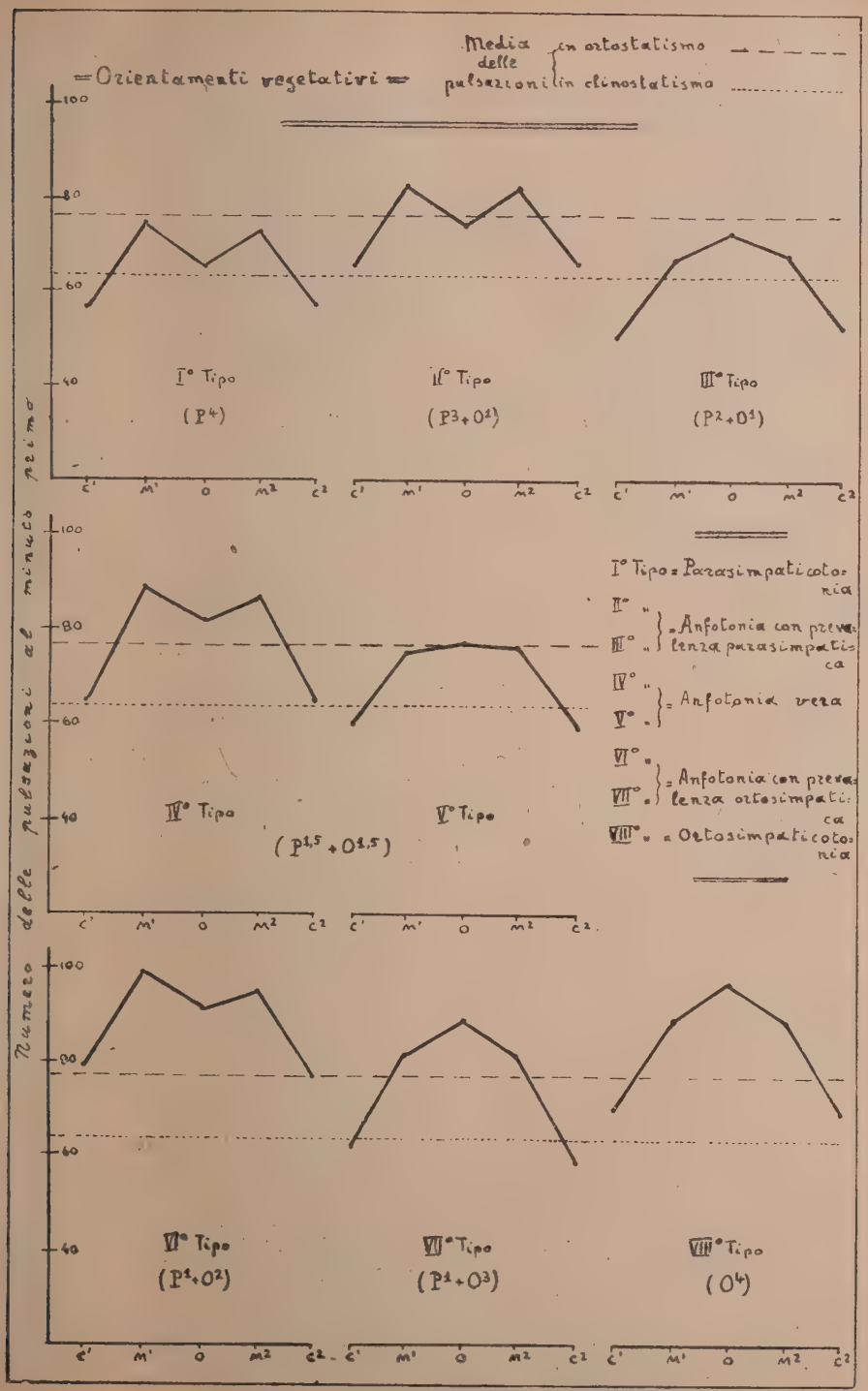
Terzo raggruppamento (5 soggetti): grafico atipico, corrispondente alla categoria 3 *c* ora descritta; caratteristiche anfotoniche.

Sempre da un punto di vista formale, i grafici dei valori medi possono essere più o meno euritmici, a seconda che i cinque punti (o fasi) che li costituiscono abbiano una disposizione simmetrica od asimmetrica. Distingueremo, così, un nucleo di 77 soggetti dal grafico *armonico* ed un rimanente nucleo di 23 soggetti (corrispondente al 3° dei gruppi dianzi riportati) in cui il grafico è *disarmonico*.

In base ad un'esperienza quasi decennale ritengo lecito asserire che la disarmonia del grafico è espressione di un certo squilibrio neuro-vegetativo, sia pure sfumato o latente come in questi miei 23 individui, i quali – sotto ogni altro aspetto – apparivano del tutto normali.



Riduzione a circa 7/10 delle dimensioni originali.



Riduzione a circa 4/5 delle dimensioni originali.

Ed ora, dopo queste necessarie premesse, inoltriamoci nello studio dei grafici dei valori medi e nella loro interpretazione.

In ciascuno di codesti grafici – indipendentemente dal loro aspetto formale, di cui si è già discorso a sufficienza – si possono cogliere tre *elementi fondamentali*: il *valore clinostatico*, il *valore ortostatico*, la *differenziale*.

Il *valore clinostatico* (dato dalla semisomma del 1° e del 5° dei cinque punti su cui si costruisce ciascun grafico) varia, nei miei 100 soggetti, da 43,5 a 97,25 pulsazioni al minuto, con una media di 63–64 pulsazioni. 14 soggetti si distaccano sensibilmente dagli altri, e 7 di essi hanno un valore clinostatico inferiore a 50, mentre 7 lo hanno superiore a 80. Orbene, dato che (giova ripeterlo) la bradicardia è espressione di parasimpaticotonia e la tachicardia è espressione di ortosimpaticotonia, ho ritenuto possibile addivenire ad una sorta di misura della tonicità vegetativa dei miei soggetti dando il simbolo « *pp* » (= accentuata parasimpaticotonia) a quei 7 il cui valore clinostatico è inferiore alle 50 pulsazioni; il simbolo « *p* » (= parasimpaticotonia) a quelli con valore clinostatico da 50 a meno di 62 pulsazioni al minuto primo; il simbolo « *po* » (= coesistenza, in misura praticamente eguale, delle componenti para– ed ortosimpaticotonica) agli individui con valore clinostatico fra 62 e 65; il simbolo « *o* » (= ortosimpaticotonia) ai soggetti il cui valore clinostatico è superiore a 65 e va fino ad 80; infine, il simbolo « *oo* » (= accentuata ortosimpaticotonia) ai rimanenti 7 individui, con valore clinostatico superiore alle 80 pulsazioni al minuto.

Il *valore ortostatico* (corrispondente al 3° dei cinque punti–base dei grafici) va da 52,5 a 109 pulsazioni al minuto primo, con una media di 77–78 pulsazioni; in 8 soggetti esso è inferiore a 62 ed in 8 è superiore a 100. Al fine, anche qui, di ottenere un apprezzamento quantitativo della tonicità neuro–vegetativa dei soggetti, ho simbolizzato con « *pp* » quelli con valore ortostatico inferiore alle 62 pulsazioni; con « *p* » quelli il cui valore ortostatico è fra 62 e meno di 76 pulsazioni; con « *po* » quelli a valore ortostatico fra 76 e 79; con « *o* » i soggetti aventi un valore ortostatico da oltre 79 pulsazioni a 100; e con « *oo* » quegli 8 il cui valore ortostatico è superiore a 100.

La *differenziale* (o differenza fra valore ortostatico e valore clinostatico) va considerata in maniera diversa secondo che il grafico abbia la forma ad M o quella a Λ, dato che nel primo caso siamo di fronte ad un soggetto esclusivamente o prevalentemente parasimpaticotonico, mentre nel secondo caso si tratta di una esclusiva o prevalente ortosimpaticotonia.

Nei 70 individui con grafico ad M la differenziale media è di poco superiore a 10, e poichè nei soggetti sfigmometricamente più parasimpaticotonici la differenziale è bassissima, mi sono ritenuto autorizzato – sempre nell'intento di misurare, in certo qual modo, la tonicità neuro–vegetativa – di assegnare il simbolo « *pp* » ai soggetti con differenziale fino a 10 e di dare il simbolo « *p* » a quelli con differenziale superiore a 10. Invece, nei 25 soggetti con grafico a Ω od a Λ la differenziale media si aggira intorno a 25, e siccome negli individui più ortosimpaticotonici la differenziale è assai elevata, ho assegnato il simbolo « *o* » a quelli in cui la differenziale stessa giungeva fino

a 25 ed il simbolo « *oo* » a quelli nei quali essa era superiore a 25. Ai 5 soggetti, infine, il cui grafico costituiva qualcosa d'intermedio fra M ed Ω (= gruppo 3 *c*) ho dato il simbolo « *po* », per significare che la loro differenziale risultava dall'associazione di un momento parasimpaticotonico ad un momento ortosimpaticotonico; ed, invero, anche il valore medio della differenziale di questi individui (alquanto superiore a 14) rappresentava un numero intermedio fra quello dato dai soggetti a differenziale di tipo parasimpatico e quello esistente nei soggetti con differenziale di tipo ortosimpatico.

Attribuendo il valore 1 a ciascuno dei simboli « *p* », « *o* », « *po* » ed il valore 2 ai simboli « *pp* », « *oo* » e sommando i tre simboli – del valore clinostatico, del valore ortostatico e della differenziale – ricavabili da ciascun grafico, ho determinato una specie di *valutazione quantitativa* dell'orientamento vegetativo dei soggetti: il che non era mai stato fatto – ch'io mi sappia – per l'addietro (5). Questa valutazione, che ha, inoltre, il pregio di un'assoluta obiettività e che si ottiene in guisa realmente fisiologica, senza alcun pericolo, senza alcuna sofferenza e senza alcun artificio, consente apprezzamenti indubbiamente più precisi sulla tonicità del S.N.V. di quanto non si fosse mai sin qui escogitato con altri metodi esplorativi. Essa permetterà d'ora innanzi di procedere – anche nella semeiotica neuro–vegetativa – a giudizi d'ordine matematico, i quali promuoveranno utili confronti e classificazioni dei soggetti in esame, proprio come auspicava il Söderbergh un ventennio addietro.

Nel quadro che segue elenco i miei 100 normali, disposti in base alle loro « formule vegetative », dai più marcatamente parasimpaticotonici agli ortosimpaticotonici più accentuati, attraverso la molteplice gamma – rispettivamente – degli anfotonici a prevalenza parasimpatica, degli anfotonici veri (in perfetto equilibrio neuro–vegetativo) e degli anfotonici con prevalenza ortosimpatica. Questo quadro costituisce anche una fedele esemplificazione pratica di quanto ho sin qui enunciato.

Se ora raggruppiamo fra loro i grafici dei valori medi aventi il medesimo « orientamento vegetativo », ponendo però anche mente – come è ovvio – allo loro configurazione, nel senso di tener distinti i grafici ad M da quelli a Λ, abbiamo 8 « Tipi grafici » che riproduco a Tav. II per fornire al lettore una chiara visione panoramica dell'andamento della reazione orto–clinostatica nei normali.

Un semplice sguardo alla Tavola ci offre la riprova che la configurazione « ad M bassa » (tipo I°) corrisponde nettamente alla parasimpaticotonia, mentre la configurazione « a Λ alta » (tipo VIII°) corrisponde all'ortosimpaticotonia. Ed è agevole altresì rilevare che il vasto raggruppamento delle anfotonie presenta, fondamentalmente, quattro diverse configurazioni: « ad M ampia » (tipo IV°) ed « a cupola ampia » (tipo VII°) – entrambe con i piedi

(5) Anche il metodo atropino–ortostatico del DANIELOPOLU vorrebbe giungere all'esatta valutazione neuro–vegetativa degli individui; ma non è così scevro da pericoli che lo si possa utilizzare largamente, vuoi sui sani, vuoi al letto dei malati; inoltre, esso è troppo artificioso perchè se ne possano tranquillamente accettare i risultati.

verso la zona clinostatica bassa e l'apice centrale in zona ortostatica alta – nonchè le configurazioni «a cupola bassa» (tipo III°) e «ad M alta» (tipo VI°). Dunque, anche l'espressione grafica dell'anfotonia mostra chiaramente la coesistenza formale di quelle componenti orto- e parasimpatiche, le quali costituiscono l'essenza quantitativa, fisiologica e clinica degli orientamenti anfotonici.

Orientamento vegetativo	Formula vegetativa (1)	Valutazione quantitativa	N. di individui	Atleti
Parasimpaticotonia	*pp–pp–pp*	P^6	1	1
	pp–pp–p	P^5	1	1
	p –pp–pp	»	6	3
	pp–p –p	P^4	4	3
	p –p –pp	»	10	2
	p –p –p	P^3	10	3
Anfotonia con prevalenza parasimpatica	*po–p –pp*	$P^{3,5} + O^{0,5}$	3	2
	p –po–p	$P^{2,5} + O^{0,5}$	1	
	po–p –p	»	1	
	pp–p – o	$P^3 + O^1$	1	1
	o–p –pp	»	5	3
	p –p – o	$P^2 + O^1$	2	
	p – o–p	»	1	
	po–po–p	»	1	
	o–po–pp	$P^{2,5} + O^{1,5}$	5	
Anfotonia vera	*p –po– o*	$P^{1,5} + O^{1,5}$	2	
	po–p – o	»	1	
	po–po–po	»	1	
	po– o–p	»	5	
	o– o–pp	$P^2 + O^2$	2	
Anfotonia con prevalenza ortosimpatica	*oo– o–pp*	$P^2 + O^3$	2	
	p – o– o	$P^1 + O^2$	2	
	po–po– o	»	1	
	o– o–p	»	8	1
	p – o–oo	$P^1 + O^3$	5	
	oo–oo–p	$P^1 + O^4$	4	
	o– o–po	$P^{0,5} + O^{2,5}$	4	
	po– o–oo	$P^{0,5} + O^{3,5}$	1	
Ortosimpaticotonia	*o– o– o*	O^3	4	
	o– o–oo	O^4	2	
	o–oo–oo	O^5	3	
	oo–oo– o	»	1	

(1) In ogni «formula vegetativa» il primo simbolo concerne il valore clinostatico, il secondo il valore ortostatico ed il terzo la differenziale.

In una Nota successiva cercheremo di spiegarci perchè nei normali esistano così disparati orientamenti vegetativi e tracceremo, da ultimo, le conclusioni di questo nostro studio.

(Per la bibliografia si rimanda alla Nota seguente).

Fisiologia. — *Effetti della combinata applicazione di stricnina e prostigmina su un centro sensitivo-motore corticale di cani non predisposti alla epilessia da eccitamenti afferenti* (*). Nota di A. ALIBRANDI, presentata (**) dal Socio C. CIACCIO.

Mie precedenti ricerche hanno messo in evidenza come la prostigmina sia capace di esaltare notevolmente nel *Bufo vulgaris* l'azione convulsivante della stricnina: dosi di prostigmina, innocue per questo animale se somministrate da sole, sono capaci di rendere convulsivanti minime dosi di stricnina dimostratesi di per sè stesse innocue nelle esperienze di controllo (1). Ho inoltre potuto mettere in evidenza un netto antagonismo tra la prostigmina e le sostanze ponogene ad effetto curarosimile (2).

Questi risultati mi indussero a saggiare gli effetti della combinata applicazione di stricnina e prostigmina su un centro corticale sensitivo-motore di cani sicuramente non predisposti alla epilessia da eccitamenti afferenti.

Cominciai pertanto ad esplorare colla tecnica di Amantea (3) il comportamento, nei riguardi dell'epilessia riflessa, di un gruppo di cani in buone condizioni di salute e di nutrizione. In questi animali venivano dapprima, dopo craniectomia ed asportazione della dura in corrispondenza della zona sigmoidea sinistra (4), identificati (a mezzo della stimolazione faradica unipolare eseguita mediante un elettrodo stigmatico di Baglioni (5)) due centri sensitivo-motori della suddetta zona corticale e precisamente i centri corrispondenti al muscolo orbicolare delle palpebre ed ai muscoli estensori delle dita dell'arto anteriore. Si cercava poi, mediante la ripetuta e localizzata stricninizzazione (eseguita a mezzo di dischetti di carta bibula di due mm di diametro) del primo di questi centri, di ottenere la insorgenza di un accesso epilettico in via riflessa. A tale scopo mentre il centro era sotto l'azione della stricnina veniva stimolata ripetutamente con stimoli meccanici, dolorifici ed elettrofaradici la zona cutanea riflessogena in connessione funzionale col suddetto centro (6); questa zona, com'è noto, comprende, quasi tutta la metà della faccia controlaterale.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della Università di Messina.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1948.

(1) ALIBRANDI, « Atti Accademia Peloritana », XLVII, 877 (1945).

(2) ALIBRANDI, « Atti Accademia Peloritana », *46*, 22 (1946).

(3) AMANTEA, « Il Policlinico » sez. med., 1920; « Pflüg. Arch. f. d. ges. Phys. », *188*, 287 (1921).

(4) Gli interventi vennero sempre eseguiti in completa assenza di anestesia e di narcosi. La breccia cranica veniva durante la seduta protetta con compresse caldo umide.

(5) BAGLIONI, « Ztschr. f. allg. Phys. », 9 (1909).

(6) AMANTEA, « Rend. Accademia Lincei », 1° semestre, vol. 24 (1915).

Si considerava come sicuramente non predisposto l'animale nel quale, ripetendo quattro volte l'applicazione della soluzione di nitrato di stricnina (all'un per cento) sul centro dell'orbicolare ad intervalli di tre minuti primi e stimolando ripetutamente nel contempo la relativa zona cutanea riflessogena non era possibile ottenere alcun accesso epilettico. Le ultime stimolazioni faradiche della cute riflessogena venivano eseguite adoperando la più forte corrente ottenibile da un induttorio a slitta del Du Bois-Réymond alimentato da una batteria di due volta.

Si trovò così un primo cane sicuramente non predisposto alla epilessia riflessa. In questo animale l'applicazione di stricnina sul centro dell'orbicolare (ripetuta quattro volte ad intervalli di tre minuti) accompagnata dalla intensa stimolazione della zona riflessogena funzionalmente con esso connessa non aveva avuto altro effetto che la comparsa del clono nel muscolo orbicolare palpebrale e la sua successiva accentuazione.

Dopo che in questo animale venne tolto dalla corteccia cerebrale l'ultimo dischetto con stricnina (dopo quattro minuti dalla sua applicazione) e fu scomparso il clono dell'orbicolare, si depose sullo stesso centro corticale (in precedenza stricninizzato) un dischetto di carta bibula (sempre di due mm di diametro) imbevuto di una soluzione acquosa al 0,5 °/₀₀ di prostigmina (7). Dopo venti secondi da tale applicazione si notò la spontanea ricomparsa del clono dell'orbicolare e la sua successiva accentuazione. Poche stimolazioni meccaniche della zona riflessogena furono sufficienti a determinare l'insorgenza di un accesso epilettiforme generalizzato e completo della durata di tre minuti. Dopo dieci minuti dalla fine di questo accesso, essendo il clono dell'orbicolare cessato, si pose un dischetto di carta bibula imbevuto di soluzione all'un per cento di nitrato di stricnina (sempre del diametro di due mm) sul centro dei mm. estensori della dita dell'arto anteriore dello stesso lato (centro che, come abbiamo detto sopra, avevamo in precedenza identificato) e ciò allo scopo di vedere se da questo centro trattato con sola stricnina fosse possibile ottenere un nuovo accesso di epilessia riflessa.

Si iniziò pertanto la stimolazione meccanica della zona cutanea riflessogena corrispondente a questo secondo centro. Questa zona, com'è noto, è rappresentata dalla cute dell'estremità e dei polpastrelli delle dita dell'arto anteriore. La stimolazione meccanica di questa zona ebbe per immediato effetto la ricomparsa del clono del muscolo orbicolare palpebrale. Insistendo nella stimolazione della stessa zona si ottenne un rapido accentuarsi delle scosse cloniche dello stesso muscolo e, successivamente, la insorgenza di un accesso epilettiforme generalizzato e completo. Questo accesso si originò in maniera manifesta dal centro dell'orbicolare, proprio come se la zona cutanea stimolata fosse stata la zona riflessogena più direttamente con questo centro connessa, ed ebbe la durata di tre minuti.

(7) Abbiamo usato fiale iniettabili di Prostigmina Roche del commercio contenenti una soluzione acquosa, appunto alla concentrazione del 0,5 °/₀₀, di sostanza. Questa corrisponde com'è noto all'etere dimetilcarbamidico del monometilsolfato di trimetilossifenilammonio.

Dopo dieci giorni da tale esperienza si operò nuovamente lo stesso animale sulla opposta metà del cranio. Identificati sulla zona sigmoidea destra i centri dell'orbicolare e degli estensori delle dita dell'arto anteriore, si sovrappose sul centro dell'orbicolare il dischetto con stricnina; dopo tre minuti, non essendo ancora (nonostante le stimolazioni meccaniche della zona riflessogena) apparso il clono, si rinnovò il dischetto con stricnina sullo stesso centro. Dopo due minuti da tale nuova applicazione apparve il clono del muscolo orbicolare, clono che le successive stimolazioni meccaniche della cute riflessogena rinforzarono. Rinnovata nuovamente l'applicazione di stricnina sul medesimo centro e stimolata la zona riflessogena colla più forte corrente faradica ottenibile dal nostro induttorio a slitta non fu possibile provocare l'insorgenza di alcun accesso epilettiforme. Pertanto (dopo tre minuti dalla sua applicazione) si sostituì l'ultimo dischetto con stricnina applicato sul centro con un altro dischetto di carta bibula di pari dimensioni imbevuto della soluzione di prostigmina al 0,5 ‰. Dopo 25″ da tale applicazione di prostigmina sul centro si notò un aumento della frequenza e della intensità delle scosse cloniche. Poche stimolazioni meccaniche della zona riflessogena furono, 30″ dopo, sufficienti a determinare l'insorgenza di un completo e generalizzato accesso epilettiforme della durata di due minuti e mezzo. Dopo sette minuti dalla fine di questo accesso, essendo scomparso il clono dell'orbicolare, si applicò un dischetto con stricnina sul centro corrispondente ai mm estensori delle dita dell'arto anteriore. La stimolazione della zona cutanea corrispondente a questo secondo centro provocò la ricomparsa del clono nel muscolo orbicolare; insistendo nella stimolazione della stessa zona si ottenne un nuovo accesso epilettiforme generalizzato e completo della durata di due minuti e mezzo. Anche questo accesso si originò chiaramente dal centro del muscolo orbicolare palpebrale.

Avendo ottenuto su un secondo cane non predisposto (operato sui due emisferi colle medesime modalità suddescritte) analoghi risultati, mi limitai nelle esperienze successive ad accertare con sicurezza durante il primo intervento operatorio esclusivamente la predisposizione o meno dei cani all'epilessia riflessa, sempre seguendo la tecnica suesposta. Una volta che l'animale veniva sicuramente riconosciuto non predisposto si suturava la ferita cutanea, e, a distanza di dieci giorni, si operava sull'opposto lato del cranio.

In questa seconda seduta, dopo l'identificazione dei due soliti centri, si poneva su quello dell'orbicolare la minima quantità di stricnina e la minima quantità di prostigmina capaci di rendere, in virtù della loro azione combinata, epilettogene le stimolazioni portate sulla zona riflessogena. A ciò si perveniva applicando gradatamente un certo numero di dischetti imbevuti in soluzioni diluite di queste due sostanze. Una volta ottenuto l'accesso dal centro dell'orbicolare si toglieva da questo il dischetto di carta bibula e dopo dieci minuti si applicava sul centro dei muscoli estensori delle dita un dischetto imbevuto della soluzione all'un per cento di nitrato di stricnina, stimolandone successivamente la zona cutanea riflessogena. Ogni tre minuti il dischetto con stricnina veniva rinnovato, e ciò per tre volte consecutive mentre si con-

tinuavano ad applicare sulla cute dell'estremità e dei polpastrelli delle dita dell'arto anteriore, stimoli meccanici, dolorifici ed elettrofaradici di massima intensità.

Nei tre animali sicuramente non predisposti nei quali si sperimentò con queste nuove modalità riuscimmo costantemente ad ottenere accessi epilettiformi d'origine riflessa dal centro trattato con stricnina e prostigmina ma non dal centro trattato con sola stricnina. La ripetuta stricninizzazione di questo e la stimolazione per quanto energica della relativa zona riflessogena valsero solo, in questa seconda serie di esperienze, a determinare la comparsa del clono dei muscoli estensori delle dita dell'arto anteriore. Dopo che i tentativi di ottenere l'accesso epilettico riflesso dal centro trattato con sola stricnina erano riusciti vani, la stimolazione della zona cutanea riflessogena corrispondente al centro dell'orbicolare (accompagnata in due dei tre cani da una nuova applicazione di stricnina e prostigmina) di dimostrò costantemente capace di provocare un secondo accesso epilettiforme generalizzato e completo.

Queste esperienze permettono di riconoscere nelle soluzioni acquose di prostigmina la medesima proprietà già riscontrata da Martino [8] nel siero di sangue di cani naturalmente predisposti alla epilessia da eccitamenti afferenti, la proprietà cioè di indurre una localizzata disposizione a questo fenomeno nel centro sensitivo–motore corticale (di cane non predisposto) sul quale venga localmente applicato.

Se la prostigmina agisca come fattore disponente in virtù del suo più noto meccanismo d'azione, e cioè impedendo la scissione enzimatica dell'acetilcolina, non possiamo ancora affermare con sicurezza [9].

(8) MARTINO, « Arch. Fisiol. », *30*, 51 (1931).

(9) La disposizione alla epilessia riflessa potrebbe essere prodotta dalla ostacolata scissione e dal conseguente accumulo di acetilcolina in corrispondenza delle sinapsi interneuroniche. Nonostante le ricerche di varii Autori (LONGO e COLACIURI, « Riv. pat. sper. », *24*, 113 (1940); LONGO, « Arch. Fisiol. », *40*, 348 (1940); PERO, « Riv. pat. nerv. e ment. », *59*, 376 (1942)) non possiamo ancora giungere ad una conclusione soddisfacente a proposito del vero ruolo che spetta alla acetilcolina nel fenomeno dell'epilessia riflessa. Le succitate ricerche di PERO dimostrano come la diretta applicazione di eserina sui centri corticali sensitivo–motori di cani non predisposti non sia capace di indurre in questi una artificiale disposizione alla epilessia riflessa. Una ragione della diversità esistente tra i risultati di PERO ed i nostri attuali ci sembra che possa andare ricercata nella assai più facile ossidabilità della eserina nei confronti della prostigmina.

Io penso che la ipotesi esposta al principio di questa nota possa essere avvalorata dal fatto che la morfina (sostanza capace di provocare per somministrazione sottocutanea uno stato di artificiale disposizione alla epilessia riflessa (AMANTEA)) è dotata di una azione inibitrice sulla scissione enzimatica della acetilcolina superiore a quella esercitata dalla stessa eserina (BERNHEIM e BERNHEIM, « J. Pharmcol. », *57*, 427 (1936). È vero che la morfina applicata direttamente sui centri di cani non predisposti è incapace di indurvi uno stato di artificiale disposizione (lo stesso accade pel cloralosio; secondo le esperienze di MARTINO questa sostanza, capace di indurre se somministrata per via ipodermica nei cani non predisposti uno stato di artificiale disposizione, si dimostra priva di tale effetto allorchè viene

La energica azione di questo artificiale fattore disponente ci ha permesso di osservare durante la prima serie di esperienze l'efficacia epilettogena di eccitamenti afferenti originatesi in una zona riflessogena non direttamente connessa col centro sul quale aveva agito la combinata azione della stricnina e della prostigmina. Questo fenomeno conferma quanto Rizzolo [10] in base alle sue ricerche sperimentali sull'effetto degli eccitamenti afferenti sulla eccitabilità dei centri sigmoidei del cane scriveva nel 1926: « Sembra che ciascun centro sigmoideo pur presentando più intime connessioni funzionali colla propria zona riflessogena non debba considerarsi affatto indipendente da ogni altro territorio cutaneo: un certo rapporto infatti, per quanto di grado subordinato, sembra esistere anche *con altre regioni cutanee controlaterali rispetto al centro* ».

applicata direttamente sui centri s. m.; il cloralosio è un prodotto di condensazione del glucosio col cloralio ed il cloralio, per quanto in misura minore della morfina, è pure un inibitore della scissione enzimatica della acetilcolina) ma il tempo occorrente perchè questa sostanza una volta iniettata agisca da artificiale fattore disponente lascia supporre che un certo intervallo sia necessario per l'accumulo nell'organismo del cane in quantità efficace della vera sostanza direttamente responsabile del fenomeno della disposizione. Questa sostanza potrebbe essere appunto l'acetilcolina che progressivamente si libera negli organi sotto il governo di fibre colinergiche.

Le mie esperienze sopracitate sull'effetto della prostigmina sulla paralisi muscolare da fatica fanno appunto concludere che la prostigmina agisca su questo fenomeno indirettamente permettendo nell'organismo un adeguato accumulo dell'acetilcolina che continuamente in esso si libera negli organi sotto il governo di fibre colinergiche.

A proposito dei risultati delle presenti ricerche non possiamo invece ancora con sicurezza affermare che la prostigmina agisca, almeno esclusivamente, in virtù del suo potere anticolinesterasico e ciò anche in considerazione dei dati sperimentali che hanno recentemente indotto Roeder, Kennedy e Samson (« J. Neurophysiol. », *10*, 1, 47) ad affermare che nell'effetto esercitato dalla prostigmina e dalla eserina sulla trasmissione degli impulsi vada presa pure in considerazione una azione collaterale di queste sostanze.

D'altra parte la realizzata sintesi di sostanze chimicamente del tutto diverse sia dalla eserina che dalla prostigmina, capaci (come ad esempio il diisopropilfluorofosfato di sodio) di inibire energicamente ed a lungo « in vivo » la scissione enzimatica della acetilcolina e prive del suddetto effetto collaterale, permette ora di affrontare con maggior sicurezza il problema. Stiamo pertanto approntando ulteriori ricerche.

(10) Rizzolo, « Annali di clinica terapeutica », *VI*, (1926).

Biologia (Biometria). — *Il rapporto armonico fra scarti individuali e grandezza media dei più diversi segmenti corporei. Una conferma sul «Carabus auratus»* (*). Nota di A. SACCHETTI, presentata (**) dal Corrisp. S. SERGI.

IL PROBLEMA PRECEDENTE: IN ANTROPOMETRIA. – In una serie di altri lavori (1) sulle relazioni intercorrenti, in antropometria, fra l'ampiezza degli scarti individuali e la grandezza media dei più diversi segmenti corporei mi sono occupato in particolare del problema riguardante la misura della variabilità comparata. La sua impostazione ha origine dalla osservazione del comportamento del comune *coefficiente di variabilità percentuale* $\left(\frac{\sigma}{M}\,100\right)$ secondo il quale, in genere, i più piccoli segmenti corporei ne assumerebbero i più grandi valori (e quindi – si dice – la più grande variabilità !), viceversa i più grandi segmenti i minimi valori (e quindi la minima variabilità !).

La generalizzazione di tale risultato mi era apparsa inconciliabile con la più comune esperienza circa il comportamento dei singoli caratteri, per cui sono poi riuscito a dimostrare che esso è semplicemente uno scherzo aritmetico-statistico e quindi non traducibile in termini di « variabilità biologica » dei segmenti presi in esame. Si trattava infatti della relazione esistente in complesso fra l'ampiezza media degli scarti individuali (scostamento quadratico medio o σ) e la grandezza media (M) delle singole misure e che, pur sussistendo, *non è rappresentabile in realtà da una semplice legge di proporzionalità assoluta, mentre questa sola avrebbe giustificato il rapporto adottato in precedenza per il calcolo del coefficiente percentuale.*

Ciò posto, sulla scorta di un ampio materiale antropometrico riguardante gruppi omogenei di individui appartenenti alle più diverse razze umane ho studiato statisticamente la reale relazione esistente fra σ ed M su molti segmenti corporei. Il risultato ottenuto si esprime con la *linearità* della relazione fra log σ e log M mentre il coefficiente angolare è tendenzialmente uguale a 0,8 (quest'ultimo in linea di approssimazione empirica, comunque molto

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Antropologia della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 gennaio 1948.

(1) Cito i principali: *Sulla variabilità dei caratteri antropometrici lineari* e *Sul confronto reciproco della variabilità dei caratteri antropometrici lineari* in « Rend. della Acc. d'Italia », Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Roma, 1941; *La variabilità relativa dei caratteri antropometrici lineari* in « Rivista di Antropologia », vol. 33, Roma 1941; *Prime applicazioni di un nuovo coefficiente di variabilità* in « Relazioni al 41° Congresso della Soc. Ital. per il Progr. delle Scienze », Roma, 1942: *La teoria dei compensi antropometrici di G. Viola* in « Arch. di Antrop. Criminale, Psich. e Med. Legale », fasc. 1–2, 1942.

soddisfacente per i nostri bisogni in campo biometrico). Ecco l'espressione generica:

$$\log \sigma = 0{,}8 \log M \pm \log K$$

da cui, togliendo i logaritmi, con un semplice ragionamento di relatività, simile a quello che aveva condotto al precedente metodo di comparazione della variabilità fra i più diversi segmenti corporei, ho tratto la conseguente proposta del nuovo coefficiente CV secondo la formula $\frac{\sigma}{M^{0,8}}$.

Il CV ha finalmente condotto – in pratica – a risultati indipendenti dalla grandezza dei segmenti, così come si chiedeva al problema di comparazione. Ho pertanto creduto di avere individuato perlomeno la soluzione sperimentale. Ma è essa generalizzabile o è valida solo per l'uomo? Lo dirà ancora l'esperienza. In questa Nota comunque vi è un primo contributo al riguardo.

TABELLA I.

Medie e indici di variabilità per i singoli segmenti del « Carabus anratus » (*su misure di* A. Porta) (*gruppo di 84 maschi*).

Numero d'ordine	Caratteri	M	σ	CV_p	CV
1	Lunghezza dell'antenna alla 1ª articolazione	2,063	0,128	6,10	0,072
2	Larghezza della testa	3,152	0,199	6,30	0,080
3	Lunghezza della mandibola	3,304	0,208	6,30	0,080
4	Lunghezza della testa	3,750	0,270	7,20	0,094
5	Lunghezza del protorace	4,589	0,248	5,40	0,073
6	Lunghezza tarso zampa anteriore	5,176	0,398	7,68	0,107
7	Lunghezza dalla prima alla quarta articolaz. antenna	5,329	0,232	4,36	0,061
8	Larghezza del protorace	6,693	0,322	4,82	0,070
9	Larghezza del corpo	8,994	0,410	4,56	0,071
10	Lunghezza antenna	13,750	0,629	4,58	0,077
11	Lunghezza elitra	14,411	0,693	4,80	0,082
12	Lunghezza della zampa anteriore	15,613	0,698	4,47	0,077
13	Lunghezza della zampa mediana	17,857	0,965	5,40	0,096
14	Lunghezza del corpo	22,506	1,041	4,62	0,086
15	Lunghezza della zampa posteriore	24,423	1,099	4,51	0,085

UNA CONFERMA SUL « CARABUS AURATUS ». – I dati sperimentali riferiti finora erano esclusivamente antropometrici, ma tutti i presupposti lascia-

vano prevedere una conferma in altri campi anche molto lontani, purchè si trattasse di segmenti corporei parziali e insieme anche dei segmenti massimi, come del resto si era chiarito anche in fase di impostazione teorica del problema. Infatti ho potuto al riguardo elaborare un materiale altamente significativo, sul *Carabus auratus*, in base a dati pubblicati da A. Porta nel 1902 e successivamente (1908–09) ripresi dal Kribs in *Biometrika* (2), ottenendo risultati perfettamente simili a quelli antropometrici.

La rilevazione riguarda 84 maschi e 84 femmine, due gruppi che hanno dato i medesimi risultati ai fini proposti, per cui mi limito ora a riportare la sola documentazione dei dati maschili.

Nella tabella I sono riprodotti per singoli segmenti i valori medi, il *sigma*, il *coefficiente di variabilità percentuale* (CV_p) e quello di variabilità relativa secondo la formula di approssimazione da me proposta $CV = \frac{\sigma}{M^{0,8}}$.

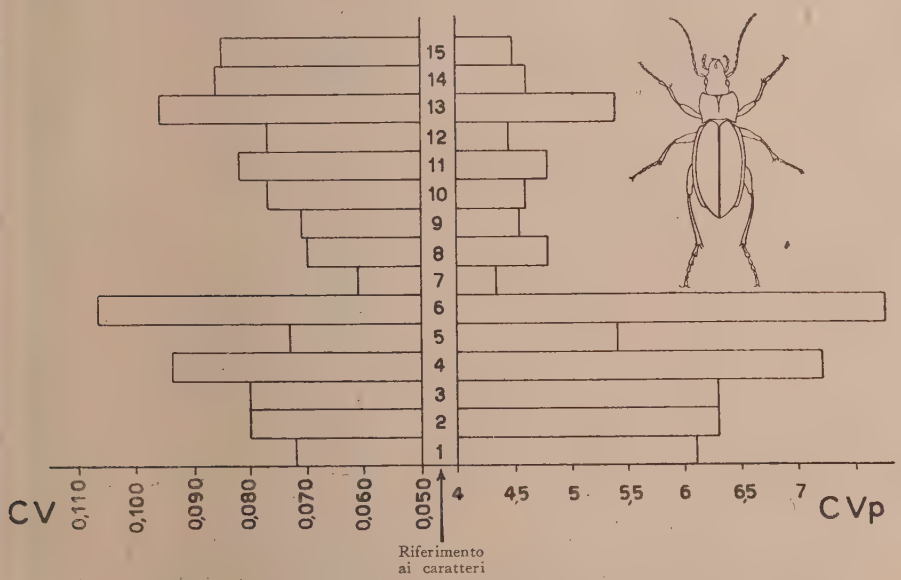


Fig. 1. – Coefficienti di variabilità per 15 caratteri metrici rilevati su 84 maschi di *Carabus auratus*.

Nella figura 1, inoltre, con un grafico a doppio istogramma su due scale graduate rispettivamente per il CV_p ed il CV, si ha una precisa idea comparativa dei risultati dei due coefficienti, ed è interessante tener presente che il numero d'ordine dei caratteri (corrispondente alla tabella I), da 1 a 15, procede dalle misure medie più piccole alle più grandi e comprensive.

Secondo il semplice rapporto percentuale del *sigma* alla media (il coefficiente CV_p) si dovrebbe concludere che le più grandi misure corporee sono

(2) H. G. KRIBS, Cfr. *Biometrika*, p. 103, vol. VI, Cambridge, 1908–1909. I dati di PORTA sono pubblicati nel « Bull. Soc. Entomol. Ital. », anno 34, 1902.

assolutamente le meno variabili e viceversa le più piccole sono le più variabili!

Strano risultato che singolarmente concorda con quello in genere riscontrato per l'uomo. Strano risultato che – come abbiamo visto – è solo un gioco aritmetico e che scompare assolutamente, come regola generale, quando si passi a considerare i risultati del CV. Nella figura 1 infatti si vede come i due coefficienti divergono in questi rapporti generali con la grandezza dei segmenti corporei che rappresentano, mentre nei ristretti limiti comparativi di caratteri contigui i risultati il più delle volte coincidono. Dunque, il proposito di trovare un coefficiente generale atto alla misura della variabilità

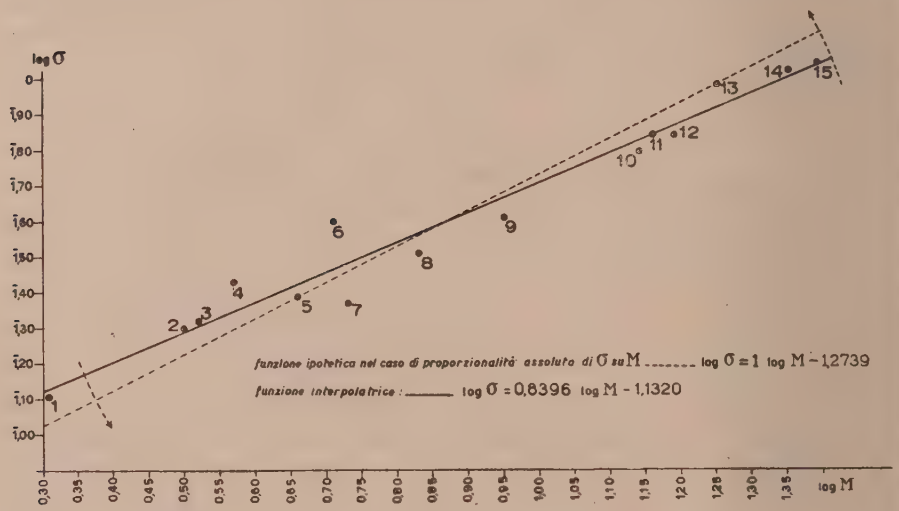


Fig. 2. – Distribuzione di log σ su log M per 15 misure lineari rilevate su 84 maschi di *Carabus auratus*.

indipendentemente dalla grandezza dei segmenti, sembra ancora una volta attraverso il CV perfettamente raggiunto. E dall'uomo al Carabo vi è un intervallo notevole!

Ma vi è di più. Ho tentato anche per il Carabo una interpolazione dei log σ sui log M come appare nella figura 2. La funzione interpolatrice è:

$$\log \sigma = 0{,}839 \log M - 1{,}132.$$

I dati sperimentali mostrano una aderenza perfetta all'andamento lineare e su un coefficiente angolare che è all'incirca il solito. Nello stesso grafico con una tratteggiata si vede il falso fondamento ipotetico secondo un coefficiente angolare uguale a uno e che spiegherebbe ancora una volta – se ve ne fosse bisogno – la natura delle divergenze fra CV_p e CV in quanto il CV_p, implicitamente almeno, prevedeva un coefficiente angolare uguale a 1. I piccoli segmenti, infatti, relativamente si elevano sulla tratteggiata mentre si abbas-

sano i grandi da cui il fenomeno assurdo del CV_p che darebbe come molto variabili i primi e poco i secondi; si intende, *in media*, e a parte la posizione secondo i fattori di variabilità intrinseca dei singoli caratteri.

Al coleotterologo diremo così, ad esempio, che la lunghezza totale dell'antenna nel *Carabus auratus* è molto più variabile della lunghezza del segmento dalla prima alla quarta articolazione nonostante che il CV_p dia una molto piccola differenza. Ma gli esempi li può moltiplicare a piacere il lettore stesso.

Il dato fondamentale che, comunque, rimane per noi è *la linearità nella relazione fra* log σ *e* log M *e il rispettivo coefficiente angolare.*

È interessante, infine, un saggio per precisare, anche sugli stessi dati del *C. auratus*, le possibili divergenze di variabilità dei caratteri nell'ipotesi che gli scostamenti individuali non seguano la funzione messa in evidenza rispetto ad M, ma quella di assoluta proporzionalità. Ho preso allo scopo i dati della lunghezza dell'antenna alla prima articolazione (carattere che per brevità indico con A) e della lunghezza della zampa posteriore (che indico con B). Sono le due misure estreme: la più piccola e la più grande rispettivamente.

Nella tabella II riporto i dati sperimentali di A e di B, poi quelli che si sarebbero ottenuti (*medi di previsione*) se i valori di log σ nella figura 2 avessero portato i punti del 1° e del 15° segmento *sulla retta interpolatrice*, poi,

TABELLA II.

Dati statistici di previsione della variabilità del carattere B *tenendo costante il carattere* A.

		Dati reali	Dati medi di previsione normale		Dati di previsione di B nell'ipotesi di proporzionalità assoluta degli scarti sulla media (M)
M	A	2,063	—		—
	B	24,423	—		—
σ	A	0,128	0,1355		—
	B	1,099	1,0795	⟶	1,6046
log M	A	0,3145	—		—
	B	1,3878	—		—
log σ	A	$\bar{1}$,10721	$\bar{1}$,13207		—
	B	0,04100	0,03320	⟶	0,20537
CV_p	A	6,10	6,57		—
	B	4,51	4,42	⟶	6,57

ancora, quelli di previsione del segmento B nell'*ipotesi di proporzionalità assoluta* degli scarti, alla media (M), partendo da A. Si vede facilmente come

la variabilità del piccolo segmento A comporterebbe, nell'ultima ipotesi di proporzionalità, per il B un *coefficiente percentuale* (CV_p) anche di 6,57 e quindi non la conservazione del *sigma* sul livello di 1,0795 ma un aumento a 1,6046. In cifre percentuali è come dire che il *sigma* di B da 100 salirebbe a circa 150 con un aumento della metà. Ed è un aumento molto forte, tanto da cambiare – qualora si realizzasse – la consistenza omogenea del gruppo.

Ma una simile variabilità del segmento maggiore B non è in realtà compatibile, in media, con quella reale di A poichè non sussiste la legge di pro-

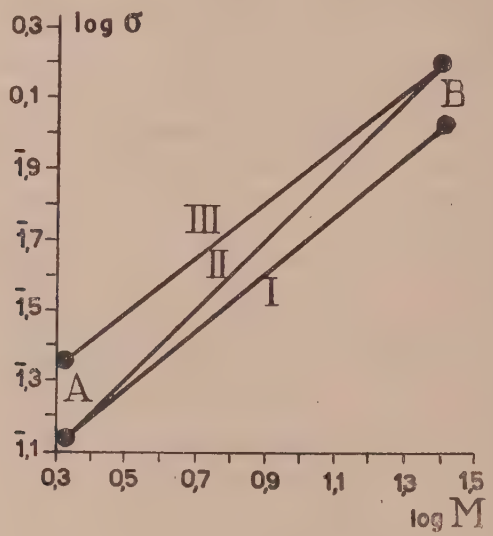


Fig. 3. – Figura schematica che rappresenta il comportamento di due caratteri del *C. auratus* (A e B) secondo le seguenti funzioni: I, retta dell'andamento generale *medio* dei log σ sui log M; II, retta implicita nell'ipotesi di proporzionalità assoluta del σ su M tenendo fermo A sui suoi valori originari; III, retta dell'andamento normale della funzione (con $b = 0{,}8$) che indica il posto di A nell'ipotesi di realizzazione del maggior valore di log σ in B.

porzionalità ipotetica fra σ ed M e – non dimentichiamolo – la correlazione massima fra gli elementi componenti il segmento maggiore (implicita nella stessa ipotesi teorica) non è compatibile con la realizzazione degli adattamenti alle individualità più disparate del gruppo. Perciò mi sono chiesto – continuando l'ipotesi – quale variabilità dovrebbe assumere il segmento A per essere ancora compatibile con la vita del gruppo in cui B presenti, in genere, il *sigma* come nel caso esposto di 1, 604: una volta e mezza il suo valore reale. Ecco il risultato per A:

log σ da $\bar{1}{,}132$ passerebbe a circa $\bar{1}{,}35$

σ da 0,135 passerebbe a circa 0,224.

In cifre percentuali salirebbe il σ da 100 a più di 165. Come si vede un aumento di variabilità che intaccherebbe ancora una volta e profondamente la omogeneità del gruppo con tutte le conseguenze nel campo sistematico. Per cui – concludiamo – la natura di ogni aggruppamento demogenetico in esame richiede sempre e *necessariamente* una stretta aderenza alla sua « soglia » di equilibrio individuale, perchè al di fuori di essa si distrugge ineluttabilmente la consistenza naturale dello stesso gruppo.

Nel caso particolare si può obbiettare che il segmento A non è parte del segmento B. Non importa, quando le cose si comportano come se lo fosse, secondo lo schema teorico generale. D'altra parte lo stesso ragionamento con altre cifre si può ripetere per A, che è parte dell'antenna, e la sua stessa lunghezza totale (10^a misura nella tabella I).

Il ragionamento si può poi schematizzare, secondo i dati finora riportati, come nella figura 3 dove vi sono, rispettivamente, le due possibilità di A e B. La retta I rappresenta l'andamento generale *medio* dei log σ sui log M come nella figura 2. La II rappresenta invece l'ipotesi di proporzionalità assoluta del σ su M tenendo fermo A sui suoi valori originari. La III l'andamento normale della funzione (con $b = 0{,}8$) che indica il posto di A nell'ipotesi di realizzazione del maggior valore di log σ in B.

Antropologia. — *Osservazioni preliminari su alcuni risultati del censimento della popolazione indigena dell'Eritrea, del 1939.* Nota riassuntiva di V. CASTELLANO, presentata (*) dal Corrisp. S. SERGI.

Il censimento della popolazione indigena dell'Eritrea, che ha avuto inizio nel dicembre 1938, costituisce un documento civile al quale gli avvenimenti posteriori hanno conferito una importanza speciale. I suoi risultati sono un particolare titolo di onore per noi. Essi contengono la prima notizia certa sulle popolazioni delle provincie d'oltre Mareb, unite alla nostra Eritrea nel 1936, e l'ultima sull'Eritrea storica prima del conflitto, quasi il punto della situazione dopo 50 anni di amministrazione italiana.

La pubblicazione dei risultati del censimento non ha avuto mai luogo perchè l'imminenza del conflitto in Europa distolse troppo presto la preoccupata attenzione dell'Amministrazione coloniale, e, disperso dalla guerra in Italia e in Eritrea, non è oggi recuperabile che un materiale incompleto, solo usufruibile per la compilazione di monografie statistiche su particolari popolazioni eritree.

Dai miei appunti, tratti dai documenti riepilogativi della rilevazione del 1939, ho tolto la distribuzione per Commissariati e per sesso della popolazione indigena dell'Eritrea, contenuta nella TABELLA I.

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1948.

TABELLA I.

Popolazione indigena dell'Eritrea. (*Censimento 1939*).

COMMISSARIATI	M.	F.	Totale
Hamasien	60.586	62.873	123.459
Seraè	59.211	63.112	122.323
Acchelè Guzai	55.447	50.919	106.366
Bassopiano Orientale	31.639	21.828	53.467
Cheren	54.549	53.598	108.147
Bassopiano Occidentale	45.318	41.775	87.093
Assab	6.871	6.627	13.498
TOTALE ERITREA STORICA	313.621	300.732	614.353
Tigrai Occidentale	180.823	174.747	355.570
Tigrai Orientale	88.002	82.196	170.198
Macallè	103.566 (1)	99.529 (1)	246.933
Paesi Galla	51.948 (1)	53.055 (1)	114.061
Dancalia e Aussa	?	?	36.200
TOTALE NUOVA ERITREA	424.339 (1)	409.527 (1)	922.962
TOTALE GENERALE	737.960 (1)	710.259 (1)	1.537.315

(1) Dati incompleti.

Per i territori di oltre Mareb non esistono dati di confronto; per i territori al di qua del Mareb uno studio comparativo dei risultati delle varie rilevazioni non era stato mai fatto, e si era ritenuto che ogni rilevazione autorizzasse a sconfessare la precedente. L'esame critico dei dati per gruppi etnici ha mostrato (1) che tutte le rilevazioni hanno la stessa attendibilità, e che dai dati emerge una curva di sviluppo della popolazione tigrina, che la storia ben concorre a spiegare. La curva mostra un incremento crescente

(1) V. *Il censimento del 1939 della popolazione indigena dell'Eritrea e lo sviluppo della popolazione indigena dell'Eritrea storica, in un cinquantennio di amministrazione italiana* di prossima pubblicazione negli «Atti della IX Riunione della Società Italiana di Demografia e Statistica, 15–16 aprile 1947».

all'inizio e decrescente alla fine del periodo, l'optimum dinamico intorno al 1902, e un rapido incremento lineare tra il 1905 e il 1931 (fig. 1).

Accettata tale curva era logico ammettere, sulla scorta dei dati, un andamento press'a poco lineare per gli altri gruppi etnici minori (fig. 2).

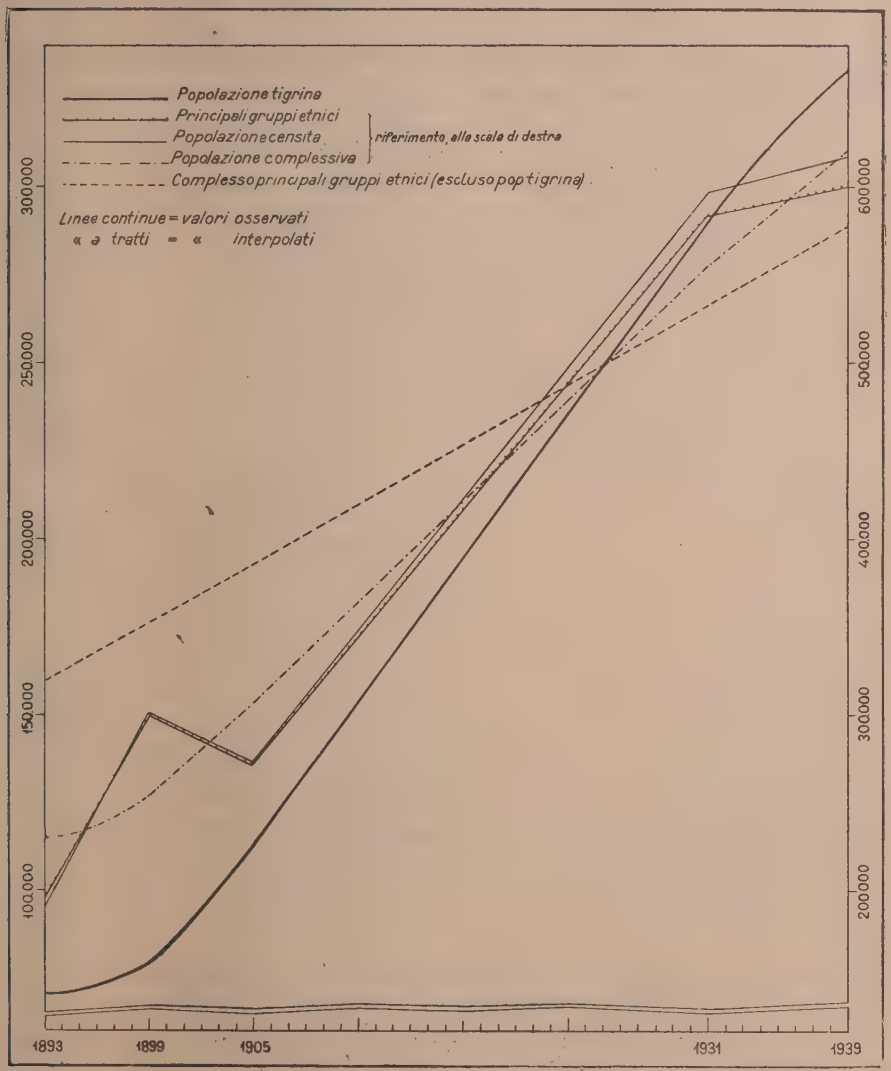


Fig. 1. – Sviluppo della popolazione indigena dell'Eritrea storica.

Per il loro comportamento nel tempo, queste si dividono nettamente in due gruppi: da una parte le popolazioni prevalentemente nomadi (Tigrè, Begia e Sahò), i cui dati presentano più ampie oscillazioni, e dall'altra le popolazioni stabili e prevalentemente stabili (Bileni, Dancali, Cunama e Baria) i cui dati, se pure in qualche caso aberranti, presentano una notevole regolarità.

La somma di queste popolazioni minori dà una curva di sviluppo rettilinea che, sommata a sua volta a quella della popolazione tigrina, dà una curva interpolatrice dei vari censimenti dell'Eritrea (esclusi solo gli Arabi e piccoli gruppi vari di popolazione immigrata, le cui cifre si vedono oscillare attraverso il tempo sopratutto per effetto della varietà dei criteri di

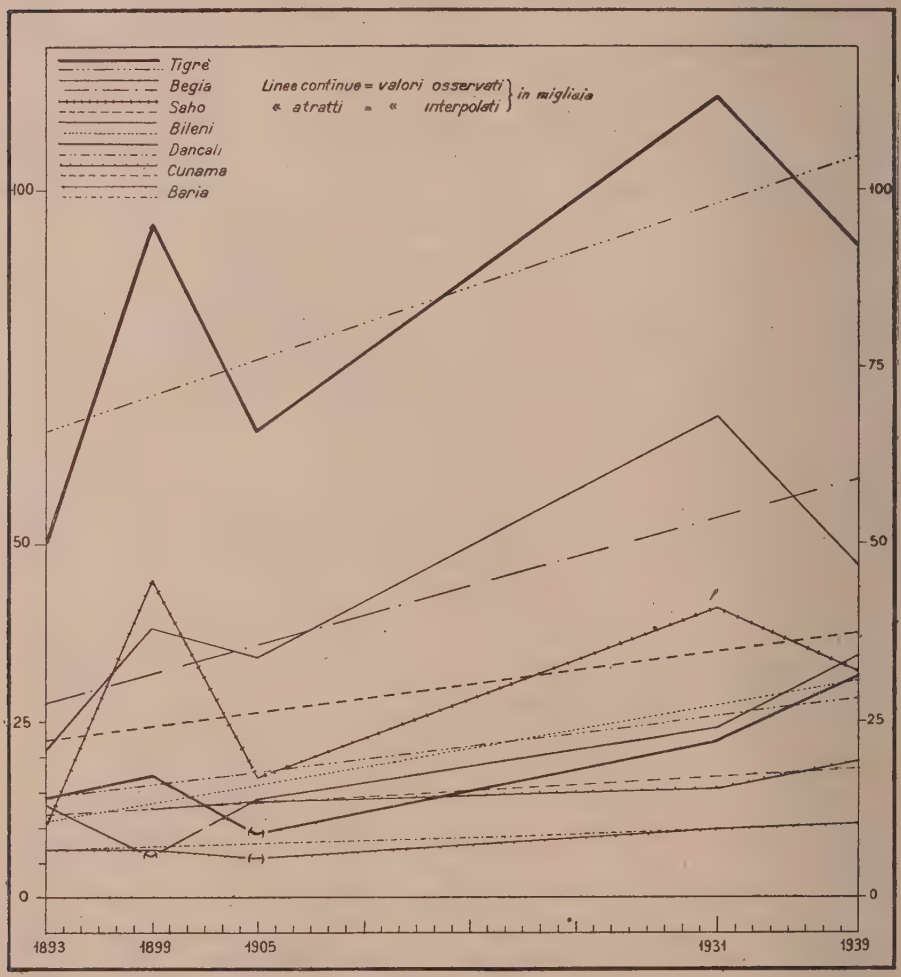


Fig. 2. – Sviluppo della popolazione indigena dell'Eritrea storica.

classificazione e di elaborazione) che è da ritenersi soddisfacente da tutti i punti di vista. La curva di sviluppo del complesso dei vari gruppi etnici dell'Eritrea (fig. 1), cui così si perviene, ha caratteristiche simili a quella della popolazione tigrina, ma meno accentuate. Il saggio medio geometrico d'incremento risulta del 21, 8 ‰ all'anno, intermedio tra quello della popolazione tigrina e del complesso delle popolazioni non tigrine (TABELLA II).

TABELLA II.

Gruppi etnici principali dell'Eritrea storica, ai vari censimenti (in migliaia).

Anno della rilevazione	Popolazioni non tigrine																Popolazione tigrina	Complesso dei principali gruppi etnici		Arabi	Vari	Complesso popolazione censita (2)
	prevalentemente nomadi						stabili o prevalentemente stabili								Totale							
	Tigrè		Begia		Saho		Bileni		Dancali		Cunama		Baria									
	valori		valori		valori		valori		valori		valori		valori		valori		valori oss.	valori		valori oss.	valori oss.	
	oss.	int.	oss.	int.	oss.	int.	oss.	int.	oss.	int.	oss.	int.	oss.	int.	oss.	int.		oss.	int.			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)
1893	50	66,0	21	27,6	10	22,3	13	10,9	14	14,2	—	11,8	6,9	6,6	126,7 (1)	159,4	70,6	197,3 (1)	230,0	—	5,8	202,9 (1)
1899	95	71,0	38	31,7	45	24,3	(6)	13,5	17	16,1	12,7	12,7	6,9	7,1	220,6	176,4	79,1	299,7	255,5	1,0	—	301,1
1905	66	76,1	34	35,8	17	26,2	14	16,1	(9)	17,9	13,7	13,5	(5,5)	7,6	159,2	193,2	112,9	272,1	306,1	1,1	2,2	274,9
1931	113	98,1	68	53,7	41	34,8	24	27,3	22	25,7	15,4	17,0	9,7	9,7	293,1	266,3	290,0	583,1	556,3	7,5	4,8	596,0
1939	92	104,8	47	59,1	32	37,4	34	30,7	31	28,1	19,2	18,1	10,5	10,4	265,7	288,6	332,8	598,5	621,4	9,2	6,8	614,4
saggio medio geometrico annuo d'incremento (‰)	—	10,1	—	16,7	—	11,3	—	22,8	—	14,9	—	9,3	—	9,9	—	13,0	34,3	—	21,8	—	—	—

(1) Compresi 11.800 Cunama.

(2) La somma dei dati delle coll. (19), (21) e (22) differisce dai dati della col. (23) per effetto dell'arrotondamento al migliaio dei dati osservati, per i primi 5 gruppi etnici, e al centinaio, per gli altri.

Il saggio medio d'incremento della popolazione tigrina per i 46 anni che vanno dal 1893 al 1939, non trova riscontro immediato che tra le popolazioni immigrate degli Stati Uniti d'America e dell'Australia. Esso però non permette di trarre argomento per la valutazione dell'incremento naturale della popolazione tigrina, data la impossibilità di valutare il flusso della corrente migratoria che si è verificata dai territori al di là del Mareb.

Meglio servono al fine di approssimare il saggio dell'incremento naturale, i dati sui gruppi etnici minori, specialmente del II gruppo, che non hanno ricevuto, nel periodo considerato, apporto di popolazione di uguale stirpe, d'oltre confine; mentre troppo incerti giudichiamo i dati relativi al I gruppo, riguardo al quale è anche da osservare che l'ordinario fluttuare delle popolazioni Begia attraverso i confini col Sudan, esclude che il saggio d'incremento di questa popolazione si possa interpetrare come saggio d'incremento naturale.

Poichè la media ponderata dei saggi annui d'incremento della popolazione è rappresentata dal saggio medio annuo d'incremento e non dal saggio medio geometrico [2], diamo qui di seguito i valori di detti saggi medi per mille abitanti, relativi ai 4 gruppi etnici del II gruppo, nel periodo 1893–1939;

Bileni	Dancali	Cunama	Baria
20,9	14,3	9,1	9,7

Queste cifre fanno pensare a quozienti di natalità del 40 ‰ e oltre, ma non di necessità cograduati con esse, in quanto è plausibile che in popolazioni così arretrate come i Cunama, i Baria e i Dancali, contribuisca al minore accrescimento naturale la elevatezza della mortalità. Esse costituiscono, ad ogni modo, sòlo un primo sguardo sulla demografia di queste popolazioni, e noi speriamo che il materiale recuperabile del censimento del 1939, predisposto perchè servisse a particolari indagini tendenti ad illustrare in qualche modo gli elementi della dinamica della popolazione, in mancanza di dati diretti sul movimento della popolazione, riesca a gettare qualche nuova luce nel campo ancora così poco esplorato della demografia delle popolazioni africane.

(2) V. *Sui saggi medi d'incremento della popolazione* di prossima pubblicazione in «Statistica», Milano, 1948.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente porge il saluto dell'Accademia e suo al prof. Petrich, Presidente dell'Accademia delle Scienze di Vienna, che assiste alla seduta.

Comunica poi ai colleghi la notizia della scomparsa del Socio straniero HENRI DESLANDRES, deceduto il 15 dello scorso gennaio. Il prof. Deslandres fu insigne cultore di astrofisica e profondo ricercatore della costituzione del sole. A lui sono pure dovute le determinazioni delle velocità radiali di molte stelle, e accurate indagini sugli spettri molecolari messi in relazione con la costituzione delle molecole. A quest'ultimo argomento egli ha dedicato molte Note pubblicate anche nei numeri recenti dei «Comptes Rendus», sebbene avesse già compiuto 94 anni. Era socio dell'Accademia dal 1908.

Il Presidente informa quindi la Classe che il Socio DE BLASI ha comunicato di non poter intervenire alla seduta a causa di una improvvisa malattia che lo ha colpito. Rendendosi interprete dell'unanime sentimento dell'Accademia, il Presidente formula il voto che le condizioni dell'illustre collega possano presto migliorare.

Comunica poi che ha ringraziato per la nomina il Socio straniero WERNER HEISENBERG.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti », i Soci Bonino, Contronei, Picone, Amerio (a mezzo del collega Cassinis), Armellini e Sergi, il quale illustra un suo lavoro con alcune proiezioni.

L'Accademico Segretario dà lettura dell'elenco delle Note pervenute all'Accademia.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

BONINO G. B. e ROLLA M., Contributo allo studio delle strutture elettroniche dei chinoni e delle forme chinoidi. II. Benzochinone.

SEGRE B, Intorno agli S_k che appartengono alle forme generali di dato ordine. Nota II.

SERGI S., Sulla morfologia della *fascies anterior corporis maxillae* nei paleantropi di Saccopastore e del Monte Circeo.

CASTIGLI-PIROTTI M., Ricerche sperimentali sulle perossidasi nello sviluppo embrionale di Petromyzon (pres. Socio G. COTRONEI).

KRZYZANSKI M., Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné (pres. dal Socio M. PICONE).

RIZZO C., Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo. A) La reazione ortoclinostatica nell'adulto normale. Nota III (pres. dal Socio G. COTRONEI).

Succi F., Osservazioni della *R Coronae Borealis* (pres. dal Socio G. Armellini).

Villa M., Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. III. - Trasformazioni cremoniane osculatrici (pres. dal Socio L. Berzolari).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio U. Amaldi, a nome anche del collega Picone, legge la relazione sulla Memoria del dott. Carlo Birindelli, dal titolo « Rapporti di un recente metodo di sommazione delle serie con altri e sue estensioni alle successioni e serie multiple » e l'Accademico Segretario, a nome dei colleghi Rovereto e Fabiani, legge la relazione sulla Memoria del dott. S. Conti, dal titolo « Il massiccio granitico di Pallare Fornelli e le lame triassiche nell'antracolitico di Mallare-Bormida ». Entrambe le relazioni sono approvate dalla Classe con le solite riserve di carattere finanziario.

PRESENTAZIONI DI LIBRI

L'Accademico Segretario illustra le pubblicazioni inviate in omaggio mettendo in particolare rilievo il volume: Lavori di botanica dell'Istituto Botanico dell'Università di Torino, diretto dal Socio Cappelletti, una pubblicazione del Socio D'Erasmo e una pubblicazione del Politecnico di Milano in onore rispettivamente dei compianti Soci Giuseppe Checchia Rispoli e Umberto Cisotti, il volume « The Naming of the Telescope di Edward Rosen », numerosi studi del Socio straniero Gutemberg, il volume « Siphonospora polymorpha v. Br. » di Wilhelm von Brehmer e un opuscolo del Socio straniero Lugeon.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 14 febbraio 1948.

Benioff H. — Vedi Gutenberg Beno.

Brehmer (von) Wilhelm. — «*Siphonospora polymorpha v. Bz.*» *in ihrer Bedeutung für Blut-und Geschwulstkrankheiten unter besonderer Berücksichtigung des Krebs.* Haag (Aniper), 1947. Pp. 171, con tavv.

Consiglio Nazionale delle Ricerche. — Assemblea plenaria dei Comitati nazionali (15 dicembre 1947). - *Discorsi*. Estr. da « Ricerca scientifica e ricostruzione », a. 17°, n. 12, dic. 1947.

D'Erasmo Geremia. — *Giuseppe Checchia Rispoli (1877-1947)*. Estr. da « Rend. dell'Accademia di Scienze Fisiche e Mat. della Soc. di Scienze; Lett. ed Arti di Napoli », Serie 4ª, vol. XV, (1946-47).

Dodge Carroll W. — *Mycocandida ribroflavina*, Estr. da « Annals of the Missouri Botanical Garden », vol. 34 (1947), nn. 31-36.

Dzindzibadzé Basile. — *Des phénomènes du soleil* (etudiés d'après la nature). Salonique, 1947. Pp. 16, in-8.

Gutenberg Beno. — *Amplitudes of surface waves and magnitudes of shallow earthquakes*. Estr. da « Bulletin of Seismolo-

gical Society of America », vol. 35, n. 1, january, 1945.

GUTENBERG Beno. — *Changes in sea level, postglacial uplift, and mobility of the earth's interior*. Estr. da « Bulletin of the Geological Society of America », vol. 52, pp. 721–772.

— *Interpretation of records obtained from the New Mexico atomic bomb test*, july 1945. Estr. da « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. 36, n. 4, october, 1946.

— *Magnitude determination for deep-focus earthquakes*. Estr. da: « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. 35, n. 3, july, 1945.

— *Mechanism of faulting in southern California indicated by seismograms*. Estr. da « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. 31, n. 4, october, 1941.

— *Microseisms and weather forecasting*. Estr. da « The Journal of Meteorology », vol. 4, n. 1, february, 1947.

— *Physical properties of the atmosphere up to 100 KM*. Estr. da « The Journal of Meteorology », vol. 3, n. 2, june, 1946.

— *Seismology*. Estr. da « Geology, 1888–1938, fiftieth anniversary volume Geol. Soc. Am. », June 1941.

— *Tectonic processes now in action*. Estr. da « Transactions of the American Geophysical Union », a. 1941.

— *The use of microseisms in Hurricane detection*. Est. da « Transactions of the American Geophysical Union », vol. 27, n. 1, february, 1946.

— *Variations in physical properties within the earth's crustal layers*. Estr. da « American Journal of Science », vol. 243-A, Daly volume, 1945.

GUTENBERG Beno and H. BENIOFF. — *Atmospheric-pressure waves near Pasadena*. Estr. da « Transactions of the American Geophysical Union », 1941.

GUTENBERG Beno and C. F. RICHTER. — *Seismic waves from atomic bomb tests*. Estr. da « Transactions of the American Geophysical Union », vol. 27, n. VI, december 1946.

— *Seismicity of the earth*. Estr. da « Bulletin of the Geological Society of America », vol. 56 (a. 1945), pp. 603–668, con figg.

Ingegneria e filosofia scientifica nuova. — Rivista internazionale, diretta da Giacomo Mazzoni. Anno I, nn. 1–3 e II, nn. 1–2. Roma, 1946–47.

ISTITUTO BOTANICO DELL'UNIVERSITÀ DI TORINO. — *Lavori di Botanica*, 1947, vol. VIII. Torino, 1947. Pp. 275, in-8°.

LUGEON Maurice. — *Hommage à August Buxtorf et digression sur la nappe de Morcles*. Estr. da « Verhandlungen der Naturfoschenden Gesellschaft in Basel », vol. LVIII, 1947.

— *Notes et publications scientifiques de Maurice Lugeon...* Publié à l'occasion de son soixante-quinzième anniversaire. Lausanne, Imprim. La Concorde, 1945. Pp. 39, in-8°.

NICCOLINI Umberto. — *Nuove onde elettromagnetiche ad uso terapeutico*. Estr. da « Minerva medica », a. XXXIX, vol. I, 1948.

POLITECNICO DI MILANO. — Inaugurazione dell'anno accademico 1947–48 (18 novembre 1947). Milano, Tipogr. Tamburini, 1947. Pp. 32, in-8°.

— *Umberto Cisotti*. 26 febbraio 1882–6 luglio 1946. Milano, Tip. Cesare Tamburini, 1948. Pp. 44, in-8°, con ritratto.

RICHTER C. F. — Vedi GUTENBERG Beno.

ROEGIERS Michel et ROEGIERS Lucien. — *La viscosité des mélanges de « Fluides normaux »*. Gand, 1945. Pp. 47, in-8°, con figg.

ROSEN Edward. — *The naming of the telescope*. New York, Henry Schuman, 1947. Pp. 110, in-8°, con figg.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 marzo 1948:

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria). — *Intorno agli* S_k *che appartengono alle forme generali di dato ordine* (*). Nota I (**) del Corrisp. B. SEGRE.

1. – È ben noto che le quadriche e le superficie cubiche generali dello spazio ordinario contengono rispettivamente un'infinità ed un numero finito di rette, mentre invece sulle superficie algebriche generali d'ordine superiore non giace nessuna retta. Un'estensione conosciuta di questi risultati agli iperspazi può enunciarsi dicendo che alla forma generale d'ordine n, F^n, di S_r appartengono rette se, e soltanto se, $n \leq 2r-3$: tali rette sono in numero finito per $n = 2r-3$, e costituiscono un sistema algebrico irriducibile di dimensione $2r-n-3$ se $n < 2r-3$. Tutto ciò può venire facilmente preveduto in base ad un conto di costanti: ma la dimostrazione rigorosa del suddetto enunciato fu ottenuta soltanto quindici anni or sono dal van der Waerden (1), mediante considerazioni tutt'altro che immediate.

Questioni consimili relative all'esistenza di S_k sulle F^n generali di S_r non sono ancora state trattate soddisfacentemente per $k \geq 2$, e si presentano assai meno semplici che nel caso delle rette ($k = 1$). La maggiore difficoltà può venir giustificata *a priori*, osservando che, per $k \geq 2$, i risultati suggeriti in modo ovvio da un appropriato conto di costanti (2) non sussistono incondizionatamente. Così, ad esempio, in S_4 vi sono ∞^6 piani, e 6 sono le condizioni necessarie affinchè un piano stia su di una quadrica;

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Presentata nella seduta del 14 febbraio 1948.

(1) Cfr. B. L. VAN DER WAERDEN, *Die Geraden Linien auf den Hyperflächen des* P_n (*Zur algebraischen Geometrie, II*), «Math. Ann.», *108*, 253–259, § 1 (1933).

(2) Per il quale ved. ad esempio S. PINCHERLE, *Applicazione alla geometria di una osservazione di aritmetica*, «Rendic. Acc. Sc. Istituto di Bologna», 17–22, nn. 2, 3 (1892–3).

tuttavia non vi è nessun piano sulla quadrica generale di S_4, in quanto ogni quadrica di S_4 che contenga un piano è notoriamente un cono.

Nel presente lavoro stabilisco compiutamente, seguendo una via assai diversa da quella percorsa dal van der Waerden per $k = 1$, che:

Affinchè la generica F^n *di* S_r *contenga qualche* S_k $(n \geq 1, k \geq 0)$ *è necessario e sufficiente che sia*

$$(1) \qquad r \geq k + \frac{1}{k+1}\binom{n+k}{n},$$

eccettuato soltanto se $n = 2$ *e* $k \geq 2$, *nel qual caso la* (1) *dev'essere sostituita dalla condizione più restrittiva*

$$(2) \qquad r \geq 2k + 1.$$

Il numero degli S_k *suddetti è finito se, e soltanto se, nella* (1) *vale il segno di uguaglianza senza che risulti* $n = 2$, $k \geq 2$; *altrimenti quegli* S_k *costituiscono un sistema algebrico infinito di dimensione*

$$(3) \qquad \delta = (k+1)(r-k) - \binom{n+k}{n}.$$

Sia nell'un caso che nell'altro il sistema di quegli S_k *risulta irriducibile nel campo di razionalità della* F^n (3).

Qui dò anzitutto (n. 2) la dimostrazione della necessità della (1), poggiando sulla teoria delle corrispondenze. Provo quindi induttivamente rispetto a k (n. 3) la sufficienza della condizione

$$(4) \qquad r \geq k + \binom{n+k-1}{n-1},$$

la quale è più restrittiva della (1) se $n \geq 2$, e si riduce per $n = 2$ alla (2), di cui è allora facile provare la necessità (n. 4). Ne deduco (Nota II) la parte restante del teorema enunciato, considerando la F^n generale di S_r quale sezione, con un generico S_r; della forma generale di ordine n di uno spazio di dimensione sufficientemente elevata. In questa deduzione uso in modo essenziale la distinzione degli S_r giacenti su di una F^n in s p e c i a l i e n o n s p e c i a l i; distinzione che qui vien fatta ed approfondita (nn. 5, 6) nel caso che F^n appartenga ad uno spazio di dimensione non superiore al secondo membro della (4).

Osservazione I. – Notiamo che la (1) può ridursi ad un'uguaglianza soltanto quando ne risulti intero il secondo membro, e cioè se

$$(5) \qquad (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1) \equiv 0 \pmod{(k+1)!};$$

ora è notoriamente

$$(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)\,n \equiv 0 \pmod{(k+1)!},$$
$$(n+k+1)(n+k)\cdots(n+1) \equiv 0 \pmod{(k+1)!},$$

(3) Cioè nel campo di razionalità dei coefficienti della sua equazione.

sicchè una condizione sufficiente perchè valga la (5) è che *uno almeno degli interi* $n, n+k+1$ *sia primo con* $(k+1)!$. Condizioni (di natura aritmetica) necessarie e sufficienti per la validità della (5), trovansi nel n. 1 del lavoro del Pincherle citato in [2].

Se la (1) riducesi ad un'uguaglianza, e si esclude che sia $n=2$, $k \geq 2$, il teorema dianzi enunciato suggerisce il problema di determinare il numero (finito e non nullo) degli S_k situati sulla F^n generica di S_r. Questo problema è stato risolto soltanto per $k=1$ (ciò che implica $n=2r-3$) [4], e non è che un caso particolare di quello di determinare l'ordine della $V_{\delta+k}$ generata dagli $\infty^\delta S_k$ di F^n, nell'ipotesi che valga la (1) e sia $n>2$, $\delta+k \leq r-2$; in forza della (3), l'ultima limitazione può venir scritta nella forma

$$r \leq k + \frac{1}{k}\binom{n+k}{n} - \frac{2}{k}.$$

OSSERVAZIONE II. – L'esame delle irrazionalità da cui può farsi dipendere la determinazione di S_k situati sulla F^n generale di S_r rientra in uno studio più generale, da me recentemente intrapreso [5]. Ad esso conto di portar presto qualche nuovo contributo.

2. – Il teorema enunciato nel n. 1 è ovvio se $n=1$ oppure $k=0$, e, per $n>1$, ha senso soltanto se $k<r-1$; supporremo dunque

$$n \geq 2 \quad , \quad 1 \leq k \leq r-2.$$

Gli S_k di S_r costituiscono notoriamente un sistema algebrico unicursale, e quindi irriducibile, di dimensione

$$a = (k+1)(r-k). \tag{6}$$

Fissato comunque un S_k in S_r, la totalità delle forme F^n di ordine n di S_r che lo contengono risulta chiaramente un sistema lineare, la cui dimensione,

$$b = \binom{n+r}{n} - \binom{n+k}{n} - 1, \tag{7}$$

non muta al variare di S_k in S_r. Ne consegue che, associando un S_k ed una F^n di S_r quando S_k giace su F^n, si viene a definire una corrispondenza algebrica irriducibile [6], di dimensione $a+b$. Posto per abbreviare

$$\gamma = \binom{n+r}{n} - 1, \tag{8}$$

(4) Cfr. H. SCHUBERT, «Math. Ann.», *26*, 52 (1886); G. MARLETTA, «Atti Acc. Gioenia Catania», *16* (1902); B. L. VAN DER WAERDEN, loc. cit. in (1), § 2.

(5) Vedi questo volume dei «Rendiconti», p. 149.

(6) Cfr. B. L. VAN DER WAERDEN, *Einführung in die algebraische Geometrie* (Berlin, Springer, 1939), lemma a p. 143.

si ha pertanto che, nell'insieme lineare ∞^γ formato da tutte le F^n di S_r, le F^n che contengono qualche S_k costituiscono un sistema algebrico irriducibile, di dimensione

$$c = \gamma - \varepsilon \qquad \text{ove } \varepsilon \geqq 0, \tag{9}$$

avendosi $\varepsilon = 0$ se, e soltanto se, ogni F^n di S_r contiene qualche S_k.

In virtù del principio del conto delle costanti[7] discende inoltre che gli S_k situati sulla generica F^n di quel sistema, ossia sulla generica F^n di S_r contenente qualche S_k, costituiscono un sistema algebrico irriducibile nel campo di razionalità della F^n, di dimensione

$$d = a + b - c \tag{10}$$

non negativa, l'annullarsi di tale dimensione significando che quegli S_k sono in numero finito e non nullo.

Notiamo ora che, in virtù delle (6)–(10) e della (3), si ha

$$d = \delta + \varepsilon; \tag{11}$$

e poichè, come già è stato avvertito dev'essere $d \geqq 0$, la condizione $\varepsilon = 0$ affinchè ogni F^n di S_r contenga qualche S_k implica che sia $\delta \geqq 0$, ciò che, in base alla (3), fornisce la (1). Rimane così stabilita la necessità di quest'ultima condizione.

La (11) mostra inoltre che, supposto $\delta \geqq 0$, onde assodare che la generica F^n di S_r contiene esattamente ∞^δ S_k, formanti un sistema algebrico irriducibile nel campo di razionalità di F^n, basta provare che è $\varepsilon = 0$ ossia che tale F^n contiene qualche S_k (in un'opportuna estensione di detto campo).

3. – Incominceremo col dimostrare quanto richiesto nell'ultimo capoverso ammettendo che, in luogo della $\delta \geqq 0$, ossia della (1), valga la condizione più restrittiva (4). Posto per abbreviare

$$\rho_i = i + \binom{n+i-1}{n-1} \qquad (0 \leq i \leq k), \tag{12}$$

supponiamo dunque che sussista la (4), la quale ora può venire scritta più concisamente nella forma

$$r \geqq \rho_k. \tag{4$_k$}$$

F^n contiene sempre qualche punto (od S_0), onde il fatto da dimostrare è del tutto ovvio se $k = 0$. Siccome poi, in virtù della (12), dalla (4_k) segue la (4_{k-1}), così, in base al principio d'induzione completa, sarà lecito ammettere di sapere già che F^n contiene qualche S_{k-1}. Introduciamo in S_r coordinate proiettive omogenee $(x_0, x_1, \cdots, x_r)$, assumendo un S_{k-1} siffatto come spazio fondamentale

$$x_k = x_{k+1} = \cdots = x_r = 0. \tag{13}$$

(7) Per il quale ved. ad esempio B. L. VAN DER WAERDEN, loc. cit. in (6), p. 141.

Allora F^n si rappresenta con un'equazione della forma

$$(14) \qquad \Sigma f^{(i)}_{i_0, i_1, \cdots, i_{k-1}}(x_k, x_{k+1}, \cdots, x_r)\ x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_{k-1}^{i_{k-1}},$$

dove $f^{(i)}_{i_0, i_1, \cdots, i_{k-1}}(x_k, x_{k+1}, \cdots, x_r)$ denota una forma di grado

$$i = n - (i_0 + i_1 + \cdots + i_{k-1})$$

nelle $x_k, \cdots, x_r$, e la somma va estesa a tutte le k-ple ordinate di interi non negativi $i_0, i_1, \cdots, i_{k-1}$ tali che $1 \leq i \leq n$, ossia soddisfacenti alla doppia limitazione

$$0 \leq i_0 + i_1 + \cdots + i_{k-1} \leq n - 1.$$

Il sistema

$$(15) \qquad f^{(i)}_{i_0, i_1, \cdots, i_{k-1}}(x_k, x_{k+1}, \cdots, x_r) = 0 \quad (0 \leq i_0 + i_1 + \cdots + i_{k-1} \leq n-1)$$

comprende dunque in tutto al più

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \rho_k - k$$

equazioni omogenee distinte nelle $r - k + 1$ variabili $x_k, x_{k+1}, \cdots, x_r$; sicchè, in forza della (4_k), in un'opportuna estensione del campo di F^n esso possiede qualche soluzione

$$x_k : x_{k+1} : \cdots : x_r = p_k : p_{k+1} : \cdots : p_r,$$

colle p non tutte nulle. Le ultime equazioni rappresentano in S_r un S_k contenente S_{k-1}; tale S_k è per costruzione luogo di punti soddisfacenti alle (15), e quindi pure alla (14), ossia giace su F^n. L'esistenza di un siffatto S_k è appunto ciò che ci eravamo proposti di stabilire.

OSSERVAZIONE. – L'argomentazione precedente mostra più precisamente che, se vale la (4_k), per ogni S_{k-1} giacente su di una forma F^n di S_r passano sempre degli S_k situati su F^n, costituenti un sistema algebrico di dimensione

$$\delta_k \geq r - \rho_k.$$

In questa limitazione vale inoltre il segno di uguaglianza, se la forma F^n è generica in S_r e lo spazio S_{k-1} è generico su essa.

Matematica (Economia matematica). — *Sul concetto di capitale circolante*. Nota (*) del Corrisp. L. Amoroso.

La distinzione del capitale in fisso e circolante è presentata ordinariamente nella dottrina economica come una distinzione qualitativa. Pur essendo in disaccordo nel precisare la definizione, i diversi autori consentono nel ritenere che essa separa in due categorie le cose che nel loro aspetto concreto costituiscono il capitale investito in un determinato complesso agricolo, industriale o commerciale. Nella categoria del capitale fisso sono comprese, per esempio, le macchine ed in genere tutti quei beni strumentali che rappresentano una immobilizzazione, mentre le materie prime, i prodotti in corso di lavorazione, i prodotti in magazzino ed in genere tutti quei beni il cui valore è rapidamente recuperato, per essere rapidamente incorporato nel valore del prodotto, sono inclusi nella seconda categoria del capitale circolante. Mi propongo in questa Nota dimostrare come la distinzione qualitativa sia in contrasto con la realtà sperimentale, la quale ci rivela invece che la proprietà che forma oggetto della definizione sussiste in grado maggiore o minore in tutti gli oggetti cui la definizione si riferisce. Donde ne deriva la convenienza di sostituire alla distinzione qualitativa una distinzione quantitativa, che elimini ogni differenza di categoria e sostituisce ad essa solo differenze di grado.

Sia un impianto agricolo, industriale, commerciale, il termine « impianto » essendo inteso nel senso più ampio in modo da comprendere un seminativo, un vigneto, un uliveto, un orto, un giardino, una foresta, un fabbricato, una officina, una miniera, una società di navigazione, una compagnia di assicurazioni, un emporio commerciale ed in genere ogni complesso economico in cui sia investito un certo capitale e si produca un certo reddito. Nell'ordine fisico il capitale precede il reddito: prima la terra, poi il grano; prima la nave, poi i trasporti; prima la miniera, poi i minerali. Nell'ordine economico la successione si inverte, nel senso che è il valore del reddito quello che determina il valore del capitale e non viceversa. È invero esperienza universale che il valore della terra è determinato dal prezzo dei prodotti agricoli, il valore di una nave dal corso dei noli, il valore di una miniera dal prezzo dei minerali, ecc. Ne viene di conseguenza la distinzione fra *ammontare* e *valore* del capitale investito. Una cosa è la somma che sborsai per impiantare la fabbrica, altra cosa il valore che la fabbrica ha oggi. Una cosa il prezzo che pagai per un ettaro di terreno, altra cosa il suo valore oggi. L'ammontare del capitale investito è il complesso delle somme che furono effettivamente sborsate per costituire o comprare l'impianto nella sua attuale efficienza: esso è una *categoria storica*, cioè una quantità che, finchè l'impianto non subisce variazioni nella sua consistenza fisica e nella sua organizzazione

(*) Presentata nella seduta del 13 marzo 1948.

commerciale, conserva il valore che ebbe nell'istante in cui il proprietario lo ebbe costruito o comprato. Non così il valore che è una *categoria economica*, cioè una quantità indipendente dal passato, che il mercato determina in ogni istante in relazione al reddito futuro. Anche se l'impianto non subisce variazioni nella sua consistenza fisica e nella organizzazione commerciale, il valore cambia da istante ad istante. Precisamente esso è pari ad ogni istante t al valore attuale (*cioè al tempo t*) di tutti i redditi che l'impianto è capace di produrre in futuro, quali attualmente (*e cioè al tempo t*) sono presunti dal mercato, al netto di tutte le spese, scontati al saggio *attuale* di interesse. Come la dottrina dell'equilibrio economico insegna, siffatto valore è uguale alla somma, che occorrerebbe sborsare oggi, se l'impianto fosse oggi ricostruito o comprato.

Fissiamo allora le idee su un impianto, il cui valore sia 100 milioni in un momento in cui il saggio di interesse è del 7 %. A norma della definizione ciò significa che in quel momento il mercato presume che il prezzo dei redditi futuri è *finanziariamente* equivalente, al saggio del 7 %, ad una rendita *perpetua* di 7 milioni all'anno. Ma nessun impianto dura in perpetuo: le cose di cui esso è costituito, in un tempo più o meno lungo si logorano, invecchiano, muoiono. La definizione significa allora anche questo: il mercato prevede che nel periodo della sua vita fisica l'impianto sarà capace di rimunerare il capitale investito con 7 milioni all'anno ed in più di accantonare anno per anno una quota tale che il complesso di tutte le quote, cumulate cogli interessi composti al saggio del 7 % costituiranno, al momento in cui l'impianto sarà consunto, un fondo di 100 milioni (*fondo di ammortamento*), capace di ricostituire ai prezzi attuali l'impianto. In breve il mercato presume che l'impianto è capace di rimunerare il capitale attualmente investito al saggio attuale di mercato e in più di produrre tanto quanto è necessario per creare alla sua morte il successore. In questo senso si può dire che l'impianto sotto l'aspetto economico non si consuma ed il suo reddito, al netto degli ammortamenti, può essere considerato perpetuo.

Supponiamo allora che l'impianto nella sua consistenza fisica duri ancora 20 anni. Le quote (di interesse) con cui è rimunerato il capitale costituiscono allora una rendita annua posticipata per 20 anni di 7 milioni all'anno, il loro valore attuale al saggio del 7 % è di 74.158.100, in cifra tonda 74 milioni. Per differenza il valore attuale di tutte le quote di ammortamento è 25.841.900, in cifra tonda 26 milioni. Diremo allora che dei 100 milioni che costituiscono il capitale investito, 74 sono capitale fisso, 26 capitale circolante. In generale definiamo come *capitale fisso*, in qualsiasi momento della vita dell'impianto, il valore attuale di tutte le quote di interesse di cui l'impianto è ancora capace durante la sua ulteriore attività fisica; *capitale circolante* l'analogo valore attuale di tutte le quote di ammortamento. Le definizioni importano che la somma del capitale fisso e del capitale circolante riproduce in ogni istante il capitale investito.

Definiamo poi come coefficiente di *elasticità dell'impianto* il rapporto del capitale circolante al capitale investito. Nell'esempio di cui sopra è 0,26.

Le definizioni debbono intendersi riferite non al soggetto, ma all'oggetto. Quando dico che di 100 milioni da me spesi, 74 rappresentano capitale fisso, 26 capitale circolante, non intendo che le mie disponibilità siano immobilizzate per 74 milioni. Io potrei rivendere l'impianto e recuperare subito integralmente il capitale. Al mio posto è subentrato un altro. Non quindi le mie disponibilità, *ma certe risorse della collettività nel loro complesso sono state immobilizzate*. Nella specie la immobilitazione non è totale, ma del 74 %, perchè la durata è stata supposta di 20 anni: sarebbe del 100 % per impianti che durassero in perpetuo, ed allora tutto il capitale investito sarebbe capitale fisso. Abbiamo già detto che impianti che durano in eterno non esistono; non esistono quindi capitali che sieno tutto capitale fisso. Nemmeno la terra è tutta capitale fisso. Il vigneto, l'uliveto, l'agrumeto, il giardino ed in genere tutte le opere di miglioramento agrario e fondiario non durano in eterno: e poichè debbono essere periodicamente rinnovate, contengono tutte una quota maggiore o minore di circolante. Il nucleo di verità che si nasconde nell'erronea proposizione che qualifica la terra come capitale fisso, è che nella terra – nella coltivazione più comune che è quella dei seminativi – la quota di circolante è in generale piccola rispetto al totale investito. Piccola nei confronti di quello che è generalmente nell'industria. Piccola, ma non nulla. Vale a dire: il coefficiente di elasticità dell'impianto è nell'agricoltura, in genere, minore di quello che è nell'industria; ma non scende mai a zero. La differenza fra un complesso agricolo ed un complesso industriale sotto questo rapporto non è quindi una differenza qualitativa, cioè una differenza *di carattere*, ma una differenza quantitativa *di grado*.

Analogamente non esistono capitali che sieno tutto circolante. Consideriamo, per esempio le materie prime della industria. Ho speso 10 milioni per una fornitura di carbone: la somma mi sarà restituita nel breve termine, in cui risulterà incorporata nel valore del prodotto. Il termine breve non è nullo. Il suo calcolo può non essere agevole, in ogni modo non è necessario per dedurre che il capitale investito nella fornitura non è tutto circolante. Detto ω il termine, espresso in termini di anno, i il saggio (annuo) di interesse, le quote che rappresentano il capitale fisso ed il capitale circolante sono rispettivamente:

$$u = 10\{1 - (1+i)^{-\omega}\}$$
$$v = 10(1+i)^{-\omega}$$

e poichè ω, per quanto piccolo, è diverso da zero, ne risulta $u > 0$, $v < 10$.

Analogamente non è tutto circolante il capitale investito in una fornitura di liquori fatta ad un esercizio di caffè. Il termine ω è in questo caso l'intervallo che corre in media dall'istante in cui una bottiglia entra nel locale all'istante in cui è venduto l'ultimo bicchierino. E se riflettiamo che anche in un modesto esercizio sono centinaia e talvolta oltre mille le bottiglie che vediamo allineate negli scaffali, ne deduciamo che anche in questo caso ω non è tanto piccolo, quanto sarebbe necessario perchè anche approssimativamente il capitale potesse essere considerato tutto circolante.

Neanche la moneta è tutto circolante. S'intende la moneta che fa parte integrale dell'impianto come *capitale di esercizio* e che evidentemente non potrebbe essere tolta senza che l'impianto cessasse di funzionare. Se il capitale di esercizio è impiegato per pagare salari operai, corre sempre un certo intervallo dall'istante in cui i salari sono pagati a quello in cui sono recuperati nel valore del prodotto: il valore attuale degli interessi durante questo periodo costituisce la quota di capitale fisso. Analogamente dicasi, se il capitale di esercizio è impiegato per far fronte alle spese generali. Se invece è impiegata per comprare materie prime, la quota del capitale fisso è quella che corrisponde ai beni comprati. Nel complesso se ω è l'intervallo in cui il capitale di esercizio viene recuperato per essere stato incorporato nel valore del prodotto, il valore attuale degli interessi corrispondenti al periodo ω costituisce la quota di capitale fisso.

Tutti i beni strumentali in cui si realizza in concreto il capitale investito in tutti gli impianti esistenti in una determinata collettività (macchinari, materie prime, prodotti in corso di lavorazione, prodotti in magazzino, ecc.) si logorano e si rinnovano continuamente e nel continuo processo di logorio e di rinnovamento costituiscono (*Clark*) un fondo permanente che rappresenta *il capitale sociale*. Muoiono i singoli beni strumentali e con la loro morte il capitale sociale si rinnova in forme continuamente diverse. In questo rinnovamento si realizza il progresso sociale. Se per esempio un paese si industrializza, il successore di un telaio meccanico sarà un telaio elettrico, il successore di una carrozza tramviaria un autobous, il successore di un giardino una fornace. Fenomeni opposti avvengono quando il processo si capovolge. Se terreni adibiti a pascolo vengono bonificati, il successore di una mandria di pecore, potrà essere una aratrice o una trebbiatrice. Se l'agricoltura si trasforma in agricoltura di qualità, il successore del bove o dell'aratro potranno essere l'orto od il giardino. La civiltà progredisce quando il rinnovamento delle forme è parallelo ad un incremento del capitale sociale. Se questo resta stazionario, la civiltà resta stazionaria. Se diminuisce la civiltà regredisce. Una sua forte contrazione segnala una *catastrofe della storia*.

Al capitale sociale può essere esteso in generale il concetto di *elasticità*, quale è stato considerato per i singoli impianti. Il relativo coefficiente si definisce come rapporto della somma di tutte le quote di circolante al totale investito, entrambi considerati per il complesso di tutti gli impianti esistenti nella collettività. Assunto l'anno come unità di tempo, detta ω la durata media degli impianti in cui il capitale sociale si realizza in concreto, i il saggio (annuo) di interesse, il coefficiente di elasticità del capitale sociale è espressa allora dalla formula

$$\varepsilon = (1 + i)^{-\omega} \tag{1}$$

e risulta quindi funzione decrescente tanto di i, quanto di ω. Supponiamo per un momento ω fisso. Il coefficiente ε è allora tanto più alto, quanto più basso è il saggio di interesse. Il che importa che quanto più basso è il saggio di interesse, tanto minore è, considerato nel suo complesso, il peso delle

immobilizzazioni, tanto più facile il processo delle sue trasformazioni in forme nuove, quindi tanto più piccolo il valore fisso di ω.

Ciò significa che ω, i non sono variabili indipendenti, ma ω è a sua volta funzione crescente di i. Sicchè detta ω' la derivata di ω rispetto ad i si ha

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -\left(\omega' \log(1+i) + \frac{\omega}{1+i}\right) di \qquad (2)$$

la quantità dentro parentesi essendo sempre positive. Per due versi una diminuzione del saggio di interesse tende a facilitare il progresso sociale: direttamente in quanto diminuisce il peso degli interessi passivi e quindi il peso delle immobilizzazioni: indirettamente in quanto tende a far diminuire la durata degli impianti.

La formula (2) spiega perchè in una società ricca, in cui è basso il saggio di interesse le macchine invecchiano rapidamente. In concreto spiega perchè gli americani (ed intendo gli U.S.A.) provvedono alla manutenzione assai meno largamente di quanto vi provvedono gli europei. La diversità della consuetudine *non è accidentale*. La maggiore ricchezza che si esprime in un più basso livello del saggio di interesse consente di considerare le macchine consunte, anche quando nella loro consistenza materiale sono ancora efficienti; di sostituirle con altre più efficienti, che il progresso della tecnica ha nel frattempo posto in essere.

Matematica (Teoria degli aggregati). — *Le paradoxe de Hausdorff et le paradoxe de Banach et Tarski*. Nota (*) del Socio W. Sierpiński.

En 1914 Hausdorff a démontré (en utilisant l'axiome du choix) qu'il existe une décomposition de la surface S d'une sphère en 4 ensembles disjoints

$$S = A + B + C + D, \qquad (1)$$

où D est un ensemble dénombrable et où

$$A \cong B \cong C \cong B + C \qquad (2)$$

($P \cong Q$ désignant que les ensembles P et Q sont congruents, notamment ici superposables par une rotation autour d'un axe convenablement choisi).

Il en résulte tout de suite que, abstraction faite de l'ensemble dénombrable D, la surface d'une sphère est équivalente par décomposition finie aux surfaces de deux sphères disjointes de même rayon, et on en déduit sans peine une proposition analogue pour la sphère solide.

Il fallut 10 années pour que le « défaut de beauté » de ce paradoxe de Hausdorff (consistant en abstraction d'un ensemble dénombrable de points) soit supprimé. En 1924 S. Banach et A. Tarski ont déduit du paradoxe de

(*) Presentata nella seduta del 13 marzo 1948.

Hausdorff par une voie assez compliquée qu'une sphère solide est équivalente par décomposition finie à deux sphères disjointes de même rayon [1].

Le but de cette Note est de déduire le paradoxe de Banach et Tarski du paradoxe de Hausdorff à l'aide d'un simple lemme, dont la démonstration est tout à fait élémentaire.

A et B étant deux ensembles de points, nous écrirons $A \underset{n}{=} B$ s'il existe des ensembles $A_1, A_2, \cdots, A_n$ et $B_1, B_2, \cdots, B_n$; tels que

$$1^\circ\ A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad , \quad B = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$$

$$2^\circ\ A_k A_l = B_k B_l = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq k < l \leq n,$$

$$3^\circ\ A_k \cong B_k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

S'il existe un nombre naturel n, tel que $A \underset{n}{=} B$, nous dirons que les ensembles A et B sont équivalents par décomposition finie.

LEMME. – S *étant la surface d'une sphère et* D *un sous-ensemble fini ou dénombrable de* S, *on a* $S - D \underset{2}{=} S$.

Démonstration. – Nous pouvons évidemment supposer que S est la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. L'ensemble D étant fini ou dénombrable, on voit sans peine qu'il existe des droites passant par le centre de notre sphère et ne contenant aucun point de D et nous pouvons supposer que l'axe OZ est une telle droite. Il existe donc pour tout point p de D un plan passant par p et par l'axe OZ. Soit $\alpha(p)$ l'angle ≥ 0 et $< 2\pi$ que ce plan forme avec le plan XOZ. β étant un angle donné, désignons par $D(\beta)$ l'ensemble en lequel D est transformé par la rotation de la sphère S de l'angle β autour de l'axe OZ.

On voit sans peine que l'angle β peut être choisi de sorte que les ensembles

$$D, D(\beta), D(2\beta), \cdots, D(k\beta), \cdots \tag{3}$$

soient deux à deux disjoints.

En effet, si, pour $l > k \geq 0$ on a $q \in D(k\beta)\, D(l\beta)$, il existe évidemment des points p_1 et p_2 de D tels que $\alpha(q) = \alpha(p_1) + k\beta - 2k_1\pi$ et $\alpha(q) = \alpha(p_2) + l\beta - 2l_1\pi$, ou k_1 et l_1 sont des entiers, ce qui donne

$$\beta = \frac{\alpha(p_1) - \alpha(p_2) + 2(l_1 - k_1)\pi}{l - k}. \tag{4}$$

L'ensemble de tous les nombres

$$\frac{\alpha(p_1) - \alpha(p_2) + 2m\pi}{n}, \tag{5}$$

où $p_1 \in D$, $p_2 \in D$ et où m est un entier et n un nombre naturel étant dénombrable, il existe évidemment un nombre β $(0 < \beta < 2\pi)$ distinct de tous

(1) « Fundamenta Mathematicae », *6*, p. 62. (Lemme 22).

les nombres (5). Pour un tel nombre β l'égalité (4) est impossible et les ensembles (3) sont deux à deux disjoints, c. q. f. d.

Posons maintenant

$$T = D + D(\beta) + D(2\beta) + \cdots, \text{ et } R = S - T.$$

On aura $T(\beta) = T - D$, donc $T - D \cong T$, et, comme

$$S = T + R, TR = 0, S - D = (T - D) + R,$$

on conclut que $S - D \underset{2}{=} S$ et notre lemme se trouve démontré.

Soit maintenant (1) la décomposition de Hausdorff. D'après (2) on conclut sans peine qu'il existe des décompositions

$$A = A_1 + A_2, B = B_1 + B_2, C = C_1 + C_2, \text{ où } A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$$

sont des ensembles deux à deux disjoints et congruents, et où $A_1 \cong A$. On a donc, d'après (1):

$$S = A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + C_1 + C_2 + D,$$

où les ensembles à droite son deux à deux disjoints. Posons

$$S_1 = A_1 + B_1 + C_1 + D \quad , \quad S_2 = A_2 + B_2 + C_2:$$

on voit sans peine que $S_1 \underset{4}{=} S$ et $S_2 \underset{3}{=} S - D$. Or, d'après notre lemme nous avons $S - D \underset{2}{=} S$, et on démontre sans peine que les formules $X \underset{3}{=} Y$ et $Y \underset{2}{=} Z$ donnent $X \underset{6}{=} Z$.

On a donc $S_2 \underset{6}{=} S$.

Il est ainsi démontré que

$$(6) \qquad S = S_1 + S_2 \quad \text{où} \quad S_1 S_2 = 0, S_1 \underset{4}{=} S \quad \text{et} \quad S_2 \underset{6}{=} S.$$

Autrement dit: la surface S de la sphère peut être décomposée en 10 parties disjointes, dont 4 et 6 donnent respectivement, après des rotations et translations convenables, deux surfaces de sphère de même rayon.

Il est à remarquer que récemment M. R. Robinson a démontré par une voie différente et moins élémentaire que $S = T_1 + T_2$, où $T_1 T_2 = 0$, $T_1 \underset{2}{=} S$ et $T_2 \underset{2}{=} S$ [2].

En prenant, au lieu des points de la surface de la sphère, les rayons correspondants, le centre de la sphère exclu, et vu que la sphère solide dépourvue d'un de ses points est équivalente par décomposition en deux parties à la sphère solide tout entière (ce qu'on déduit sans peine de notre lemme, en plaçant dans la sphère solide la surface d'une sphère contenue dans elle et passant par le point qu'on veut enlever), on conclut facilement de (6) qu'une sphère solide est équivalente par décomposition finie à deux sphères disjointes de même rayon, ce qui présente le paradoxe de Banach et Tarski.

(2) « Fundamenta Mathematicae », *34* (1947), p. 254.

Chimica Organica. — *Contributo allo studio delle strutture elettroniche dei chinoni e delle forme chinoidi.* – II. *Benzochinone* (*). Nota di G. B. Bonino e M. Rolla, presentata (**) dal Socio G. B. Bonino.

In un precedente lavoro (1) abbiamo applicato allo studio della struttura molecolare dei chinoni e delle forme chinoidi il cosiddetto metodo degli « orbitali », tenendo conto nei calcoli di due valori distinti dell'integrale di risonanza corrispondenti ai legami fra atomi contigui e cioè un valore β_d corrispondente ad un tipo di legame « corto » e di un valore β_s corrispondente ad un tipo di legame « lungo ». Questi legami vengono a stabilirsi nella risonanza delle 8 funzioni d'onda p_z, la cui perturbazione costituisce la base del problema trattato. I legami di tipo « corto » corrisponderebbero ai « doppi legami » della ordinaria formulazione chimica organica e quelli di tipo « lungo » ai rispettivi « legami semplici ».

Nel citato lavoro siamo giunti ad esprimere le energie dei vari livelli elettronici « leganti ed antileganti » e le energie minime « di eccitazione » in funzione del rapporto β_d/β_s tra gli integrali di risonanza corrispondenti ai due « tipi » di legame.

Onde giungere a risultati concreti ed applicabili ai diversi casi, occorre precisare il valore del detto rapporto β_d/β_s. Si presenta perciò il problema di ricollegare i valori di β_d e β_s a grandezze sperimentalmente accessibili. Utilizziamo a ciò un metodo proposto da Lennard Jones (2) ricordando che la differenza fra l'energia del doppio legame C = C tipico dell'etilene (che indicheremo con E_d°) e quella del legame semplice tra C e C nell'etano (che indicheremo con E_s°) è appunto da attribuirsi all'interazione delle funzioni d'onda p_z degli atomi contigui e cioè al cosiddetto « legame π ». Perciò scriveremo in generale:

$$-2\beta = E_d - E_s .$$

Ma nei composti che noi studiamo l'energia dei singoli legami non è la stessa che caratterizza rispettivamente i legami tipici dell'etilene e dell'etano. Nel caso dei chinoni, dalle misure di Robertson (3) sappiamo infatti che nel parachinone la lunghezza dei legami « corti » e quella dei legami « lunghi » nella molecola non è eguale alle lunghezze dei legami tipici. Occorrerà perciò, per calcolare opportunamente l'energia di risonanza delle funzioni d'onda p_z nei vari legami, tener conto del lavoro di compressione o di estensione che occorre mettere in giuoco per portare i legami « tipici » a lun-

(*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica Fisica ed Idrologica del C. N. R., presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » della Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1948.

(1) Questi « Atti ». Seduta del 10 gennaio 1948.

(2) Lennard Jones, « Proc. Roy. Soc. », London, A *158*, 280 (1937).

(3) Robertson, « Chem. Rev. », *16*, 430 (1935).

ghezze eguali a quelle riscontrate per i legami nelle molecole dei composti che si vogliono studiare. Si riporta così il calcolo degli integrali di risonanza β_d e β_s a misure sperimentali di distanze interatomiche nelle molecole e di « forze di richiamo » fra gli atomi. Le curve di energia potenziale fra due atomi legati nella molecola potrebbero essere utilmente rappresentate da funzioni di Morse [4], ma, trattandosi di differenze piccole delle lunghezze di legame e corrispondenti al massimo a pochi decimi di Å, è sufficiente sostituire le curve di Morse con funzioni paraboliche e scrivere:

$$(1)\qquad \begin{cases} 1^\circ \text{ per il legame di tipo « lungo »: } E_s = E_s^\circ + k_s (x - s)^2 \\ 2^\circ \text{ per il legame di tipo « corto »: } E_d = E_d^\circ + k_d (x - d)^2 \end{cases}$$

dove E_s ed E_d sono le energie effettive dei due tipi di legame nel composto studiato, E_s° e E_d° sono rispettivamente le energie dei legami tipici semplice e doppio dedotti da misure di energie di legame sull'etano e sull'etilene; x rappresenterebbe la lunghezza effettiva del legame (semplice o doppio) al quale si riferisce lo speciale valore di β_i che si vuol calcolare e s e d rispettivamente le lunghezze dei legami semplici e doppi tipici (nel nostro caso etano ed etilene). Le costanti k_s e k_d ci rappresentano le forze di richiamo corrispondenti agli oscillatori costituiti dai rispettivi legami tipici quali si possono avere dagli studi degli spettri ultrarossi e dagli spettri Raman. Per esempio [5] nel caso dell'etilene si ha $k_d = 4{,}9 \cdot 10^5$ dine/cm e nel caso dell'etano $k_s = 2{,}48 \cdot 10^5$ dine/cm.

Per il parabenzochinone le misure röntgenografiche di Robertson [3] mostrano un tipo di legame « lungo » corrispondente ai legami semplici dell'ordinaria formula chimica e due tipi di legami « corti » corrispondenti rispettivamente ai legami C=C e C=O della formula chimica. Per i legami tra carbonio e carbonio nel parachinone le misure di Robertson dànno: $x_d = 1{,}32 \cdot 10^{-8}$ cm; $x_s = 1{,}50 \cdot 10^{-8}$ cm. Per i legami di tipo « corto » tipici si ha [6] $d = 1{,}33 \cdot 10^{-8}$ cm (distanza del C=C nell'etilene) e $s = 1{,}54 \cdot 10^{-8}$ cm (distanza del C — C nell'etano) [7]. Così per le (1) si avrà:

$$-2\beta_s = E_d^\circ - E_s^\circ + \{k_d (x_s - 1{,}33)^2 - k_s (x_s - 1{,}54)^2\}\, 10^{-16} \text{ ergs}$$

$$-2\beta_d = E_d^\circ - E_s^\circ + \{k_d (x_d - 1{,}33)^2 - k_s (x_d - 1{,}54)^2\}\, 10^{-16} \text{ ergs.}$$

Le x_i in queste formule sono moltiplicate per 10^8. Utilizzando i valori di x_d e x_s dedotte dalle misure röntgenografiche di Robertson nel parabenzochinone per i legami C — C e C = C, ed accettando il valore di $E_d^\circ - E_s^\circ = -55{,}7$ Kcal/mol. [8], si ha:

(4) P. M. Morse, « Phys. Rev. », *34*, 57 (1929).

(5) Sutherland e Dennison, « Proc. Roy. Soc. », London, A *148*, 257, 264 (1935).

(6) Penney, « Proc. Roy. Soc. », London, A *158*, 317 (1937).

(7) Sidgwick, « Covalent link in chemistry », p. 82; Cornell University Press. Ithaca (1933).

(8) Hückel, « Physical Soc. », Int. Conf. of Phys., *25* (1935).

$$-2\beta_d = -55{,}7 + \{4{,}9(1{,}32-1{,}33)^2 - 2{,}48(1{,}32-1{,}54)^2\}\,1{,}4477\cdot 10^2 \text{ Kcal/mol.}$$

$$2\beta_s = -55{,}7 + \{4{,}9(1{,}50-1{,}33)^2 - 2{,}48(1{,}50-1{,}54)^2\}\,1{,}4477\cdot 10^2 \text{ Kcal/mol.}$$

Di qui si deduce per il parabenzochinone:

$$\beta_d = 36{,}500 \text{ Kcal/mol.} \quad , \quad \beta_s = 17{,}887 \text{ Kcal/mol.}$$

ed il rapporto $\beta_d/\beta_s = 2{,}04$.

Le equazioni secolari del problema, risolte in una precedente Nota, possono tener conto già di due tipi di integrali di risonanza e rappresentano una approssimazione più ragionevole di quella ordinariamente utilizzata nei lavori di Hückel [8] nello studio delle sostanze aromatiche a nuclei condensati, dove si pongono tutti uguali (come nel caso del benzolo) gli integrali di risonanza relativi ai vari legami. Una terza approssimazione che tenga conto di tre valori degli integrali di risonanza e che cioè non trascuri le differenze tra le lunghezze dei legami « corti » C = C e C = O è in corso di studio. In questa Nota perciò riportiamo i risultati ottenuti calcolando gli integrali β_s di risonanza di tipo « lungo » dalla lunghezza sperimentale del legame C — C semplice dedotto dalle misure röntgenografiche per il parachinone e l'integrale β_d relativo al legame di tipo « corto » dalla lunghezza del doppio legame C = C del parachinone dedotta dalle stesse misure nel modo testè esemplificato. In mancanza di dati sperimentali opportuni, questi stessi valori sono stati utilizzati in via di primo avvicinamento anche per il calcolo dell'ortobenzochinone.

La risoluzione delle equazioni secolari ci ha portato nella Nota precedente ad esprimere le varie energie dei livelli con dei coefficienti che moltiplicano l'integrale di risonanza β_s. Abbiamo ritenuto più comodo in questi lavori esprimere le stesse energie in funzione dell'integrale di risonanza $\beta_{benz.}$ corrispondente al « legame benzenico ». Con ciò i valori sottoriportati possono essere confrontati con i valori delle energie medie di risonanza calcolati da Hückel ed altri AA. ed espresse appunto in funzione di un unico valore $\beta_{benz.}$

Il valore di $\beta_{benz.}$ si calcola facilmente dalla distanza dei carboni nell'anello benzenico determinata da Pauling e Brockway [9] in 1,39 Å. Perciò:

$$-2\beta_{benz.} = -55{,}7 + \{4{,}9(1{,}39-1{,}33)^2 - 2{,}48(1{,}39-1{,}54)^2\}\,1{,}4477\cdot 10^2 \text{ Kcal/mol.}$$

da cui $\beta_{benz.} = 30{,}6$ Kcal/mol.

Le radici ξ_i delle equazioni secolari precedentemente dedotte vanno perciò moltiplicate per il rapporto $\beta_s/\beta_{benz.}$ onde esprimere le energie dei livelli con dei coefficienti generici ρ_i che moltiplicano il valore dell'integrale di scambio $\beta_{benz.}$:

$$\varepsilon_i = \xi_i \beta_s = \left[\xi \frac{\beta_s}{\beta_{benz.}}\right] \beta_{benz.} = \rho_i \beta_{benz.}$$

Nella tabella seguente sono riportati questi valori che permettono di valutare immediatamente le energie dei vari legami.

(9) Pauling e Brockway, « J. Chem. Phys. », *2*, 867 (1934).

$\beta_d/\beta_s = 2{,}04$ $\beta_s/\beta_{benz.} = 0{,}58454$ $\beta_s = 17{,}887$ $\beta_d = 36{,}500$ $\beta_{benz.} = 30{,}6$ Kcal/mol.

Composti	livelli di antilegame				livelli di legame			
	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	ρ_7	ρ_8
Parachinone	1,8361	1,3352	1,1924	0,6916	— 0,6916	— 1,1924	— 1,3352	— 1,8361
Ortochinone	1,8401	1,2723	1,2556	0,6878	— 0,6878	— 1,2556	— 1,2723	— 1,8401

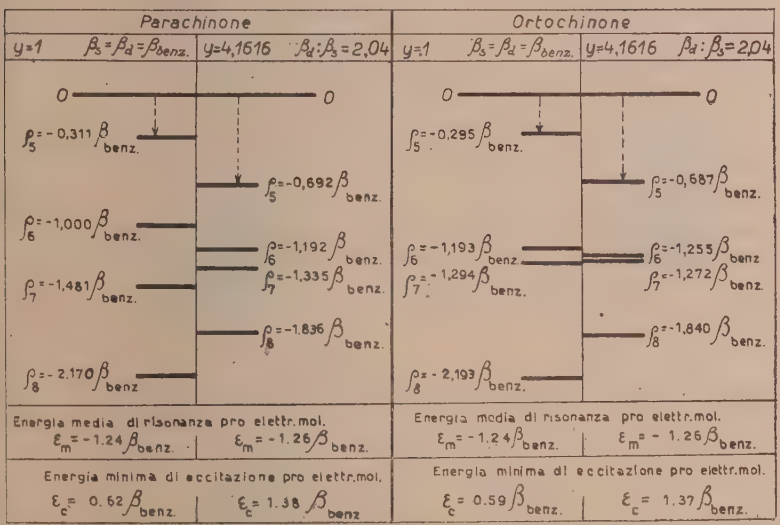
Da questi valori possiamo dedurre l'energia media di risonanza $\bar{\varepsilon}$ pro elettrone p_z ricordando che nella molecola allo stato fondamentale a ciascuno dei quattro livelli « leganti » si attribuiscono due elettroni a spin antiparallelo. Perciò nel caso dei benzochinoni si avrà:

$$\varepsilon = \left(\frac{\Sigma\, 2\, \rho_i}{8}\right)\beta_{benz.}$$

Nella tabella seguente sono riportati i valori di queste energie medie di risonanza pro elettrone, le energie relative al più alto livello elettronico occupato nella molecola allo stato fondamentale e quelli corrispondenti al più basso livello elettronico non occupato (pure per la molecola nello stato fondamentale). Per differenza fra queste due ultime colonne si ha l'energia minima di eccitazione molecolare che è data nella ultima colonna.

Composti	Energia media di risonanza per elettrone (p_z) $\bar{\varepsilon}/\beta_{benz.}$	Molecola allo stato fondamentale: energia di risonanza (p_z) del livello più alto occupato $\varepsilon_5/\beta_{benz.}$	Molecola allo stato fondamentale: energia di risonanza (p_z) del livello più basso non occupato $\varepsilon_4/\beta_{benz.}$	Energia minima di eccitazione (p_z) $\varepsilon_e/\beta_{benz.}$
p·benzochinone $\frac{\beta_d}{\beta_s} = 1$	— 1,24	— 0,311	+ 0,311	0,622
p·benzochinone $\frac{\beta_d}{\beta_s} = 2{,}04$	— 1,26	— 0,691	+ 0,691	1,383
o·benzochinone $\frac{\beta_d}{\beta_s} = 1$	— 1,24	— 0,294	+ 0,294	0,589
o·benzochinone $\frac{\beta_d}{\beta_s} = 2{,}04$	— 1,26	— 0,687	+ 0,687	1,375
benzene $\frac{\beta_d}{\beta_s} = 1$	— 1,33	— 1,00	+ 1,00	2,000
naftalina id. id.	— 1,37	— 0,62	+ 0,62	1,24
difenile id. id.	— 1,37	— 0,71	+ 0,71	1,42
fenantrene id. id.	— 1,39	— 0,605	+ 0,605	1,21
antracene id. id.	— 1,38	— 0,41	+ 0,41	0,82
butadiene	— 1,12	— 0,62	+ 0,62	1,24
esatriene	— 1,16	— 0,44	+ 0,44	0,88

L'esame della tabella porta alle seguenti conclusioni. La seconda approssimazione ($\beta_d/\beta_s = 2{,}04$) che distingue nel calcolo dei chinoni due tipi di legami di lunghezza diversa non porta a risultati sensibilmente differenti nelle energie medie elettroniche di risonanza rispetto al calcolo di prima approssimazione, nel quale si ponevano tutti uguali gli integrali di risonanza. Ed in particolare questo calcolo rileva che anche tenendo valori diversi fra loro degli integrali di risonanza relativi ai due tipi di legami, l'energia di risonanza media pro elettrone resta notevolmente più bassa della stessa energia che si calcola nel caso di strutture tipicamente aromatiche come il benzolo, la naftalina ecc. L'energia di risonanza nei chinoni starebbe fra quella dei corpi olefinici e quella dei corpi aromatici. Ma si osserva che una più intensa risonanza fra i



legami semplici e doppi della molecola chinonica (e conseguente attenuazione del carattere di « doppio legame » dei secondi ed accentuazione dello stesso carattere nei primi) resta senza influenza calcolabile sull'energia media elettronica di risonanza. Dunque, entro i limiti delle approssimazioni usate per il calcolo, variazioni relativamente notevoli nelle reciproche distanze di legame non portano differenze nell'energia media di risonanza delle funzioni d'onda. Viceversa, come si può rilevare dall'ultima colonna della tabella, la variazione del carattere di « doppio legame » dei vari legami nella molecola porta delle sensibili e non trascurabili differenze nelle energie di eccitazione. Dunque, la maggiore o minore localizzazione dei doppi legami se non mostra (attraverso a questi calcoli) di avere conseguenze sul contenuto energetico delle molecole allo stato fondamentale, rivela invece una notevole influenza sulla energia della molecola eccitata e perciò sul comportamento chimico cinetico della stessa. Questo aspetto del problema verrà ripreso in prossimi lavori onde chiarire alcune apparenti contraddizioni tra i risultati

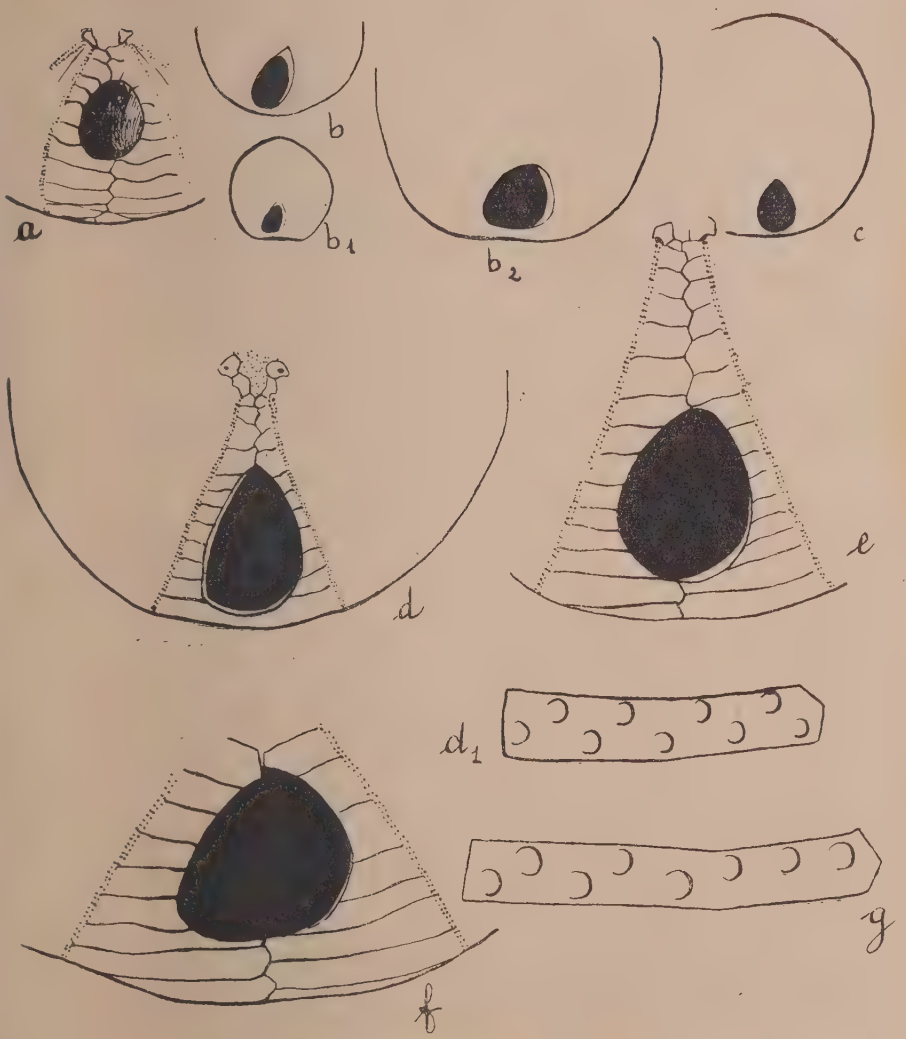
di misure termochimiche e chimico–cinetiche relative a gruppi di sostanze carboniliche chelate. La figura riproduce le osservazioni sovrascritte, graficizzando i livelli elettronici p_z nel caso dei due chinoni orto e para, sia con l'approssimazione $\beta_d/\beta_s = 1$ sia con quella $\beta_d/\beta_s = 2{,}04$, e cioè in due casi di differente grado di localizzazione dei doppi legami nelle molecole. I diagrammi mostrano nettamente che aumentando la localizzazione dei doppi legami molecolari si ottiene un rinserrarsi dei diversi livelli intorno al valore medio e quindi un elevarsi dell'energia minima di eccitazione, pur restando pressochè costante l'energia media molecolare di risonanza.

Un punto che merita un ultimo cenno di discussione è quello portato dal fatto che le energie medie di risonanza nella forma para e nella forma orto del benzochinone risultano in ambo le approssimazioni pressochè le stesse. Così le energie minime di eccitazione, indipendentemente dalla localizzazione dei doppi legami molecolari, non mostrano differenze fra le due forme orto e para. Probabilmente soltanto da un esame più approfondito del problema, che possa tener conto delle differenze tra i legami C = O nell'orto e nel parabenzochinone, si potranno trarre degli elementi per una interpretazione delle differenze di comportamento chimico tra le due forme benzochinoniche. Sarebbe perciò necessario a questo punto avere una conoscenza sperimentale chimico–fisica dell'orto–benzochinone assai più approfondita e completa di quella che non ci possa ancora esser data dall'insufficiente letteratura relativa a questo chinone.

Paleontologia. — *Pygasteridi del Cenomaniano della Somalia*(*). Nota(**) del Corrisp. G. Checchia–Rispoli.

I rappresentanti di questo importantissimo gruppo di Echinidi, eccettuati gli *Holectypus* piuttosto frequenti a raccogliersi nei vari livelli del Cretaceo della Somalia, costituiscono delle rarità. Nel materiale paleontologico raccolto dalla Missione geologica dell'AGIP sono presenti solamente cinque esemplari: uno va riferito a *Pygaster truncatus* Agassiz e quattro ad *Anorthopygus orbicularis* Grateloup. Entrambe le specie sono, come è noto, caratteristiche della formazione cenomaniana ed ora vengono segnalate per la prima volta in tutto il vasto territorio somalo. Il loro rinvenimento riesce perciò di grande interesse, sia per l'alto valore cronologico di esse, rappresentate da esemplari di sicura determinazione, sia perchè permette di estenderne notevolmente la distribuzione geografica. Ed infatti *Pygaster truncatus* era finora conosciuto in pochi punti della Francia e della Spagna; mentre *Anorthopygus orbicularis* ha una maggiore diffusione, essendo stato trovato in varie località europee ed in tutto il Nord Africa.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Paleontologia dell'Università di Roma.
(**) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1947.



Anorthopygus orbicularis Grat. fig. *a* da de Loriol (*Description de la faune crétacique du Portugal: Echinodermes.* Tav. XIII, fig. 6 *c*, 1887–88); figg. *b* , b_1 , b_2 da Cotteau e Triger (*Echinides de la Sarthe*, tav. XXXI, fig. 2, 8, 9. 1859); fig. *c* da Fourtau (*Cat. des invértebrés fossiles de l'Égypte. Terrains Crétacés*, tav. II, fig. 5 *a*, 1921); figg. *d*, *f*, *e* dagli esemplari somali, ingr. 3 volte; fig. d_1 placca interambulacrale, ingr. 7 volte; fig. *g*, *Pygaster truncatus* Ag. placca interambulacrale, ingr. 6 volte.

A piè di pagina della presente Nota è riportato l'elenco delle pubblicazioni nelle quali è illustrato il materiale echinitico del Cretaceo della Somalia Italiana raccolto dalla Missione dell'A.G.I.P. (1).

Descrizione delle Specie.

Pygaster truncatus Agassiz, 1840.

(Tav. I, fig. *g* e Tav. II, figg. 1, 1 *a*, 1 *b* e 1 *c*).

1840. – *Pygaster truncatus* Agassiz, *Cat. syst. Ectyp. foss*, p., 7.
1842. – *Pygaster truncatus* Desor, *Monog. des Galérites*, p. 82, tav. XI, figg. 8–10.
1857. – *Pygaster truncatus* Pictet, *Traité de Paléont.*, to. IV, p. 229, tav. XCV, fig. 16.
1859. – *Pygaster truncatus* Cotteau et Triger, *Échinides de la Sarthe*, p. 175, tav. XXX, figg. 12–16.
1862–67. – *Pygaster truncatus* Cotteau, *Paléont. franc., Terr. Crét., Échinides*, to. VII, p. 70, tav. 1021.

Descrizione. – L'esemplare di questa specie qui figurato, l'unico della collezione, è in buonissimo stato di conservazione. Esso misura mm. 40 per il diametro antero-posteriore, mm. 43 per quello trasversale e mm. 18 per l'altezza. Il suo contorno è subpentagonale, circolare avanti e troncato indietro; la faccia superiore è poco elevata e largamente arrotondata; la inferiore è subpulvinata; il bordo è gonfio.

L'apparecchio apicale è subcentrale, poco esteso, con la placca madreporica fortemente prolungata indietro sino a raggiungere l'ampio periprotto e circondata dalle altre placche. Pori genitali largamente aperti, molto avvicinati, disposti a trapezio. Aree ambulacrali strette: quelle del *trivium* diritte, quelle del *bivium* un po' incurvate al di sopra del periprotto. Zone porifere strette, composte di numerose coppie di pori circolari separati da un grosso granulo. Sulla faccia inferiore le coppie si distanziano un poco fra di loro ed i pori sono disposti obliquamente. Spazi interzonali ornati di quattro serie di tubercoli perforati e scrobicolati: le serie esterne sono spostate verso le zone porifere ed i tubercoli che le formano sono un po' più piccoli di quelle delle serie interne. I tubercoli delle serie esterne alternano con quelli delle serie interne, le quali scompaiono avvicinandosi alla sommità apicale ed al peristoma. I tubercoli sono impiantati su ogni tre placche, e lo spazio lasciato libero è occupato da fini granuli, che si dispongono in cerchi regolari intorno agli scrobicoli.

(1) G. Checchia-Rispoli, *Osservazioni su alcuni Pseudodiademinae*, in « Rendiconti R. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. IV, 1943; Id., *Di due nuovi generi di Echinidi del Cretaceo della Somalia*, in « Boll. R. Uff. geologico d'Italia », vol. LXVI, 1944; Id., *Monografia degli « Epiaster » della Somalia*, in « Mem. Accad. Naz. d. Lincei », ser. VIII, vol. I, 1947; Id., *Su alcuni « Pseudodiademinae » del Cretaceo della Somalia*, in « Mem. Accad. Naz. dei Lincei », ser. VIII, in corso di stampa, 1948; id. « *Salenia Hawkinsi* », *nuovo echinide del Cenomaniano della Somalia*, in « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. IV, fasc. 2, 1948; A. M. Maccagno, *Sul genere « Somaliaster Hawkins »*, in « Boll. Soc. geol. It. », vol. LX, 1941; A. Alberti, *Su di una nuova specie di « Heteraster »*, in « Boll. Uff. Geol. d'Italia », vol. LXX, 1947.

Aree interambulacrali molto larghe, ornate di numerose serie di tubercoli, che verso l'ambito ammontano a 16, mentre verso l'apice e verso il peristoma si riducono a due. Nel loro insieme i tubercoli formano delle serie subregolari trasversali; la disposizione che essi assumono su ogni placca è quella indicata nella figura schematica (v. Tav. I, fig. *g*). Come nelle aree interambulacrali, lo spazio lasciato libero è occupato da granuli minuti, che hanno la stessa disposizione di quelli ambulacrali.

Periprotto molto sviluppato, occupante tutto lo spazio compreso tra l'apice ed il bordo; di forma ovale, appuntito in alto, arrotondato in basso, ove produce una sensibile insenatura percettibile anche dalla faccia inferiore.

Peristoma depresso, bene sviluppato, subcentrale, elittico, trasverso, munito di larghi e profondi intagli branchiali.

RAPPORTI E DIFFERENZE – *Pygaster truncatus* è l'ultimo rappresentante di un genere che visse abbondante nei terreni giurassici a cominciare dal Charmouthiano con *Pygaster Reynesi* Desor, che rappresenta il primo exocisto comparso sulla Terra. Il genere è sconosciuto finora in tutto il Cretaceo inferiore e si ritrova nel Cenomaniano con *P. truncatus*, ove si estingue. Sino ad alcuni anni or sono era questa l'unica specie cretacea conosciuta di *Pygaster;* nel 1909 il de Loriol istituì per il Cenomaniano della Siria il *Pygaster Zumoffeni*, specie molto vicina a *P. truncatus* [2]. Infatti l'esemplare siriano si distingue soltanto per caratteri di forma, presentando un insieme più depresso, appiattito e molto meno gonfio sul bordo; per il contorno anteriore più ristretto e quello posteriore più intaccato nel mezzo. Più che una specie a sè potrebbe trattarsi di una varietà del *P. truncatus*.

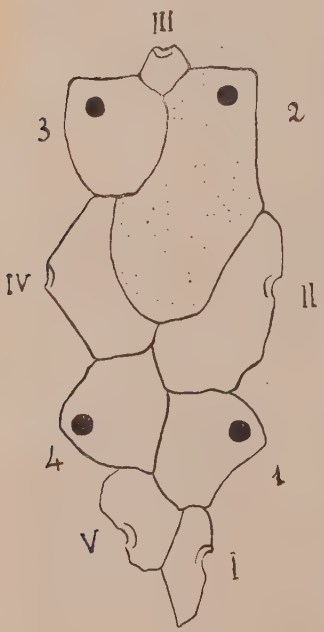


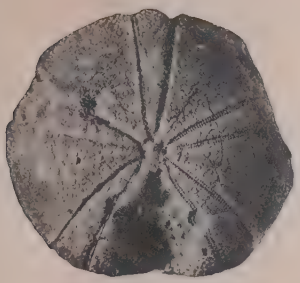
Fig. 1. – *Holaster suborbicularis*? apparecchio apicale.

P. truncatus è poco diffusa, anzi si può dire rara in tutto il Cenomaniano; finora era segnalata in pochissime località della Francia ed a Portugalete in Biscaglia (Spagna); perciò il ritrovamento fatto ora in Somalia riesce importantissimo.

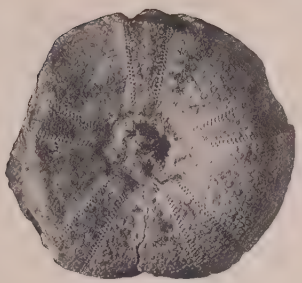
LOCALITÀ. – Uebi Scebeli; n. 636 B. – Bur Bitale, lumachella ad *Orbitolina* [3].

(2) DE LORIOL, *Notes sur quelques espèces des Échinides fossiles de Syrie*, in «Revue Suisse de Zoologie», to. 17, p. 238, pl. 4, figg. 11–13, 1909.

(3) Nella medesima località insieme a *Pygaster truncatus* si trova un esemplare di *Holaster* in cattivo stato di conservazione, del quale non ho voluto trascurare lo studio perchè

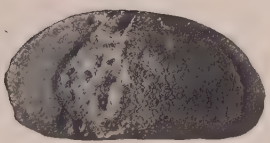


1a

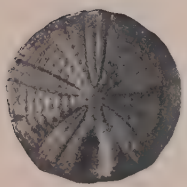


1

1b

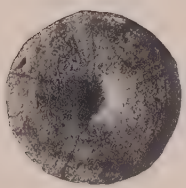


1c

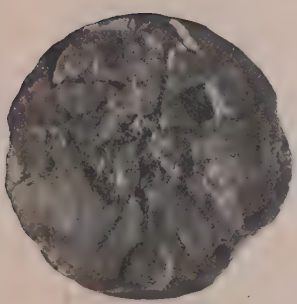


2a

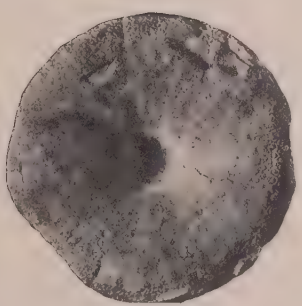
2b



2



3a



3

Fig. 1 - *Pygaster truncatus* Ag. faccia abactinale; 1ª, lo stesso dalla faccia actinale; 1ᵇ, lo stesso visto di profilo (antero-posteriore); 1ᶜ, lo stesso visto dalla faccia posteriore.

Fig. 2 - *Anorthopygus orbicularis* Grat. esemplare più piccolo visto dalla faccia abactinale; 2ª, lo stesso dalla faccia actinale; 2ᵇ, lo stesso visto di profilo.

Fig. 3 - *Anorthopygus orbicularis.* Un altro esemplare molto più grande visto dalla faccia abactinale; 3ª, lo stesso dalla faccia actinale.

Anorthopygus orbicularis Grateloup (1836).

(Tav. I, figg. *a*, *b*, b_1, b_2, *c*, *d*, d_1, *f* e Tav. II, figg. 2, 2 *a*, 2 *b*, 3 e 3 *a*).

1836. – *Nucleolites orbicularis* GRATELOUP, *Mém. sur les Oursins fossiles*, p. 78, pl. II, fig. 21.
1842. – *Pygaster costellatus* DESOR, *Monogr. des Galérites*, p. 81, tav. XII, figg. 1–4.
1859. – *Anorthopygus orbicularis* COTTEAU et TRIGER, *Echin. de la Sarthe*, p. 177, tav. XXXI, figg. 1–9.
1862–67. – *Anorthopygus orbicularis* COTTEAU, *Terr. Crét., Echinides*, p. 63, tav. 1012.
1887–88. – *Anorthopygus orbicularis* DE LORIOL, *Description de la faune crétacique du Portugal; Echinodermes*, p. 75, pl. XV, figg. 1–6.
1921. – *Anorthopygus orbicularis* CHECCHIA-RISPOLI, *Fauna del neocretacico della Tripolitania; Echinidi*, p. 13.

DESCRIZIONE. – Questa specie è rappresentata nella collezione dei fossili della Somalia da 4 esemplari, dei quali due frammentari e due ben conservati; di questi ultimi il più piccolo è in perfettissimo stato di conservazione; ma anche i due primi sono sicuramente determinabili, poichè conservano intatto il periprotto, che insieme alla posizione che esso occupa nel guscio, sono i caratteri essenziali del genere *Anorthopygus*.

Il più piccolo, qui figurato, misura un diametro di mm. 25 ed una altezza di mm. 9, si tratta quindi di un individuo ancora giovane; il suo contorno è circolare, leggermente pentagonale; la faccia superiore è molto depressa ed ha un profilo un po' conico; la inferiore è declive verso il peristoma; il bordo è assottigliato, ma non tagliente.

Apparecchio apicale centrale, bene sviluppato: la madreporite, che è la più estesa delle placche genitali, occupa il centro dell'apparecchio e si prolunga sino all'area interambulacrale posteriore; le ocellari sono ben distinte e a contatto con la madreporite, meno l'anteriore di destra, che è compresa nell'angolo formato dalle genitali 2 ed 1.

è il solo esemplare del genere finora raccolto in tutta la Somalia ed anche per qualche importante particolarità che esso presenta. L'esemplare è in gran parte ricoperto da un calcare durissimo, dal quale non mi è stato possibile liberarlo interamente. Ho potuto tuttavia studiare l'apparecchio apicale completamente conservato. Questo è del tipo *allungato*, come nel genere, ma si distingue per il grandissimo sviluppo della madreporite, la quale invece in tutte le specie del genere raggiunge su per giù le stesse dimensioni delle altre placche genitali, mentre nell'esemplare in esame detta placca si spinge lungamente indietro tra le due ocellari anteriori, senza però riuscire a separarle completamente. Questo particolare, che resta però isolato, denoterebbe una certa tendenza al tipo etmofracto (v. fig. 1 nel testo).

Riguardo a questo esemplare posso aggiungere che il solco anteriore nullo al principio, si approfondisce verso l'ambito, che intacca largamente e profondamente, prolungandosi distinto sino al peristoma. Gli ambulacri pari, in parte visibili, sono molto aperti alle estremità, con le zone porifere posteriori flessuose e più larghe delle anteriori: i pori sono stretti, allungati e trasversi in ogni zigoporo; questi ultimi sono separati da larghe costole granulose. Null'altro posso aggiungere alla descrizione dell'esemplare e quindi mi è impossibile determinarlo con sufficiente precisione. Tuttavia per il solco anteriore profondo, per le zone porifere a pori trasversi, e per il plastron sporgente, esso mi pare possa rientrare nel gruppo dell'*Holaster suborbicularis*, che ha una grandissima diffusione in tutto il Cenomaniano.

Le aree ambulacrali sono strette: quelle del *trivium* diritte, quelle del *bivium* appena incurvate al di sopra del periprotto. Zone porifere strettissime, appena depresse, composte di coppie di pori molto regolarmente sovrapposte ed avvicinate, con pori piccolissimi, circolari, e vicini fra di loro. Le aree sono ornate di tubercoli profondamente avvicinati: verso l'ambito si contano quattro serie verticali, regolari, delle quali le sole esterne, adiacenti alle zone porifere, si estendono dall'apice al peristoma. I tubercoli di questa serie alternano con quelli delle serie interne, come in *Pygaster*. Sulla faccia inferiore i tubercoli aumentano un po' di dimensioni. Linea mediana nuda ed un po' depressa.

Aree interambulacrali larghissime, composte di placche strette ed un po' turgide nel mezzo. Verso l'ambito le serie sono numerose, ma le due mediane solamente si estendono dall'apice al peristoma. Linea mediana nuda e molto depressa. Su ogni placca i tubercoli formano due serie trasversali ed inoltre sono disposti diagonalmente come nella figura schematica riprodotta nella tavola I, fig. d_1.

Periprotto sviluppato, piriforme, appuntito in alto, slargato alla base; esso s'inizia circa verso la metà della quarta placca coronale e si arresta un po' al di sopra del margine. Nell'insieme l'asse del periprotto è leggermente obliquo a destra.

Peristoma piccolo, profondo, circolare, munito di forti intagli branchiali.

Rapporti e differenze. – L'esemplare ora descritto si distingue dagli altri che l'accompagnano per la forma poco irregolare del periprotto e per la poca obliquità di esso, tanto che in un primo momento si potrebbe pensare ad una specie differente di *Anorthopygus*. Così certi autori, che hanno avuto tra le mani esemplari identici al nostro li hanno specificamente separati. Ma un esame sulla variabilità di quest'organo, sia riguardo alla forma che alla sua posizione, compiuto su un gran numero di individui, induce a ritenere queste modificazioni dipendenti piuttosto dallo sviluppo degli individui. Noi oggi conosciamo esemplari di questa caratteristica specie di tutte le età: da meno di 20 mm. di diametro a quelli che ne raggiungono ben 75 mm. Io ho qui riprodotto alcune figure schematiche della parte del guscio, che ci interessa, riportandole dai lavori del Cotteau e del de Loriol, e dagli altri esemplari della collezione della Somalia, in cui si osserva che il periprotto dalla forma subtriangolare passa a quella subquadratica e che da una obliquità molto prossima alla linea mediana dell'area passa a quella fortemente spostata a destra di detta linea. Inoltre durante lo sviluppo il periprotto sembra allontanarsi dall'apparecchio apicale per spostarsi verso il margine del guscio. Il Cotteau, il de Loriol ed il Lambert considerano come variazioni individuali tutte queste modificazioni, in quanto che per gradi si passa a questi vari aspetti del periprotto.

Il genere *Anorthopygus* è esclusivo del Cenomaniano e comprende due sole specie ben distinte: *A. orbicularis* ed *A. Michelini*, molto più raro del primo.

Nell'*Essai* Lambert e Thiéry vi riferiscono altre due specie, cioè: *A. excisus* Lambert ed *A. Zumoffeni* de Loriol, anch'esse del Cenomaniano. Il primo, dei dintorni di Santander, è stato riportato più tardi dallo stesso autore ad *A. Michelini*. Il secondo è stato descritto per il Cretaceo del Libano, turoniano secondo de Loriol, col nome di *Pseudopileus* (4). Riguardo alla provenienza di questo echinide, il Fourtau ha in seguito dimostrato che gli strati da cui provengono *Linthia Fraasi*, *Hemicidaris ghazirensis* e *Pseudopileus Zumoffeni* sono sicuramente cenomaniani (5). Per quanto riguarda il riferimento generico, ricordo che *Pseudopileus* è stato istituito su un esemplare, che è un modello interno silicizzato: ora per quanto riesca sempre difficile una determinazione basata su modelli interni, tuttavia dalle figure e dall'accurata descrizione del de Loriol si può escludere la sua appartenenza ad *Anorthopygus* per la forma e per la posizione del periprotto, che non è affatto obliquo, ed è regolarmente ovale e trasverso con l'asse maggiore circa il doppio del minore. Inoltre, mentre in *Anorthopygus* il periprotto è supero e perciò visibile solo dalla faccia superiore, in *Pseudopileus* è posteriore e visibile anche dalla faccia inferiore. Infine il guscio in *Anorthopygus* è assottigliato posteriormente, in *Pseudopileus* invece è molto elevato anche in questa parte ed il periprotto occupa tutta l'altezza del guscio.

Il de Loriol avvicina più esattamente il suo genere a *Pileus* del Coralliano, che ha però il periprotto meno trasverso e nettamente supero e non visibile affatto dalla faccia inferiore. Io ritengo perciò, come la pensa anche il Fourtau, di mantenere distinto *Pseudopileus* da *Anorthopygus*.

Anni or sono il Fourtau descrisse per l'Egitto un *Anorthopygus atavus*, che attribuisce all'Albiano superiore (6). Il Lambert non ritiene valida questa pretesa specie, che non esita a riunire ad *A. orbicularis* e ritiene cenomaniani gli strati da cui esso proviene (7). Sicchè sino a qualche anno fa erano conosciute due specie ben distinte di *Anorthopygus*, entrambe del Cenomaniano. Più recentemente l'Hawkins (8) descrisse per la Somalia britannica un *Anorthopygus paradoxus* attribuito con dubbio al Senoniano superiore.

L'autore distingue questa specie da *A. orbicularis* per il grande sviluppo e per la posizione quasi regolare del periprotto e per la tubercolazione interradiale, la quale differisce da quella di *Anorthopygus*, mentre ripete quella di *Pygaster*, cioè su ogni placca verso l'ambito esistono due paia oblique di tubercoli adradiali e tre tubercoli in posizione trasversale verso la sutura mediana dell'area. A questo carattere l'Hawkins dà maggiore importanza; infatti il periprotto di *A. paradoxus* non è effettivamente simmetrico, come mostrano le figure che accompagnano la descrizione della specie ed è comple-

(4) De Loriol, *Notes pour servir à l'étude des Échinodermes*, fasc. IX, 1901.

(5) Fourtau, *Contribution à l'étude des Échinides fossiles de la Syrie*, 1912.

(6) Fourtau, *Terrains Crétacés*. 3me Partie: *Échinodermes* (Supplément), 1921.

(7) Lambert, *Étude sur les Échinides fossiles du nord de l'Afrique*. « Mém. de la Soc. Géol. de France », N. S., vol. VII, fasc. 2, p. 192, Parigi, 1931.

(8) Hawkins, *Cretaceous Echinoidea*, in *The Mesozoic Paleontology of British Somaliland*. 1935.

tamente separato dall'apice per poterlo avvicinare a *Pygaster*. La disposizione dei tubercoli suggerisce all'Hawkins alcune importanti considerazioni sulla posizione sistematica di *A. paradoxus*, ed egli pensa che si tratti molto probabilmente di una inversione atavica di *Anorthopygus*.

Il rinvenimento di questo echinide è davvero importante, perchè verrebbe ad estendere di molto la distribuzione geologica del genere *Anorthopygus*, che finora pareva limitata esclusivamente al Cenomaniano. L'*A. paradoxus* proverrebbe, secondo l'autore, dallo stesso livello di *Somaliaster magniventer* Hawk. ed in questo caso sarebbe indubbiamente del Senoniano superiore, dato che, come ha dimostrato la dott.ssa Maccagno, nella Migiurtinia *Somaliaster magniventer* si trova sicurissimamente associato a *Monolepidorbis*, che è caratteristico del Campaniano (9).

Località. – Uebi Scebeli – Gruppo di Belet-Uen. N. 183, ripa destra strada provvisoria Belet-Uen-Ferfer, alla progressiva km. 58, dal posto di blocco di Belet-Uen. Calcari nodulosi. 10 gennaio 1937.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Un contributo ulteriore ad un teorema sulle traslazioni piane generalizzate.* Nota (*) di G. Scorza Dragoni, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

In questa Nota mi propongo di approfondire ulteriormente lo studio di una quistione, fondamentale per la teoria delle traslazioni piane, generalizzate, periodiche. Io ho già dedicato a quella quistione quattro Note, pubblicate di recente in questi « Rendiconti » ed aventi come titolo comune: *A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate*, e come sottotitoli: *considerazioni preliminari*; *proposizioni preliminari*; *dimostrazione nel caso di vertici di prima categoria*; *compimento della dimostrazione*. Nel seguito indicherò quelle Note rispettivamente con N. I), N. II), N. III), N. IV) e manterrò la terminologia e le convenzioni là introdotte (1).

1. Posizione del problema. – Sia t una traslazione generalizzata del piano reale, euclideo ambiente; $\lambda = Q_0 Q_1 + \cdots + Q_{n-1} Q_n$ un arco elementare di traslazione (relativo a t); $\Sigma(\lambda)$ uno dei campi adiacenti alla traiettoria $\sigma(\lambda)$ generata da λ. Si suppongano scelti i simboli in modo che sia $Q_n = t(Q_0)$ e si indichi con m il numero degli eventuali vertici di λ di seconda categoria per $\Sigma(\lambda)$.

(9) A. M. Maccagno, *Sull'esistenza del Campaniano nella Migiurtinia*, in « Rend. Acc. Naz. d. Lincei », vol. II, fasc. 5, 1947.

(*) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1947.

(1) In particolare M. I), ···, M. IV) saranno le mie Memorie citate in N. I).

Ciò premesso, nelle mie Note citate ho dimostrato che:

Se $n = 1$ *e (quindi)* $m = 0$, λ *contiene punti fondamentali per* $\Sigma(\lambda)$ [2];

Se $n = 2$ *ed* $m = 0$, *ogni lato di* λ *contiene punti fondamentali, relativi a* λ *e* $\Sigma(\lambda)$;

Se $n = 3, 4, \cdots$ *ed* $m = 0$, *il nucleo di* λ *contiene punti fondamentali o metafondamentali, relativi a* λ *e* $\Sigma(\lambda)$ [3];

Se $m > 0$ *e (quindi)* $n > 1$, *o* λ *contiene punti fondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *oppure il nucleo di* λ *ne contiene di metafondamentali.*

Il quale ultimo enunciato, a norma di quanto si è visto in quelle Note, è suscettibile di una maggiore determinazione, nel senso che:

Se m *è positivo e* $Q_1\,[Q_{n-1}]$ *è di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$, *o la spezzata* $Q_1 Q_2 \dotplus \cdots \dotplus Q_{n-1} Q_n$ $[Q_0 Q_1 \dotplus \cdots \dotplus Q_{n-2} Q_{n-1}]$ *contiene punti fondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *o il nucleo di* λ *ne contiene di metafondamentali.*

In questa Nota mi propongo di rendere più espressivi i risultati precedenti, se $n = 2$ e $m = 0$, oppure se m è positivo e $Q_1\,[Q_{n-1}]$ è di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$; e nel fatto estendo, sia pure parzialmente, una proposizione di v. Kerékjártó, relativa al caso $n = 1$ [4].

2. CONVENZIONI. ENUNCIATI. – Se $n = 1, 2$, $m = 0$, sia Γ un cerchio, che contenga $t^{-1}(\lambda)$, λ e $t(\lambda)$.

Detto X il punto corrente di Γ, sia d un numero *positivo*, minore delle distanze di X da $t(X)$ e $t^{-1}(Y)$ [5], di guisa che, in particolare, d è minore della lunghezza $\overline{Q_0 Q_n}$ del segmento $Q_0 Q_n$.

Dopo di ciò, si scelga un numero *positivo* δ, soddisfacente alla $4\delta < d$ e tale, che da $\overline{XY} \leq 2\delta$, Y essendo un altro punto corrente in Γ, segua $\overline{t(X)\,t(Y)} < \frac{1}{4}d$, $\overline{t^{-1}(X)\,t^{-1}(Y)} < \frac{1}{4}d$.

Se invece è $n = 2, 3, \cdots$, $m = 1, 2, \cdots$, si scelga prima un cerchio Γ^*, contenente $t^{-1}(\lambda) \dotplus \lambda \dotplus t(\lambda)$. Si determini il cerchio Γ in modo da contenere Γ^*, $t(\Gamma^*)$ e $t^{-1}(\Gamma^*)$. E si proceda formalmente come nel caso di prima alla definizione di d e di δ.

Ferme queste convenzioni:

se $n = 1, 2$ *ed* $m = 0$, λ *contiene punti, fondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *distanti almeno di* δ *da entrambi gli estremi di* λ;

se $n = 2, 3, \cdots$ *ed* $m = 1, 2, \cdots$ *e se* $Q_1\,[Q_{n-1}]$ *è di seconda categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$, *si presenta almeno una di queste due alternative*: *a) la spezzata* $Q_1 Q_2 \dotplus \cdots \dotplus Q_{n-1} Q_n$ $[Q_0 Q_1 \dotplus \cdots \dotplus Q_{n-2} Q_{n-1}]$ *contiene punti fondamentali*

(2) Veramente questo risultato e il successivo non erano nuovi, e risalivano in sostanza a v. KERÉKJÁRTÓ, cfr. G. SCORZA DRAGONI, *A proposito di un teorema sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni* [questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. I (1946), pp. 697–704], nn. 1 e 3.

(3) Anche questo risultato non poteva dirsi del tutto nuovo: esso era anzi meno espressivo del teorema III) di M. I):

(4) Per maggiori dettagli si veda M. II), § 9 e, specialmente, n. 29.

(5) Si rammenti che t è priva di punti uniti.

o metafondamentali per λ *e* $\Sigma(\lambda)$; *b) il segmento* $Q_0 Q_1$ $[Q_{n-1} Q_n]$ *contiene punti, fondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$, *distanti da* Q_0 $[Q_n]$ *almeno di* δ.

3. Dimostrazione del teorema nel primo caso. – Il teorema precedente è già conosciuto se $n=1$ (e quindi $m=0$): allora esso rientra appunto nella proposizione ricordata alla fine del n. 1.

Per completare la dimostrazione del nostro teorema, nella sua prima parte, cioè quando $n=2$ e $m=0$, basta riprendere considerazioni di v. Kerékjártó, esposte anche nel § 9 di M. II), e osservazioni contenute nel n. 3 della mia Nota citata in [2] o nei nn. 22 e 23 di M. I).

Nelle ipotesi attuali, almeno uno dei lati di λ ha una lunghezza superiore a $\frac{d}{2}$ $(>2\delta)$. Per fissare le idee, si supponga $\overline{Q_0 Q_1} > \frac{d}{2}$. Ed R_0 e R_1 siano i due punti del segmento $Q_0 Q_1$ individuati dalle condizioni $\overline{Q_0 R_0} = \delta$; $R_1 = Q_1$, se $\overline{Q_1 Q_2} \geq \delta$, $\overline{R_1 Q_2} = \delta$, se $\overline{Q_1 Q_2} < \delta$; di guisa che, in ogni caso, da $\overline{Q_0 Q_1} > 2\delta$ segue $\overline{Q_0 R_0} < \overline{Q_0 R_1}$.

Ciò premesso, siano r_0 e r_1 le semirette di origini rispettive R_0 e R_1; normali alla retta $R_0 R_1$ e rivolte, rispetto a questa, dalla stessa banda di $Q_1 Q_2$.

Se r_0 non incontra $t^{-1}(\lambda) + t(\lambda)$, R_0 è un punto fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, come è noto e come è ricordato per esempio in loc. cit. [2], n. 2. Se r_1 non incontra $t^{-1}(\lambda) + t(\lambda)$, R_1 è diverso da Q_1 e vale la conclusione analoga alla precedente. E in questo caso il teorema è vero.

Nel caso contrario, si indichi con S_i il più vicino a R_i dei punti di $r_i \cdot t(\lambda) + r_i \cdot t^{-1}(\lambda)$, per $i = 0, 1$.

Se S_0 appartiene a $t(\lambda)$, sia β_0 l'arco di $\sigma(\lambda)$ di estremi R_0 ed S_0.

Tutti i punti del segmento $Q_0 R_0$ sono portati da t in punti che hanno da Q_2 una distanza minore di $\frac{d}{4}$ mentre è $\overline{Q_2 S_0} \geq \overline{Q_1 Q_0} - \overline{Q_0 R_0} > \frac{d}{2} - \delta > \frac{d}{4}$. Epperò $t(R_0)$ è interno a β_0. Ma allora il segmento $s_0 = R_0 S_0$ taglia $t(s_0)$, a norma di un teorema di Brouwer [cfr. N. II), prop. I)]; e R_0 è fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$ [cfr. N. II), prop. X)].

Un ragionamento analogo vale se S_1 appartiene a $t^{-1}(\lambda)$, di guisa che $R_1 \neq Q_1$. Allora, infatti, ogni punto di $R_1 Q_1 + Q_1 Q_2$ ha una distanza non superiore a δ da Q_2; e perciò è portato da t^{-1} in un punto che ha una distanza minore di $\frac{d}{4}$ da Q_0. Inoltre è $\overline{Q_0 S_1} > \overline{Q_0 R_1} = \overline{Q_0 Q_1} - R_1 Q_1 > \frac{d}{2} - \delta > \frac{d}{4}$. Dunque $t^{-1}(R_1)$ è interno all'arco β_1 di $\sigma(\lambda)$ di estremi R_1 ed S_1; ecc.

In definitiva, è lecito supporre $S_0 \subset t^{-1}(\lambda)$, $S_1 \subset t(\lambda)$. Ma allora il segmento $R_0 R_1$ contiene nell'interno punti fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$, a norma del lemma dimostrato nel n. 22 di M. I) e ricordato nel n. 1 di N. III). Donde la conclusione.

4. Dimostrazione del teorema nel secondo caso. – Supponiamo ora che λ abbia almeno due lati, e che il suo primo vertice, Q_1, sia di seconda

categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$ [6] – ipotesi alla quale ci si può sempre ricondurre previo lo scambio eventuale degli uffici di t e t^{-1}.

Denoti q_1 la semiretta di origine Q_1, normale a $Q_1 Q_2$ e rivolta verso $\Sigma(\lambda)$, nel partire da Q_1.

Se $(q_1 - Q_1) \cdot [t^{-1}(\lambda) \dotplus \lambda \dotplus t(\lambda)] = 0$, Q_1 è fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, analogamente a quanto si è visto nel n. 2 di N. IV).

Nel caso contrario, sia A il più vicino a Q_1 dei punti dell'insieme $(q_1 - Q_1) \cdot [t^{-1}(\lambda) \dotplus \lambda \dotplus t(\lambda)]$; e si ponga $s = Q_1 A$.

Se $s \cdot t(s) \neq 0$, Q_1 è fondamentale o metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, come si riconosce con un ragionamento analogo ad uno svolto in N. IV).

Supponiamo allora $s \cdot t(s) = 0$ e, come in N. IV), distinguiamo tre casi: $A \subset t^{-1}(\lambda)$; $A \subset t(\lambda)$; A *interno a* λ.

Se $A \subset t^{-1}(\lambda)$, $t(A)$ appartiene alla spezzata $Q_1 Q_2 \dotplus \cdots \dotplus Q_{n-1} Q_n$ ed è diverso da Q_1 [cfr. N. IV), n. 2, alinea settimo]; l'arco ν, costituito da s e dalla sottospezzata l di λ di estremi Q_1 e $t(A)$ è un arco elementare di traslazione, contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$; uno, $\Sigma(\nu)$, dei campi adiacenti alla traiettoria $\sigma(\nu)$, generata da ν, è contenuto in $\Sigma(\lambda)$; *e* Q_1, *in quanto vertice di* ν, *è di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\nu)$. Ma allora dai teoremi del n. 1 è facile dedurre che l contiene punti fondamentali o metafondamentali per ν e $\Sigma(\nu)$. Punti siffatti sono necessariamente interni a λ, e quindi fondamentali o metafondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$, e contenuti in $Q_1 Q_2 \dotplus \cdots \dotplus Q_{n-1} Q_n$; c. v. d.

Se $A \subset t(\lambda)$, $t^{-1}(A)$ appartiene a $Q_0 Q_1$ e il segmento $\nu = t^{-1}(A) Q_1 \dotplus s_1$ è un segmento di traslazione contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$; e quindi uno, $\Sigma(\nu)$, dei campi adiacenti alla traiettoria $\sigma(\nu)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$. Inoltre ν ha gli estremi su $\lambda \dotplus t(\lambda) \subset \Gamma^*$; indi ν appartiene a Γ^*; epperò Γ contiene ν, $t(\nu)$ e $t^{-1}(\nu)$, attese le ipotesi del n. 2. A norma del teorema del n. 2, nel caso $n = 1$, ν contiene (almeno) un punto R, fondamentale rispetto a ν e $\Sigma(\nu)$, soddisfacente alla $\overline{R t^{-1}(A)} \geq \delta$ (e alla $RA \geq \delta$). Se $R \subset s$, Q_1 è fondamentale o metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$ [cfr. N. IV), n. 2, alternativa 6)]. Se R non appartiene ad s, è interno a $Q_0 Q_1$ e soddisfa alla $\overline{Q_0 R} \geq \delta$. E il teorema è dimostrato anche in questo caso.

Se A è interno a λ, si denoti con α il sottarco di λ di estremi Q_1 ed A; e si ponga $\nu = (\lambda - \alpha) + s$. Allora ν è un arco elementare di traslazione, contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$; uno, $\Sigma(\nu)$, dei campi adiacenti alla traiettoria generata da ν è contenuto in $\Sigma(\lambda)$. E qui conviene distinguere tre casi.

Se ν ha un solo lato, esiste (almeno) un punto R, fondamentale per ν e $\Sigma(\nu)$, soddisfacente alla $\overline{Q_0 R} \geq \delta$ (e alla $\overline{R Q_n} \geq \delta$); e ciò perchè $\nu \subset \Gamma^*$ e $t^{-1}(\Gamma^*) \dotplus \Gamma^* \dotplus t(\Gamma^*) \subset \Gamma$, mentre il teorema del n. 2 è vero, se $n = 1$. Se R è interno ad s, α contiene punti fondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$ [cfr. N. IV), n. 2, alternativa 9)]; e lo stesso vale per la spezzata $Q_1 Q_2 \dotplus \cdots \dotplus Q_{n-1} Q_n$.

(6) Il ragionamento che segue ha molti punti di contatto con quello svolto nel n. 2 di N. IV). Questa circostanza ci permetterà una certa concisione nel testo.

Nel caso contrario, o $R(\neq Q_n)$ appartiene a $Q_{n-1}Q_n$, e quindi è fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, – di guisa che, in definitiva, si conclude come nell'alternativa precedente –; o R appartiene a Q_0Q_1, e quindi è fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$ e soddisfa alla $\overline{Q_0R} \geqq \delta$. Donde il teorema anche in questo caso.

Se ν ha almeno due lati e se il primo vertice, U, di ν (a partire da Q_0) è di prima categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, a norma dei teoremi del n. 1 esistono punti fondamentali o metafondamentali, relativi a ν e $\Sigma(\nu)$, contenuti nella sottospezzata di ν di estremi U e Q_n. Ma punti siffatti sono, rispettivamente, fondamentali o metafondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$ e appartengono alla spezzata $Q_1Q_2 + \cdots + Q_{n-1}Q_n$. Donde ancora una volta la conclusione.

Il caso che, rispetto a $\Sigma(\nu)$, U sia per ν un vertice di seconda categoria offre maggiori difficoltà. Ciò perchè ν non si trova rispetto a Γ^* e Γ nelle stesse condizioni di λ, sicchè *non si può procedere per induzione* (7), non ostante che il numero dei vertici di ν, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, sia minore di m. Tratteremo questo caso nel numero successivo.

5. Compimento della dimostrazione. – Se U è, per ν, un vertice di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\nu)$, esso è tale anche per λ, rispetto a $\Sigma(\lambda)$ – e ciò segue anche dal n. 39 di M. I). Indi U è uno, Q_i, dei punti $Q_2, \cdots, Q_{n-1}$; mentre è $\nu = Q_0Q_i + Q_{i+1}Q_{i+2} + \cdots + Q_{n-1}Q_n$. E sia q_i la semiretta di origine Q_i, contenuta in q_1, e quindi normale a Q_iQ_{i+1} e rivolta verso $\Sigma(\lambda)$ e $\Sigma(\nu)$, nel partire da Q_i.

Se $(q_i - Q_i)\cdot[t^{-1}(\lambda) + \lambda + t(\lambda)] = 0$, Q_i è fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Nel caso contrario, denoti A_i il più vicino a Q_i dei punti di $(q_i - Q_i)\cdot[t^{-1}(\lambda) + \lambda + t(\lambda)]$; e si ponga $s_i' = Q_iA_i$.

Se $s_i'\cdot t(s_i') \neq 0$, Q_i è di nuovo fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, o metafondamentale,

Se $s_i'\cdot t(s_i') = 0$, si ponga $s_i = Q_0Q_1 + s + AQ_i + s_i' = Q_0A_i$.

Se $s_i\cdot t(s_i) \neq 0$, s_i contiene almeno un segmento di traslazione (8), ν_i', il quale ha almeno un punto su s o s_i' e almeno un punto su Q_0Q_1 o su AQ_i (cioè contiene almeno uno dei punti Q_1, A e Q_i), attese le $Q_0Q_1\cdot t(Q_0Q_1) = 0$, $AQ_i\cdot t(AQ_i) = 0$ e le $s\cdot t(s) = 0$, $s_i'\cdot t(s_i') = 0$. Inoltre ν_i' è contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$; quindi uno, $\Sigma(\nu_i')$, dei campi adiacenti alla traiettoria $\sigma(\nu_i')$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$ [cfr. N. II), prop. VII)]. E ancora: ν_i' *appartiene* a Γ^*;

(7) Si potrebbe cercare di ricondursi nell'ambito del principio di induzione, a patto di modificare le ipotesi del n. 2: per esempio, di sostituire Γ^* e Γ con una catena crescente di $m+1$ cerchi $\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_m$, soddisfacenti alle $t^{-1}(\lambda) + \lambda + t(\lambda) \subset \Gamma_0$, $t^{-1}(\Gamma_0) + t(\Gamma_0) \subset \Gamma_1, \cdots, t^{-1}(\Gamma_{m-1}) + t^{-1}(\Gamma_{m-1}) \subset \Gamma_m$ e di definire d e δ a partire da Γ_m. Ma si otterrebbe un risultato certo meno espressivo di quello del testo e forse meno efficace nelle applicazioni.

(8) Basta percorrere s_i a partire da Q_0, e fermarsi non appena il tratto percorso, Q_0B, incontra la propria immagine. Se $B = t(Q_0)$ o $B = t^{-1}(Q_0)$, Q_0B è [cfr. M. II), n. 11] un segmento di traslazione. Nel caso contrario, Q_0B non contiene nè $t(Q_0)$, nè $t^{-1}(Q_0)$; Q_0B è uno pseudoarco di traslazione di prima specie di origine Q_0 [cfr. M. II), n. 14] e contiene [*ibidem*, n. 16] un segmento di traslazione.

quindi è $t^{-1}(\nu_i') \dotplus \nu_i' \dotplus t(\nu_i') \subset \Gamma$. Epperò ν_i' contiene un punto, R_i', fondamentale per ν_i' e distante almeno di δ dagli estremi di ν_i'. Se R_i' appartiene a s o s_i', uno dei tre punti Q_1, A e Q_i è fondamentale o metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$ (9). Se R_i' appartiene ad AQ_i, R_i' appartiene anche alla spezzata $Q_1 Q_2 \dotplus \cdots \dotplus Q_{n-1} Q_n$ ed è fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$. Se R_i' appartiene a $Q_0 Q_1$ (ed è diverso da Q_1), R_i' è fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$ e soddisfa alla $\overline{R_i' Q_0} \geqq \delta$. In ogni caso si perviene alla conclusione voluta.

Se $s_i \cdot t(s_i) = 0$, distinguiamo tre casi: $A_i \subset t^{-1}(\lambda)$, $A_i \subset t(\lambda)$; A_i *interno a* λ.

Se $A_i \subset t^{-1}(\lambda)$, basta tenere conto della sola $s_i' \cdot t(s_i') = 0$, per concludere [cfr. N. II), prop. I)] che $t(A_i)$ appartiene a $Q_i Q_{i+1} \dotplus \cdots \dotplus Q_{n-1} Q_n$; e che l'arco ν_i, formato da s_i' e dalla sottospezzata di λ di estremi Q_i e $t(A_i)$, è un arco elementare di traslazione, con *almeno* due lati, contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$. Allora uno, $\Sigma(\nu_i)$, dei campi adiacenti alla traiettoria $\sigma(\nu_i)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$; *e, rispetto a* $\Sigma(\nu_i)$, Q_i *è per* ν_i *un vertice di prima categoria*. Di qui e dai teoremi del n. 1 è facile dedurre che $Q_i Q_{i+1} \dotplus \cdots \dotplus Q_{n-1} Q_n$ contiene punti fondamentali o metafondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Se $s_i \cdot t(s_i) = 0$ e se $A_i \cdot \subset t(\lambda)$, l'interno di s_i' appartiene non soltanto a $\Sigma(\lambda)$ ma anche a $\Sigma(\nu)$ [a norma della proposizione II) di N. II)], perchè q_i è rivolta e verso $\Sigma(\lambda)$ e verso $\Sigma(\nu)$, nel partire da Q_i, mentre $s_i' \cdot t(s_i') = s_i' \cdot t(s) = t(s_i') \cdot s = 0$, di guisa che s_i' ha al più gli estremi [non soltanto su $\sigma(\lambda)$, ma anche] su $\sigma(\nu)$. Indi A_i non può nemmeno essere interno a $t(\alpha)$, perchè l'interno di $t(\alpha)$ appartiene al campo adiacente a $\sigma(\nu)$ diverso da $\Sigma(\nu)$ [cfr. N. II), prop. VII)]. In definitiva A_i appartiene a $t(\nu)$. Ma $s_i' \cdot t(s_i') = 0$; dunque $t^{-1}(A_i)$ deve essere compreso, su ν, fra Q_0 e Q_i [a norma del teorema I) di N. II)]; cioè deve appartenere al segmento $Q_0 Q_i$. Ma questo è assurdo, perchè ha come conseguenza la $s_i \cdot t(s_i) \supset A_i$; mentre per ipotesi è $s_i \cdot t(s_i) = 0$.

Se $s_i \cdot t(s_i) = 0$ e se A_i è interno a λ (e a ν), denotiamo con α_i il sottoarco di λ (e di ν) di estremi Q_i ed A_i e poniamo $\nu_i = (\nu - \alpha_i) + s_i' = (\lambda - (\alpha + \alpha_i)) + s + s_i'$. Allora ν_i è un arco elementare di traslazione contenuto in $\sigma(\nu) + \Sigma(\nu)$ e quindi in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$ e contenuto anche in Γ^*. Se ν_i ha un solo lato, oppure se il primo vertice, U_i, di ν_i, incontrato su ν_i a partire da Q_0, è di prima categoria rispetto al campo adiacente a $\sigma(\nu_i)$ e contenuto in $\Sigma(\nu)$ e quindi in $\Sigma(\lambda)$, il teorema si dimostra come alla fine del n. 4. Nel caso contrario, si riprendono le considerazioni svolte in questo numero, sostituendo opportunamente U e ν con U_i e ν_i; q_i con q_j (se $U_i = Q_j$); s_i' con s_j'; s_i con $s_j = Q_0 Q_1 \dotplus s \dotplus A Q_i \dotplus s_i' \dotplus A_i Q_j \dotplus s_j' = Q_0 A_j$; ecc. E così di seguito.

Il procedimento descritto si deve arrestare, perchè m è finito. Da ciò il teorema.

(9) Ciò si dimostra con un ragionamento del tutto simile a quello usato in N. II) per giustificare la XV).

Matematica (Analisi tensoriale). — *Sopra la derivata sostanziale di un integrale multiplo negli Spazi di Riemann.* Nota di L. Castoldi, presentata (*) dal Socio L. Berzolari.

1. Sia V_n una varietà riemanniana con metrica caratterizzata dalla forma differenziale quadratica definita positiva

$$(1) \qquad ds^2 = a_{ij}\, dy^i\, dy^j \quad , \quad \mathrm{Det}\,|a_{ij}| > 0 ,$$

esprimente, con riferimento a un generico sistema di coordinate y^i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, il quadrato dell'elemento lineare.

Un sistema differenziale ordinario

$$(2) \qquad \frac{dy^i}{dt} = Y^i(y^1, \cdots, y^n ; t) \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

per n funzioni incognite $y^i(t)$, nel quale si attribuisca al parametro t il significato di tempo, definisce ovviamente, istante per istante, una congruenza di linee in V_n, che, per riferirci ad una immagine idrocinetica, possiamo concepire come congruenza delle *linee di flusso* del moto di un fluido in V_n. Non va escluso che i secondi membri delle (2) non contengano il tempo esplicitamente, nel qual caso la configurazione delle accennate linee di flusso risulta invariabile nel tempo, e il moto stazionario.

In generale, i secondi membri delle (2) caratterizzano, come funzione del tempo, il campo vettoriale v^i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ delle velocità del moto fluido considerato.

Sia ora V_m una varietà *sostanziale* ad m dimensioni contenuta in V_n, intendendo con ciò che V_m vada identificata, ad ogni istante t, coll'attuale luogo geometrico dei punti, o, come diremo, delle *particelle*, mobili secondo la legge (2), che in un istante *iniziale* t_0 riempivano una assegnata varietà $V_m^{(0)}$ (configurazione di V_m all'istante t_0).

Non escludiamo che sia $m = n$, nel qual caso V_m andrà concepita identificantesi colla V_n, cui si attribuiscano deformazioni continue nel tempo per effetto delle quali costantemente si sovrapponga a se stessa.

Se $x^1, \cdots, x^m$ è un sistema di coordinate comunque definito su V_m, alle equazioni di V_m può darsi forma parametrica del tipo

$$(3) \qquad y^i = y^i(x^1, \cdots, x^m, t),$$

con matrice funzionale

$$(4) \qquad \left\| \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \right\| \qquad (i = 1, 2, \cdots n \; ; \; \alpha = 1, 2, \cdots m)$$

di caratteristica m.

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

Posto allora

$$g_{\alpha\beta} = a_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \quad , \quad \mathrm{Det}\,|g_{\alpha\beta}| > 0, \tag{5}$$

il quadrato dell'elemento lineare in V_m è dato da:

$$dl^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta . \tag{6}$$

Le coordinate x^α di una particella di V_m risultano definite quali funzioni del tempo dal sistema differenziale che proviene da (2) sostituendovi in luogo delle y^i i secondi membri delle (3), cioè dal sistema

$$A^i_\alpha\frac{dx^\alpha}{dt} + A^i_o = Y^i\,[y^1(x^1,\cdots,x^m;t),\cdots,y^n(x^1,\cdots,x^m,t);t]\ (i=1,\cdots,n) \tag{7}$$

$$A^i_\alpha = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \quad , \quad A^i_o = \frac{\partial y^i}{\partial t}$$

al quale certo è attribuibile forma normale

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = W^\alpha(x^1,\cdots,x^m;t) \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,m), \tag{8}$$

in virtù dell'ipotesi fatta sulla caratteristica della matrice (4).

In particolare è possibile scegliere su V_m coordinate cosiffatte che i loro valori per ogni singola particella di V_m rimangano costanti durante il moto. Designando con $\bar{x}^\alpha$ questo particolare sistema di riferimento in V_m, si ha, per esso, in luogo di (8):

$$\frac{d\bar{x}^\alpha}{dt} = 0. \tag{8'}$$

In ogni caso va tenuto presente che il significato del vettore W^α in V_m è quello di *velocità relativa al sistema di riferimento adottato in* V_m, delle particelle mobili colla V_m stessa.

2. Premesso ciò, sia C una qualunque regione connessa e *sostanziale* di V_m (cioè costantemente formata, durante il moto, dalle stesse particelle di V_m); e $F(x^1,\cdots,x^m;t)$ una funzione definita nei punti di C, o, eventualmente in tutta V_m o addirittura in V_n, per cui, posto $g = \mathrm{Det}\,|g_{\alpha\beta}|$, esista e sia finito l'integrale

$$\mathfrak{I} = \int_{\mathcal{C}} F\sqrt{g}\,dx^1\cdots dx^m. \tag{9}$$

Volendo calcolare la derivata sostanziale dell'integrale (5), conviene riferirsi, su V_m, al sistema di coordinate $\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^m$, già sopra considerato, e che potremo denominare di «*coordinate sostanziali*» assumendo le x^α valori costanti, durante il moto, per ogni singola particella di V_m.

Potremo allora scrivere

$$\mathfrak{I} = \int_{\mathcal{C}} F\sqrt{g}\,\frac{\partial(x^1,\cdots,x^m)}{\partial(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^m)}\,d\bar{x}^1,\cdots,d\bar{x}^m, \tag{10}$$

conseguendo così il vantaggio che alla regione C viene a corrispondere un campo di variabilità *fisso* per le coordinate $\bar{x}^\alpha$. È allora, supposto che la funzione integranda soddisfi alle condizioni che consentono la derivazione sotto il segno:

$$(11) \qquad \frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \int_{\bar{C}} \frac{d}{dt} \left\{ F \sqrt{g} \frac{\partial (x^1, \cdots, x^m)}{\partial (\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m)} \right\} d\bar{x}^1, \cdots, d\bar{x}^m.$$

La funzione sotto il segno di integrale, posto

$$D = \frac{\partial (x^1, \cdots, x^m)}{\partial (\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m)},$$

si può scrivere più distesamente come segue:

$$(12) \qquad \frac{dF}{dt} \sqrt{g}\, D + FD \left[\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^\alpha} W^\alpha + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t} \right] + F \sqrt{g}\, D \frac{\partial W^\alpha}{\partial \bar{x}^\alpha},$$

dove l'ultimo termine proviene dall'osservare che è

$$\frac{dD}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial (x^1 \cdots x^{\alpha-1} W^\alpha x^{\alpha+1} \cdots x^m)}{\partial (\bar{x}^1 \cdots \bar{x}^{\alpha-1} \bar{x}^\alpha \bar{x}^{\alpha+1} \cdots \bar{x}^m)} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial W^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial (x^1 \cdots x^{\alpha-1} x^\beta x^{\alpha+1} \cdots x^m)}{\partial (\bar{x}^1 \cdots \bar{x}^{\alpha-1} \bar{x}^\alpha \bar{x}^{\alpha+1} \cdots \bar{x}^m)} = D \frac{\partial W^\alpha}{\partial \bar{x}^\alpha}.$$

Sostituendo in (11) e indicando con dV_m l'elemento di estensione in V_m

$$dV = \sqrt{g}\, D\, d\bar{x}^1, \cdots, d\bar{x}^m,$$

otteniamo

$$(13) \qquad \frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \int_{\bar{C}} \left\{ \frac{dF}{dt} + \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g}\, W^\alpha) + \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t} \right\} dV_m.$$

In particolare, la condizione

$$(14) \qquad \frac{dF}{dt} + \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g}\, W^\alpha) + \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t} = 0$$

è caratteristica affinchè F sia un *invariante integrale assoluto di ordine m*.

In generale, la (8) fornisce una notevole espressione della derivata sostanziale di un integrale in estensione ad m dimensioni in V_n.

3. Al secondo membro della (13) è possibile dare forme diverse in corrispondenza di diverse possibili scelte del sistema di riferimento x^α in V_m. Ma anzitutto, e ancora con riferimento a un sistema di coordinate generico, avendosi

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g}\, X^\alpha) = \mathrm{div}_{V_m} X^\alpha = \nabla_\alpha X^\alpha$$

e

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathrm{grad}_{V_m} F, \mathbf{W}),$$

possono attribuirsi alla (13) le due forme equivalenti:

$$(13') \qquad \frac{d\mathfrak{I}}{dt} = \int_{\mathfrak{C}} \left\{ \frac{dF}{dt} + F \operatorname{div}_{V_m} \mathbf{W} + \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t} \right\} dV_m ,$$

$$(13'') \qquad \frac{d\mathfrak{I}}{dt} = \int_{\mathfrak{C}} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}_{V_m} (F\mathbf{W}) + \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t} \right\} dV_m .$$

Dopo ciò, se si adottano in V_m le coordinate $\bar{x}^\alpha$ sopra definite, risulta $\overline{\mathbf{W}} = 0$ e quindi, con ovvie notazioni,

$$(15) \qquad \frac{d\mathfrak{I}}{dt} = \int_{\mathfrak{C}} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{F}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{g}}}{\partial t} \right\} dV_m ;$$

se invece si assumono in V_m coordinate $\overset{*}{x}{}^\alpha$, per cui risulti localmente costante $\sqrt{\overset{*}{g}}$, dalle relazioni (13'), (13'') discende:

$$(16) \qquad \frac{d\mathfrak{I}}{dt} = \int_{\mathfrak{C}} \left\{ \frac{dF}{dt} + F \operatorname{div}_{V_m} \overset{*}{\mathbf{W}} \right\} dV_m = \int_{\mathfrak{C}} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}_{V_m} (F\overset{*}{\mathbf{W}}) \right\} dV_m ;$$

se, infine, si sceglie in V_m un sistema di riferimento $\overset{\circ}{x}{}^\alpha$ in modo che, concepita la famiglia (generalmente riempiente una V_{m+1}) delle successive configurazioni assunte dalla V_m, risultino dotati di uguali valori delle coordinate i punti di intersezione di tali diverse V_m con una medesima loro traiettoria ortogonale in V_{m+1}, allora la (13) mantiene invariata, con riferimento alle nuove coordinate, la sua forma generale, ma va osservato che, se $\boldsymbol{w}$ è la velocità con cui si sposta, sulla generica traiettoria ortogonale, la intersezione di essa con V_m, si ha;

$$\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}}} \frac{\partial \sqrt{\overset{\circ}{g}}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}}} \frac{\partial \sqrt{\overset{\circ}{g}}}{\partial n} |\boldsymbol{w}|$$

dove si è indicata con n la normale, in V_{m+1}, a V_m, nel verso del moto.

D'altra parte, abbiamo altrove dimostrato[1], che l'espressione $\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}}} \frac{\partial \sqrt{\overset{\circ}{g}}}{\partial n}$

(1) L. CASTOLDI, *Sulla curvatura media di una varietà immersa in un'altra*. « Atti della Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. I, pp. 928-934. Prendiamo occasione da questo richiamo per correggere un errore di segno occorsoci in quella Nota. Precisamente, le formule (11), (12) e precedente vanno rispettivamente sostituite colle

$$(11)' \qquad \Omega = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial y^m}\right)_0 \quad , \quad \Omega \sqrt{a} = -\left(\frac{\partial \sqrt{a}}{\partial y^m}\right)_0 ;$$

$$(12)' \qquad \Omega = \lim_{S^0 \to 0} \frac{1}{S^0}\left(\frac{\partial S}{\partial y^m}\right)_0 \quad ; \quad \int_{\mathfrak{C}} \Omega \, dS^0 = \left(\frac{\partial S}{\partial y^m}\right)_0 ,$$

mentre va soppressa la locuzione: *a meno del segno* alla riga 16 di p. 932 e alla riga 17 di p. 933.

si identifica colla curvatura media di V_m nella direzione della sua normale in V_{m+1}. Posto allora

$$\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}}}\frac{\partial\sqrt{\overset{\circ}{g}}}{\partial n}=\frac{1}{\rho^{(n)}},$$

la (13) diventa infine:

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt}=\int_{\mathfrak{C}}\left\{\frac{dF}{dt}+F\,\mathrm{div}_{V_m}\overset{\circ}{\mathbf{W}}+\frac{1}{\rho^{(n)}}F\right\}dV_m, \tag{17}$$

nella quale gli ultimi due termini dell'integrando hanno un significato geometrico di evidente rilievo.

Osservazione 1ª. – Nel caso che sia $m=n$, e quindi C una regione sostanziale mobile della stessa V_n, si annulla in (13) l'ultimo termine dell'integrando purchè si assumano in V_n coordinate *fisse* e si attribuiscano, istante per istante, alle particelle mobili di C le stesse coordinate del *posto* di V_n che esse vengono attualmente ad occupare.

Osservazione 2ª – In tutto quanto precede abbiamo attribuito ad F il significato di funzione invariante in V_m, o, più generalmente, in V_n. Nulla di essenziale va mutato qualora si sostituisca in (13), o in una delle successive equivalenti relazioni, F con una qualunque componente $F_{\alpha_1\cdots\alpha_p}$ di un tensore $\mathbf{F}^{(p)}$ di ordine p in V_m (o V_n), purchè si sostituisca contemporaneamente al prodotto $F\mathbf{W}$ il « *prodotto completo* » $\mathbf{F}^{(p)}\mathbf{W}$, cioè il tensore di ordine $p+1$ di componenti $F^{\alpha_1\cdots\alpha_p}W^{\alpha_{p+1}}$ e al gradiente di F il tensore derivato covariante di $\mathbf{F}^{(p)}$, $\nabla\mathbf{F}^{(p)}$, di componenti $\nabla_{\alpha_{p+1}}F^{\alpha_1\cdots\alpha_p}$.

4. In particolare, la (13) è applicabile ad un arco sostanziale $\overset{\frown}{AB}$ di una curva l ($m=1$) dell'ordinario S_3, allorchè si supponga lo scalare F definito come prodotto interno di un vettore $\boldsymbol{u}$ assegnato in S_3, o anche soltanto nei punti di l, per il vettore unitario tangente ad l in un verso assegnato. Assunto su l, come coordinata $\overset{*}{x}{}^1$, l'arco s contato, per esempio, a partire da A verso B, e denotato con $\boldsymbol{t}$ il versore tangente orientato in tal verso, si ha:

$$F=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{t})=u_s\quad,\quad \overset{*}{W}{}^1=\dot{s}\quad;\quad \mathrm{div}_l F\overset{*}{\mathbf{W}}=\frac{\partial}{\partial s}(u_s\dot{s}),$$

cosicchè la (16) diventa:

$$\frac{d}{dt}\int_{\overset{\frown}{AB}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{t})\,ds=\int_{\overset{\frown}{AB}}\left\{\frac{\partial u_s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}(u_s\dot{s})\right\}ds. \tag{18}$$

Supponiamo ora che V_m si riduca a una ordinaria superficie V_2 in S_3, e sia $F=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})=u_n$, con $\boldsymbol{u}$ vettore assegnato su V_2 (o in S_3) e $\boldsymbol{n}$ vettore unitario normale a V_2 in un verso fissato. Con riferimento a coordinate

$\overset{\circ}{x}^1, \overset{\circ}{x}^2$ in V_2, per cui è valida la relazione (17), e denotando con σ la considerata regione sostanziale di V_2, si ottiene:

$$(19) \qquad \frac{d}{dt}\int_\sigma (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})\, d\sigma = \int_\sigma \left\{ \frac{du_n}{dt} + u_n \operatorname{div}_\sigma \overset{*}{\mathbf{W}} + \frac{1}{\rho} u_n \right\} d\sigma .$$

Le (18), (19) sono equivalenti a formule ben note e di uso frequente nella Fisica matematica, ma presentano rispetto ad esse il vantaggio di essere applicabili anche nel caso che il campo vettoriale $\boldsymbol{u}$ che vi compare sia definito, come $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{n}$, soltanto, rispettivamente, nei punti di l e di V_2. Del resto, anche le formule richiamate, come mostreremo in altra parte, sono deducibili da altre più generali, valide negli spazi di Riemann, alle quali ultime si perviene facendo uso di concetti e di metodi appropriati [2]

Geometria. — *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari.* – III. *Trasformazioni cremoniane osculatrici* [*]. Nota di M. VILLA, presentata [**] dal Socio L. BERZOLARI.

5. TRASFORMAZIONI CREMONIANE OSCULATRICI. – Consideriamo fra due spazi lineari ad r dimensioni S_r, S'_r la trasformazione cremoniana $\mathfrak{C}_r$ d'ordine r che si ottiene assegnando fra i due spazi r reciprocità (distinte), facendo corrispondere ad un punto di uno degli spazi il punto dell'altro in cui s'intersecano gli r iperpiani corrispondenti nelle r reciprocità [23].

Agli iperpiani di uno degli spazi corrispondono ipersuperficie d'ordine r passanti per una varietà a $r-2$ dimensioni e di ordine $\frac{1}{2}r(r+1)$ che indicheremo con V_{r-2} o V'_{r-2} secondo che sta in S_r o S'_r [24].

La V_{r-2} (o V'_{r-2}) è il luogo dei punti *singolari* di S_r (o S'_r); ad ogni punto di V_{r-2} corrisponde una retta (che si appoggia a V'_{r-2} in r punti) ed il luogo delle ∞^{r-2} rette corrispondenti ai punti di V_{r-2} è una ipersuperficie d'ordine r^2-1.

Le $\mathfrak{C}_2$ sono le trasformazioni quadratiche fra piani e le $\mathfrak{C}_3$ sono le trasformazioni cubiche fra spazi ordinari.

Una retta che si appoggi a V_{r-2} (o a V'_{r-2}) in $r-1$ punti si dirà $(r-1)$-segante di V_{r-2} o *corda* di V_{r-2} (di V'_{r-2}).

(2) L. CASTOLDI, *Estensione a tensori qualunque negli spazi di Riemann di alcuni teoremi fondamentali dell'Analisi vettoriale*, in corso di pubblicazione nelle «Memorie della Società dei XL».

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1948.

(23) Le indicazioni bibliografiche sulle trasformazioni $\mathfrak{C}_r$ si trovano nella nota (9).

(24) Questa varietà V_{r-2} è stata studiata da GODEAUX (op. cit.). Per $r=3$ la V_1 è una curva del sesto ordine di genere tre (si veda: LORIA, *Curve sghembe speciali*, vol. I, Zanichelli, Bologna, pp. 351-354, 1925).

Per un punto generico di S_r *passano* $2^r - 1$ *corde di* V_{r-2} (25); e le $2^r - 1$ corde uscenti da un punto O sono le $2^r - 1$ direzioni caratteristiche di $\mathcal{C}_r$ uscenti da O (26).

Ad una corda di V_{r-2} corrisponde in $\mathcal{C}_r$ una corda di V'_{r-2} (e inversamente) (27) e fra corde corrispondenti $\mathcal{C}_r$ subordina una proiettività che è la proiettività caratteristica relativa a tale coppia.

Sussiste il teorema:

Una trasformazione puntuale T *fra* S_r, S'_r *si può sempre osculare (cioè approssimare fino all'intorno del* 2^o *ordine), in una coppia regolare di punti corrispondenti, con* $\infty^{\frac{r^2(r-1)}{2}}$ *trasformazioni cremoniane* $\mathcal{C}_r$ (28).

Per la dimostrazione conviene ricorrere alla varietà di Segre V_{2r} di $S_{r(r+2)}$ d'ordine $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$, rappresentante le coppie di punti dei due spazi S_r, S'_r, sulla quale le $\mathcal{C}_r$ sono rappresentate dalle sezioni con gli $S_{r(r+1)}$ (29).

Considerata la $\overline{V}_r$ rappresentativa di T sulla V_{2r} e il punto $\overline{O}$ rappresentativo della coppia regolare (O, O'), le $\mathcal{C}_r$ osculatrici la T in (O, O') sono quelle rappresentate da V_r aventi in $\overline{O}$ la stessa calotta del 2^o ordine di $\overline{V}_r$, ossia dalle V_r ottenute segando V_{2r} con gli $S_{r(r+1)}$ passanti per l'S (2) osculatore in $\overline{O}$ a $\overline{V}_r$ (30). Siccome, in $S_{r(r+2)}$, gli $S_{r(r+1)}$ passanti per l'S (2) $\equiv S_{\frac{r(r+3)}{2}}$ (31)

(25) Per la dimostrazione si veda la (26). Cfr. pure la (34).

(26) Infatti ad una retta S_1 di S_r corrisponde in $\mathcal{C}_r$ una curva C'_r, d'ordine r, ma se S_1 è una corda, cioè $(r-1)$-segante di V_{r-2}, agli $r-1$ punti d'appoggio corrispondono $r-1$ rette e C'_r si spezza quindi ulteriormente in una retta (che è una corda di V'_{r-2}).

Un E_2 di flesso appartenente ad una corda (e col centro $\neq$ da uno degli $r-1$ punti d'appoggio) viene quindi mutato da $\mathcal{C}_r$ in un E_2 di flesso, sicchè le corde sono le rette caratteristiche di $\mathcal{C}_r$.

Segue pure: *le corde di* V_{r-2} *uscenti da un punto* O *sono* $2^r - 1$.

Infatti esse sono le direzioni caratteristiche di $\mathcal{C}_r$ uscenti da O le quali sono appunto $2^r - 1$ (n. 2). Si badi che l'applicazione del risultato del n. 2 è senz'altro lecita in quanto si dimostra nel testo che ogni trasformazione puntuale si può osculare con una $\mathcal{C}_r$.

(27) Si veda la (26).

(28) Per r = 2,3 questo teorema trovasi già in VILLA, il primo lavoro cit. nella nota (2) e il primo cit. nella (1).

(29) Infatti una reciprocità fra S_r, S'_r è rappresentata da una sezione iperpiana della V_{2r} di SEGRE. La $\mathcal{C}_r$, ottenendosi da r reciprocità, è quindi rappresentata dalla sezione di V_{2r} con uno spazio lineare di dimensione $r(r+2) - r = r(r+1)$.

(30) Si debbono escludere gli $S_{r(r+1)}$ seganti in un S_{r+1} (almeno) l'S_{2r} tangente in O alla V_{2r}. Infatti tali $S_{r(r+1)}$ segano V_{2r} in V_r aventi in O punto doppio. Queste V_r rappresentano $\mathcal{C}_r$ che hanno in (O, O') lo Jacobiano nullo e che perciò non osculano la T la quale, per ipotesi, ha in (O, O') lo Jacobiano $\neq 0$ (Cfr. VILLA, *Superficie della* V_4^6 *di Segre e relative trasformazioni puntuali*, «Mem. dell'Accademia delle Scienze di Bologna», ser. IX, vol. IX, p. 138, 1942).

(31) L'S (2) ha dimensione $\frac{r(r+3)}{2}$ (e non dimensione minore) perchè, nel caso opposto, $\overline{V}_r$ presenterebbe in $\overline{O}$ comportamento di quasi-asintotica $\sigma_{1,2}$ mentre in (O, O') l'Jacobiano di T si è supposto $\neq 0$. Si veda: VILLA, *Sull'annullarsi, in un punto, della matrice Jacobiana di m funzioni in n variabili*, «Rend. dell'Accademia d'Italia», ser. VII, vol. III, p. 210, 1941.

sono $\infty^{\frac{r^2(r+1)}{2}}$ si conclude che le $\mathcal{C}_r$ osculatrici T in (O, O') sono appunto $\infty^{\frac{r^2(r-1)}{2}}$.

La considerazione della V_{2r} di Segre è utile anche per ottenere brevemente le equazioni delle $\mathcal{C}_r$ osculatrici. Nei riferimenti indicati (nn. 2, 3, 4) la T è rappresentata dalle equazioni

$$y_i = x_i + \sum_{k,n} b^i_{kn} x_k x_n + [3], \tag{5.1}$$

dove

$$b^i_{kn} = b^i_{nk} \quad , \quad b^i_{kk} = 0 \quad , \quad \sum_{k,n} b^i_{kn} = -1 \qquad (i, k, n = 1, 2, \cdots, r).$$

Indicando con X_{ik}, X_i, X^i, X $(i, k = 1, \cdots, r)$ le coordinate proiettive omogenee in $S_{r(r+2)}$, la V_{2r} di Segre è rappresentata dalle equazioni parametriche

$$X_{ip} = x_p y_i \quad , \quad X_i = y_i \quad , \quad X^i = x_i \quad , \quad X = 1 \qquad (i, p = 1, 2, \cdots, r). \tag{5.2}$$

Le equazioni parametriche di $\overline{V}_r$ si ottengono ponendo nelle (5.2) per le y_i le espressioni date dalle $(5.1)_2$ e sono quindi

$$\begin{cases} X_{ip} = x_p \left(x_i + \sum_{k,n} b^i_{kn} x_k x_n\right) + \cdots & (i, k, n, p = 1, 2, \cdots, r) \\ X_i = x_i + \sum_{k,n} b^i_{kn} x_k x_n + \cdots \quad ; \quad X^i = x_i \quad ; \quad X = 1. \end{cases} \tag{5.3}$$

L'S (2) osculatore in $\overline{O}$ a $\overline{V}_r$ è lo spazio individuato da $\overline{O}$ (0, 0, $\cdots$, 1), dai punti derivati primi e dai punti derivati secondi (calcolati per $x_i = 0$), cioè dai punti (scriviamo per brevità soltanto le coordinate non nulle):

$X = 1$; $X_1 = 1$, $X^1 = 1$; $X_2 = 1$, $X^2 = 1$; $\cdots$; $X_r = 1$, $X^r = 1$; $X_{11} = 1$; $X_{12} = X_{21} = 1$, $X_i = 2 b^i_{12}$; $\cdots$; $X_{ts} = X_{st} = 1$, $X_i = 2 b^i_{st}$; $\cdots$; $X_{rr} = 1$.

Questo $S(2) \equiv S_{\frac{r(r+3)}{2}}$ è quindi rappresentato dalle $\frac{r(r+1)}{2}$ equazioni

$$\begin{cases} X_{kn} - X_{nk} = 0 \\ 2 \sum_{k,n} b^i_{kn} X_{kn} - X_i + X^i = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

dove $i, k, n = 1; 2, \cdots, r$ e $k < n$ [32].

(32) I punti dell'intersezione della V_{2r} con l'S (2) sono quelli provenienti dalle coppie di punti x_i, y_i dei due spazi soddisfacenti le equazioni che si ottengono sostituendo nelle (5.4) alle X_{ik}, X_i, X^i, X le espressioni date dalle (5.2). Si ottengono così le equazioni della configurazione caratteristica di T in (O, O') (n. 2)

$$\begin{cases} x_k y_i - x_i y_k = 0 \qquad (i \neq k) \\ \sum_{k,n} b^i_{kn} x_n y_k - y_i + x_i = 0. \end{cases} \tag{*}$$

Le (*) coincidono con le (2.2) essendo ora $a_i = a_k = 1$.

Si noterà come per mezzo della varietà di Segre si riesca ad ottenere le equazioni complessive della configurazione caratteristica.

La rappresentazione delle trasformazioni puntuali fra due spazi sulla varietà di Segre ha messo in luce anche alcune proprietà della stessa varietà di Segre. Si veda: VILLA, *Sulle*

Gli $S_{r(r+1)}$ passanti per l'$S(2)$, di equazioni (5.4), e non appartenenti ad alcuno degli iperpiani $X_{kn} - X_{nk} = 0$ [33], si possono rappresentare con le r equazioni

$$\left(2\sum_{k,n} b^i_{kn} X_{kn} - X_i + X^i\right) + \sum_{k,n} \lambda^i_{kn} (X_{kn} - X_{nk}) = 0,$$

che si possono anche scrivere

$$(5.5) \qquad \sum_{k,n} [(2b^i_{kn} + \lambda^i_{kn}) X_{kn} - \lambda^i_{kn} X_{nk}] - X_i + X^i = 0,$$

dove i λ sono parametri.

Sostituendo nelle (5.5) alle X_{ik}, X_i, X^i, X le espressioni date dalle (5.2) si ottengono le equazioni cercate delle $\mathcal{C}_r$ osculatrici.

Si conclude:

Le $\infty^{\frac{r^2(r-1)}{2}}$ $\mathcal{C}_r$ *osculatrici sono rappresentate dalle equazioni*

$$(5.6) \qquad \sum_{k,n} [(2b^i_{kn} + \lambda^i_{kn}) x_n y_k - \lambda^i_{kn} x_k y_n] - y_i + x_i = 0 \quad (i, k, n = 1, 2, \cdots, r\,;\ k < n)$$

al variare degli $\dfrac{r^2(r-1)}{2}$ *parametri* λ^i_{kn}.

Raccogliendo le y, le (5.6) si possono anche scrivere

$$(5.7) \qquad \sum_p \left[\sum_n \left(2b^i_{pn} + \lambda^i_{pn}\right) x_n - \sum_k \lambda^i_{kp} x_k\right] y_p - y_i = -x_i$$
$$(i, k, n, p = 1, 2, \cdots, r\ ;\ k < p < n).$$

Risolvendo questo sistema di r equazioni lineari nelle r incognite y_p, si ottengono le equazioni di $\mathcal{C}_r$ sotto forma esplicita.

Consideriamo la matrice dei coefficienti e dei termini noti del sistema (5.7)

$$M = \begin{vmatrix} \sum_n^r \left(2b_{1n} + \lambda^i_{1n}\right) x_n & \\ \vdots & \\ \sum_i^r {}_n \left(2b^i_{i-1\,n} + \lambda^i_{i-1\,n}\right) x_n - \sum_1^{i-2} {}_k \lambda^i_{ki-1} x_k & \\ \sum_{i+1}^r {}_n \left(2b^i_{in} + \lambda^i_{in}\right) x_n - \sum_1^{i-1} {}_k \lambda^i_{ki} x_k - 1 & \\ \sum_{i+2}^r {}_n \left(2b^i_{i+1\,n} + \lambda^i_{i+1\,n}\right) x_n - \sum_1^{i} {}_k \lambda^i_{ki+1} x_k & \\ \vdots & \\ - \sum_1^{r-1} {}_k \lambda^i_{kr} x_k & \\ - x_i & \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

superficie quasi-asintotiche della V^6_4 *di* S_8 *che rappresenta le coppie di punti di due piani*, « Rend. dell'Accademia d'Italia », ser. VII, vol. I, p. 228, 1940; VILLA, op. cit. nella (31); VILLA, op. cit. nella (1).

(33) Si escludono gli $S_{r(r+1)}$ passanti per l'$S(2)$ e appartenenti ad uno degli iperpiani $X_{ik} - X_{ki} = 0$ perchè intersecano l'S_{2r} tangente in O a V_{2r} in un S_{r+1} (almeno). Si veda la nota (30).

indichiamo con D_s il determinante, d'ordine r, che si ottiene dalla matrice M sopprimendo la s–esima orizzontale ($s = 1, 2, \cdots, r$) e con Δ il determinante, d'ordine r, che si ottiene dalla matrice M sopprimendo l'ultima orizzontale. Le equazioni esplicite di $\mathcal{C}_r$ sono allora

$$y_i = (-1)^{r-s} \frac{D_s}{\Delta}.$$

Analogamente si ottengono le inverse.

La V_{r-2}, luogo in S_r dei punti singolari di $\mathcal{C}_r$, è rappresentata da

$$M = 0 \text{ (34)}.$$

Analogamente si ottiene la rappresentazione analitica di V'_{r-2}.

In S_r il sistema lineare omaloidico relativo a $\mathcal{C}_r$ è individuato dalle ipersuperficie $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $\cdots$, $D_r = 0$, $\Delta = 0$ corrispondenti in $\mathcal{C}_r$ rispettivamente agli iperpiani $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $\cdots$, $y_r = 0$ e all'*iperpiano improprio* (nn. 3, 4).

Le $\mathcal{C}_r$ osculatrici la T in (O, O') hanno ivi le stesse direzioni caratteristiche e le stesse proiettività caratteristiche (cioè la stessa configurazione caratteristica) di T. Sarebbe interessante, per $r > 2$, date le direzioni e le proiettività caratteristiche di T, assegnare costruzioni delle $\mathcal{C}_r$ osculatrici, analoghe a quelle ottenute per $r = 2$ (35).

6. CARATTERIZZAZIONE DI UNA $\mathcal{C}_r$ OSCULATRICE. – Avendo già determinati i riferimenti intrinseci (nn. 3, 4), il problema di caratterizzare una delle $\infty^{\frac{r^2(r-1)}{2}}$ $\mathcal{C}_r$ osculatrici non offre ormai serie difficoltà, può anzi essere risolto in modi diversi, ma offre minore interesse (36).

(34) La V_{r-2} è dunque una varietà di S_r ottenuta uguagliando a zero una matrice (ad r orizzontali e $r+1$ verticali) i cui elementi sono forme lineari nelle variabili (si veda: C. SEGRE, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*. Questi « Rendiconti », ser. V, vol. IX, p. 253, 1900; GODEAUX, op. cit.). D'altra parte, siccome una varietà rappresentata analiticamente in tal modo si può sempre considerare come una V_{r-2} relativa ad una $\mathcal{C}_r$, dalla nota (26) segue la proprietà:

Per un punto generico di S_r passano $2^r - 1$ rette che si appoggiano in $r - 1$ punti ad una V_{r-2} di S_r ottenuta uguagliando a zero una matrice (ad r orizzontali ed $r+1$ verticali) i cui elementi sono forme lineari nelle variabili.

Non mi consta che questa proprietà fosse già stata osservata per $r > 3$ [per $r = 3$ si ha una sestica di genere 3 ed è noto che per ogni punto dello spazio passano sette corde della sestica, cfr. ad esempio: LORIA, loc. cit., nella (24)].

(35) VILLA, il primo dei lavori cit. nella (2), n. 5.

(36) Ben diverso sarebbe l'interesse di questa ricerca se non si conoscessero già i riferimenti intrinseci. Allora la caratterizzazione di una $\mathcal{C}_r$ osculatrice permetterebbe appunto di determinare tali riferimenti intrinseci, come è già stato fatto per $r = 2$ in vari casi. Si veda: BOMPIANI, op. cit. nella (5); VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo nel caso cremoniano*. Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. II, p. 136, 1947; VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo*, « Boll. dell'U M. I. », ser. III, vol. II, p. 3, 1947. Nel penultimo di questi lavori fra l'altro s'interpretano geometricamente

Per $r = 2$, fra le ∞^2 trasformazioni quadratiche osculatrici se ne caratterizza subito una imponendole che, in uno dei piani, *i punti impropri* di due rette caratteristiche (n. 3) sianò punti singolari per essa.

Per $r = 2$, è (nn. 2, 3) $2\,b^1_{12} = 2\,b^2_{12} = -1$ e

$$M = \begin{vmatrix} (\lambda^1_{12} - 1)\,x_2 - 1 & (\lambda^2_{12} - 1)\,x_2 \\ \lambda^1_{12}\,x_1 & \lambda^2_{12}\,x_1 + 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Imponendo che dei tre punti singolari $M = 0$ due siano i punti impropri di $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, si ha $\lambda^1_{12} = 1$, $\lambda^2_{12} = 0$ e corrispondentemente, per le (5.7), la trasformazione quadratica osculatrice

$$x_1 = \frac{y_1}{1 - y_2}, \quad x_2 = \frac{y_2}{1 - y_1}\ (37).$$

Per $r > 2$, per caratterizzare una delle $\mathfrak{C}_r$ si può ricorrere alla V_{r-2}, luogo dei punti singolari di $\mathfrak{C}_r$, oppure alle ipersuperficie $D_s = 0$, $\Delta = 0$, imponendo particolari condizioni geometriche (come il passaggio per punti, ecc.) (38).

Oppure, sempre per $r > 2$, si può procedere estendendo un procedimento già seguito per $r = 2$ (39), ricorrendo cioè alle $\frac{3^r - 1}{2}$ coppie di

i riferimenti ottenuti contemporaneamente per altra via dal BOMPIANI, ma è chiaro che si possa senz'altro prescindere dal risultato del BOMPIANI e procedere come nell'ultimo lavoro ora citato.

Nella geometria affine (e metrica) per caratterizzare una $\mathfrak{C}_r$ osculatrice si possono imporre a $\mathfrak{C}_r$ particolari condizioni in relazione agli elementi impropri.

(37) Cfr.: VILLA, il primo dei lavori cit. nella (2), n. 5; BOMPIANI, op. cit. nella (5), p. 842.

(38) Ad esempio, per $r = 3$, fissati tre punti A_1, A_2, A_3 su tre rette caratteristiche di uno degli spazi (ad esempio sugli assi x_1, x_2, x_3), è unica la trasformazione cubica osculatrice per cui le due intersezioni di x_1, x_2, x_3 con la sestica dei punti singolari coincidono risp. in A_1, A_2, A_3, la retta $A'_1 A_2$ facendo parte della sestica (che si spezza quindi in $A_1 A_2$ e in una quintica residua). Assumendo, ad esempio, come punti A_1, A_2, A_3 i *punti impropri* degli assi x_1, x_2, x_3 si caratterizza quindi una trasformazione cubica osculatrice. Essa è relativa ai seguenti valori dei nove parametri:

$$\lambda^i_{12} = k b^i_{12} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \lambda^1_{13} = -(k+1)\,\frac{b^1_{12}\,b^2_{12}}{b^3_{12}} - b^1_{13} - b^2_{23}, \quad \lambda^2_{13} = -k\,\frac{(b^2_{12})^2}{b^3_{12}},$$

$$\lambda^3_{13} = -k\,b^2_{12}, \quad \lambda^1_{23} = (k+2)\,\frac{(b^1_{12})^2}{b^3_{12}}, \quad \lambda^2_{23} = (k+1)\,\frac{b^1_{12}\,b^2_{12}}{b^3_{12}} - b^1_{13} - b^2_{23}, \quad \lambda^3_{23} = (k+2)\,b^1_{12},$$

dove k è un'espressione in b^i_{12}, b^1_{13}, b^2_{13}, b^1_{23}, b^2_{23} che omettiamo per brevità ($b^3_{12} \neq 0$).

Sempre per $r = 3$, si possono caratterizzare geometricamente trasformazioni cubiche osculatrici anche nel modo seguente.

Si consideri, ad esempio, la superficie cubica di S_3 $\Delta = 0$ corrispondente nella trasformazione cubica al piano improprio di S'_3. Imponendo alla quadrica polare di O rispetto alla $\Delta = 0$ di spezzarsi nell'iperpiano improprio contato due volte, si hanno appunto nove condizioni nei nove parametri λ (sei delle quali sono però quadratiche).

(39) BOMPIANI, op. cit. nella (5), pp. 845–846.

direzioni d'iperosculazione in (O, O') della data trasformazione T e di una $\mathfrak{C}_r$ [40]. Nella stella di centro O (opp. O') si ottiene così un sistema algebrico, in generale $\infty^{\frac{r^2(r-1)}{2}}$, di gruppi di $\frac{3^r-1}{2}$ rette [41]. Caratterizzando mediante qualche proprietà geometrica uno di questi gruppi si caratterizza anche la $\mathfrak{C}_r$ corrispondente [42].

7. SULL'INVOLUZIONE DELLE DIREZIONI D'IPEROSCULAZIONE. – Per $r=2$, le quaterne di direzioni d'iperosculazione, uscenti da O, relative alla data trasformazione T e alle trasformazioni quadratiche osculatrici, formano un'involuzione, in generale, ∞^2 [43].

Il procedimento seguìto dal Bompiani per la determinazione intrinseca della *retta impropria* in uno dei piani si fonda sulla considerazione delle trasformazioni quadratiche osculatrici e si attua appunto mediante l'involuzione delle direzioni d'iperosculazione [44].

Dimostreremo ora che a questa involuzione si perviene anche mediante le nozioni introdotte nel n. 3, senza ricorrere cioè alle trasformazioni quadratiche osculatrici.

Ad ogni retta t per O (o per O') $\neq$ dalle tre rette caratteristiche, è associata (n. 3) una proiettività non degenere. Conviene ora considerare anche il caso che la retta t sia una delle tre rette caratteristiche. Quando t è retta caratteristica la sua corrispondente $\bar{t}$ in ω è pure caratteristica. All'$\bar{E}_3$ di flesso di 2ª specie, di centro O', appartenente a $\bar{t}$ corrisponde allora un E_3 di flesso. La proiettività individuata da questo E_3 (*proiettività associata*) fra la punteggiata t e il fascio di rette di centro O è degenere: ad un punto generico della tangente t corrisponde la retta t stessa, mentre ad una retta gene-

(40) VILLA, l'ultimo dei lavori cit. nella (1), n. 4.

(41) VILLA, l'ultimo dei lavori cit. nella (1), n. 5.

(42) Siccome nella stella di centro O (oppure O') si possiede un riferimento intrinseco (già dall'intorno del 2° ordine della trasformazione: cfr. n. 2), ogni retta della stella O è geometricamente caratterizzata dalle sue coordinate. Per caratterizzare uno dei gruppi di rette indicati nel testo basterà quindi imporre l'appartenenza ad esso di rette convenientemente assegnate. Ad esempio, per $r=3$, si può procedere nel modo seguente: fissate trerette s_1, s_2, s_3 nella stella di centro O (mediante le loro coordinate o mediante qualche proprietà geometrica: ad esempio prendendo le tre rette congiungenti O coi vertici del triangolo diagonale del quadrangolo ottenuto segando con un piano, non passante per O, gli assi x_1, x_2, x_3 e la retta $x_1 = x_2 = x_3$), imporre che delle tredici rette di un gruppo due cadano in s_1, due in s_2 e due in s_3. S'impongono così appunto nove condizioni nei λ.

Si noti (per r qualunque > 1) che si utilizza qui il solo riferimento intrinseco nella stella O, e non quello in S_r. Segue che una volta caratterizzato il gruppo e quindi la $\mathfrak{C}_r$ osculatrice si potrebbe, per questa via, ottenere il riferimento intrinseco, che noi però abbiamo già ottenuto più semplicemente nei nn. 3, 4.

(43) La condizione necessaria e sufficiente perchè questa involuzione sia ∞^1, invece che ∞^2, trovasi in VILLA, *Ricerche locali sulle trasformazioni cremoniane*, « Rend. dell'Istituto Lombardo », ser. III, vol. LXXVIII, p. 66, 1944; Mem. dell'Accademia delle Scienze di Bologna, ser. X, vol. I, p. 196, 1944.

(44) BOMPIANI, op. cit. nella (5), p. 845.

rica del fascio O corrisponde il punto O. Dunque: *la proiettività associata ad una retta caratteristica è degenere* (*ad un punto generico di essa corrisponde la retta stessa, mentre ad una retta generica per* O *corrisponde lo stesso punto* O).

Si ha:

Assegnata una retta r non passante per O, *facendo corrispondere ad una retta t del fascio* O *la retta* t_1 *corrispondente del punto* (r, t) *nella proiettività associata a* t, *nasce nel fascio* O *una corrispondenza* (1, 5).

Infatti la retta assegnata

$$\lambda x_1 + \mu x_2 + 1 = 0$$

non passante per O, interseca la retta $x_2 = kx_1$ nel punto $\left(-\frac{1}{\lambda+\mu k}, -\frac{k}{\lambda+\mu k}\right)$ a cui corrisponde nella proiettività associata (3.2) la retta $x_2 = \rho x_1$ dove

$$(7.1)\quad (k-\rho)[k\varphi(1,k) - \psi(1,k) + \lambda k(1-k) + \mu k^2(1-k)] = k(k+\rho)(1-k)^2.$$

La corrispondenza $\gamma_{\lambda,\mu}$ di equazione (7.1) è dunque (1,5).

Notiamo che:

Le uniche rette unite in $\gamma_{\lambda,\mu}$ *sono le rette caratteristiche.*

Invero per $\rho = k$ la (7.1) porge $k^2(1-k)^2 = 0$, cioè le rette caratteristiche $k = 0$, $k = \infty$, $k = 1$ contate due volte.

Ad una retta caratteristica (considerata come retta t_1) corrispondono quindi in $\gamma_{\lambda,\mu}$ cinque rette, una delle quali è la retta caratteristica stessa, dalla quale si prescinderà.

Orbene:

Nel fascio O, *l'involuzione individuata dalle tre quaterne di rette che corrispondono in* $\gamma_{\lambda,\mu}$ *alle tre rette caratteristiche* (*considerate come rette* t_1), *è indipendente dalla retta r assegnata* (*cioè da* λ *e* μ), *dipende perciò solo da* T, *ed è l'involuzione delle direzioni d'iperosculazione.*

Infatti alle rette caratteristiche $\rho = 0$, $\rho = \infty$, $\rho = 1$ corrispondono in $\gamma_{\lambda,\mu}$ per la (7.1) le quaterne (prescindendo risp. dalla $k = 0$, $k = \infty$, $k = 1$)

$$k\varphi(1,k) - \psi(1,k) + (\lambda - 1)k(1-k) + (\mu + 1)k^2(1-k) = 0,$$
$$k\varphi(1,k) - \psi(1,k) + (\lambda + 1)k(1-k) + (\mu - 1)k^2(1-k) = 0,$$
$$k\varphi(1,k) - \psi(1,k) + (\lambda - 1)k(1-k) + (\mu - 1)k^2(1-k) = 0.$$

L'involuzione individuata da queste tre quaterne è

$$k\varphi(1,k) - \psi(1,k) + \alpha k(1-k) + \beta k^2(1-k) = 0$$

(α, β essendo parametri); non dipende quindi da λ, μ e coincide con l'involuzione delle direzioni d'iperosculazione [45].

All'involuzione delle direzioni d'iperosculazione si perviene anche in altro modo, in virtù della proprietà:

(45) Bompiani, op. cit., nella (5), p. 845.

L'involuzione delle direzioni d'iperosculazione è costituita dalle quaterne corrispondenti ad una stessa retta caratteristica (pensata come retta t_1) nelle ∞^2 corrispondenze $\gamma_{\lambda,\mu}$, ottenute variando la retta r (cioè λ, μ).

Infatti, ad esempio, alla retta caratteristica $\rho = 0$ corrisponde in $\gamma_{\lambda,\mu}$ la quaterna (prescindendo dalla $k = 0$)

$$k\varphi(1, k) - \psi(1, k) + (\lambda - 1)\, k\,(1 - k) + (\mu + 1)\, k^2 (1 - k) = 0,$$

la quale, al variare di λ, μ, genera appunto l'involuzione delle direzioni d'iperosculazione.

Dimostriamo ancora come si possa pervenire anche alla determinazione intrinseca della retta impropria di uno dei piani, già ottenuta, per altra via, nel n. 3. Invero per ogni retta r (non passante per O)

$$\lambda x_1 + \mu x_2 + 1 = 0 \tag{7.2}$$

è individuata la quaterna di rette

$$k\varphi(1, k) - \psi(1, k) + (\lambda - 1)\, k\,(1 - k) + (\mu + 1)\, k^2 (1 - k) = 0 \tag{7.3}$$

corrispondente alla retta caratteristica $x_2 = 0$ nella corrispondenza $\gamma_{\lambda,\mu}$.

Caratterizzando quindi con qualche proprietà geometrica la quaterna (7.3) si viene a caratterizzare geometricamente la retta (7.2), che potrà assumersi come retta impropria, oppure come retta a coefficienti comunque assegnati. Ad esempio possiamo considerare la quaterna (7.3) per cui le quattro rette si dividono in due coppie separate armonicamente dalle rette caratteristiche $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ ed assumere la retta (7.2) ad esempio come retta $x_1 - x_2 + 1 = 0$. Per $\lambda = 1$, $\mu = -1$, la (7.3) diviene

$$k\varphi(1, k) - \psi(1, k) = 0$$

nella quale, per la condizione imposta, devono annullarsi i coefficienti di k^3 e di k. Si ritrovano così gli sviluppi canonici e i riferimenti intrinseci di Bompiani (46).

Geometria. — *Sopra qualche classe di superficie* R. Nota di F. MARCUS, presentata (*) dal Socio G. CASTELNUOVO.

In una ricerca (1) abbiamo incontrato due classi di superficie, che presentano un certo interesse per le congruenze di rette W. Si tratta del seguente problema. Determinare, se esistono, le superficie che possono porsi in corrispondenza biunivoca con un piano, tale che, alle curve della superficie i cui piani osculatori passano per le rispettive normali proiettive, corrispondano rette sul piano. E, dualmente, determinare superficie godenti la seguente proprietà: alle curve, lungo le quali i piani tangenti alla superficie formano una sviluppabile il cui spigolo di regresso incontra le seconde normali, corrispondano pure rette sul piano.

(46) BOMPIANI, op. cit. nella (5), p. 846.

(*) Nella seduta del 13 marzo 1948.

(1) F. MARCUS, *Sur quelques correspondances*. (La Nota sarà pubblicata quanto prima).

Indichiamo con $x_i = x_i(u, v)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ le coordinate omogenee e normali di un punto che descrive al variare di u, v, una superficie S_1, u e v essendo le asintotiche. Esse sono le soluzioni del sistema canonico di Fubini [2]

$$(1) \qquad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x \\ x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x \end{cases} \qquad (\theta = \log \beta\gamma).$$

Similmente siano $\xi_i = \xi_i(u, v)$ le coordinate tangenziali di una superficie che si corrispondono secondo Cêch con le coordinate puntuali; allora esse sono le soluzioni del sistema duale di (1) che si ottiene cambiando β, γ con $-\beta$, $-\gamma$, e π_{ii} con p_{ii} dove

$$(2) \qquad \begin{cases} \pi_{11} = p_{11} + \beta_v + \beta\theta_v \\ \pi_{22} = p_{22} + \gamma_u + \gamma\theta_u \end{cases}$$

Per la risoluzione di questi problemi, ci siamo serviti dei risultati di Fubini [3], sulle reti piane, ottenendo il risultato seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè si verifichi la corrispondenza richiesta è data rispettivamente da

$$(3) \qquad \pi_{11\,v} = \pi_{22\,u} = 0 \qquad \text{oppure} \qquad (3') \qquad p_{11\,v} = p_{22\,u} = 0.$$

Nel primo caso, risulta che $\pi_{11} = \varphi(u)$; $\pi_{22} = \psi(v)$, essendo $\varphi(u)$, $\psi(v)$ rispettivamente funzioni arbitrarie di u e v.

Con un cambiamento dei parametri, senza cambiare le linee asintotiche si può rendere

$$(4) \qquad \pi_{11} = \pi_{22} = 1.$$

Consideriamo adesso la prima forma [4] delle condizioni d'integrabilità delle (1) delle quali scriviamo soltanto la prima e la terza condizione, cioè

$$(1') \qquad \begin{cases} \gamma_{uu} + 2p_{22\,u} + (\gamma\theta_u)_u + \theta_v\theta_{uv} = \beta\gamma_v + 2\beta_v\gamma = \theta_{uvv} \\ \theta_u \frac{\partial p_{22}}{\partial u} + \beta\frac{\partial p_{22}}{\partial v} + 2p_{22}\beta_v + \frac{\partial^2 p_{11}}{\partial v^2} = \theta_v \frac{\partial p_{11}}{\partial v} + \gamma\frac{\partial p_{11}}{\partial u} + 2p_{11}\gamma_u + \frac{\partial^2 p_{22}}{\partial u^2}. \end{cases}$$

(Per le coordinate tangenziali si debbono cambiare nelle medesime, β, γ, p_{ii} rispettivamente in $-\beta$, $-\gamma$ e π_{ii}).

Tenendo conto di (4) risulta da $(1'_2)$ che

$$(5) \qquad \beta_v = \gamma_u.$$

Dunque le superficie cercate, sono superficie R.

(2) G. Fubini–E. Cêch, *Introduction à la Géométrie Proj. des Surfaces*, p. 47.

(3) G. Fubini, *Sur la géom. proj. diff. des reseaux plans.* «Compositio Mathematica»,

(4) G. Fubini–E. Cêch, *Geometria proiett. diff. delle Superficie*. Zanichelli Bologna, tomo I, p. 94.

Per il caso duale, cioè quando sono soddisfatte le (3′) si potrà rendere

$$p_{11} = p_{22} = 1 \tag{4′}$$

e le superficie cercate sono, come risulta da $(1'_2)$ pure superficie R.

Ma ciò che caratterizza queste classe di superficie sono le seguenti proprietà:

Le normali proiettive oppure rispettivamente le seconde normali di queste superficie, descrivono, al variare di u e v, delle congruenze W.

Per dimostrare questo, indichiamo con $r = (x\, x_{uv})$ le coordinate di Plücker della normale proiettiva. Tenendo conto di (1) risulta

$$r_u = (x_u\, x_{uv}) + (\beta\gamma + \theta_{uv})(x\, x_u) + (x\, x_v) + \theta_u (x\, x_{uv})$$

$$r_v = (x_v\, x_{uv}) + (\beta\gamma + \theta_{uv})(x\, x_v) + (x\, x_u) + \theta_v (x\, x_{uv})$$

$$r_{uv} = \theta_v r_u + \theta_u r_v + r(2\theta_{uv} + \beta\gamma - \theta_u \theta_v) + F(x\, x_u)$$

dove

$$F = (\theta_{uv} + \beta\gamma)_v + \gamma - \theta_v \theta_{uv} - \beta\gamma\theta_v - p_{22u} - \gamma p_{11}$$

Da (2) risulta

$$\left\{ \begin{array}{c} p_{11} = 1 - \beta_v - \beta\theta_v \\ p_{22u} + \gamma_u + \gamma_u\theta_u + \gamma\theta_{uu} = 0. \end{array} \right. \tag{7}$$

Perciò il coefficiente F di (x_u) di (6_3) diventa tenendo conto di (7)

$$F = \gamma_{uu} + \gamma_u\theta_u + \gamma\theta_{uu} + \beta\gamma_v + 2\beta_v\gamma + \theta_{uvv} - \theta_u\theta_v. \tag{6′}$$

Ma da $(1'_1)$ tenendo conto di (7) risulta $F = 0$.

Dunque le coordinate di retta della normale proiettiva, soddisfano ad una equazione di Laplace. *Cioè la congruenza delle normali proiettiva è* W. Di più, gli invarianti di Darboux dell'equazione di Laplace, sono uguali e si ha $h = k = \beta\gamma + \theta_{uv}$.

Nel caso duale, cioè quando si ha $p_{11} = p_{22} = 1$ si può dimostrare similmente che la retta $(x_u\, x_v)$ cioè la seconda normale, genera al variare di u, v, pure una congruenza W. Le coordinate di questa retta soddisfano pure una equazione di Laplace ad invarianti uguali ad

$$H = K = \beta\gamma + \theta_{uv}.$$

Calcoliamo adesso le sviluppabili della congruenza delle normali proiettive. Essendo $\pi_{11} = \pi_{22} = 1$ risulta [5] che la loro equazione è $du^2 - dv^2 = 0$ e secondo una proprietà delle superficie R [6], le tangenti a queste linee, descrivono pure delle congruenze W.

(5) G. FUBINI-E. ČECH, *Introduction à la Géom. proj. des surfaces*, p. 92.
(6) P. FUBINI-E. ČECH, Idem, p. 119.

Meccanica. — *Sugli effetti statici dei fenomeni viscosi.* Nota I di F. Levi, presentata (*) dal Corrisp. G. Colonnetti.

In una recente Memoria (1), chi scrive deduce, da una particolare applicazione del principio dei lavori virtuali, la legge di variazione delle caratteristiche dello stato di tensione in un sistema elastico iperstatico piano, omogeneo, assimilabile ad un solido di de Saint Venant, sottoposto ad una distorsione di Volterra, nel quale si verifichino delle deformazioni viscose ad ogni istante proporzionali alla sollecitazione normale unitaria longitudinale (unica componente di tensione presa in considerazione, poichè, per ipotesi, si ammette di poter trascurare l'effetto del taglio).

Torniamo ora in argomento per mettere in evidenza come, alla dimostrazione su cui quel nostro lavoro si fonda, essenzialmente basata sulla teoria dell'ellisse di elasticità, e come tale assolutamente sufficiente a giustificare le conclusioni raggiunte, si possa conferire maggior generalità e concisione quando ci si ricolleghi alla particolare reciprocità che si riscontra sempre nei solidi elastici fra effetti dei carichi e effetti delle distorsioni.

Riprendiamo dunque in esame un solido elastico nel quale ci si possa limitare a tener conto delle deformazioni longitudinali in una direzione privilegiata.

È facile rendersi conto che, in siffatte strutture, lo stato di deformazione elastico che accompagna l'introduzione di una distorsione è unico e ben determinato, e che esso è indipendente dal valore del modulo di elasticità del materiale (sola caratteristica elastica che interviene nel nostro studio). Basta infatti osservare che il valore della tensione unitaria nel punto generico, dovuta alla distorsione, risulta proporzionale al modulo elastico; quanto dire che la deformazione elastica corrispondente, la cui ampiezza unitaria è eguale al quoziente della tensione stessa per il modulo, rimane necessariamente costante se il modulo varia.

Ma se allora noi ci riportiamo al fenomeno viscoso e se teniamo presente che esso equivale, durante un intervallo di tempo infinitesimo, ad una diminuzione del modulo elastico, ne possiamo immediatamente dedurre che la legge che dovrà regolare l'andamento dello stato di tensione sarà la costanza della deformazione nell'elemento generico.

Otteniamo così direttamente l'equazione differenziale del fenomeno (2):

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_T}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon + \int_0^t \sigma \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt}\, dt\right) = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \sigma \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \sigma\gamma\,\delta e^{-\delta t} = 0$$

(*) Nella seduta del 13 marzo 1948.

(1) F. Levi, *Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa.* (I Nota). « Accademia Nazionale Lincei », vol. IV, fasc. 1, 1948.

(2) Le notazioni sono identiche a quelle adottate nel lavoro citato.

dalla quale risulta la legge di variazione della tensione nel punto generico:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-E\bar{\varepsilon}_0} = \sigma_0 e^{-E\gamma(1-e^{-\delta t})}$$

Questa dimostrazione più sintetica ha il vantaggio di mettere in evidenza come il fenomeno viscoso, nella categoria di solidi considerata, non influisca sulla deformazione dovuta ad una distorsione [3].

Questa conclusione è in un certo senso simmetrica di quella che stabilisce che il fenomeno viscoso non ha effetto sullo stato di tensione dovuto all'azione di un carico esterno.

Se la forma delle strutture o il tipo della distorsione impressa sono tali da far dipendere lo stato di tensione dal valore del coefficiente di Poisson, e ciò in misura non trascurabile, i risultati precedenti non sono validi che se si può ammettere che il coefficiente m conservi in campo viscoso il valore stesso che esso presentava in regime elastico. Solo a questa condizione infatti la deformazione viscosa rimane simile a quella elastica [4]. È però poco probabile che questa condizione si realizzi in pratica in quanto sembra verosimile che in regime viscoso il valore di m tenda ad abbassarsi.

È tuttavia interessante notare che la non applicabilità delle ipotesi poste alla base dei nostri studi deve subito rivelarsi attraverso un mutamento nel tempo dello stato di deformazione dovuto ad una distorsione.

Sembra dunque legittimo sperare che su queste considerazioni si possa fondare un controllo sperimentale dei risultati teorici. Controllo che dovrebbe stabilire non solo la possibilità o meno di estendere la teoria a strutture che non rientrino nella categoria dei solidi prismatici, ed a distorsioni qualsiasi, ma anche il grado di attendibilità dei risultati nell'ambito di tutte quelle costruzioni nelle quali, in campo elastico, basandosi sulla teoria di De Saint Venant, si trascura l'effetto del taglio. (Non è infatti inverosimile che alcune delle generalizzazioni dei risultati di de Saint Venant non siano più valide in

(3) La distorsione viscosa che si produce in questo caso rientra così in una particolare classe di distorsioni che determinano tensioni ma non deformazioni; classe che si contrappone a quella delle distorsioni congruenti che determinano deformazioni ma non tensioni.

(4) Per rendersi conto che una distorsione viscosa in ogni punto simile alla deformazione elastica non produce deformazioni si può ragionare come segue.

Nel solido elastico in equilibrio sotto l'azione della distorsione impressa (e dunque per forze esterne tutte nulle) l'introduzione di una siffatta distorsione viscosa deve implicare l'apparizione di una ulteriore distribuzione di tensioni, fra loro equilibrate, alle quali corrisponda uno stato di deformazione complessivo congruente. Fra tutte le distribuzioni di tensioni possibili, prendiamo in esame quella alla quale corrisponde uno stato di deformazione elastico in ogni punto eguale e contrario alla deformazione viscosa. Questa particolare distribuzione di tensioni risulta evidentemente in ogni punto simile a quella iniziale, esistente nel solido prima dell'intervento del fenomeno viscoso. Come tale essa è sicuramente equilibrata per forze esterne nulle. Non vi è dubbio d'altra parte che lo stato di deformazione finale a cui essa da luogo debba risultare congruente (poichè esso è, per ipotesi, identico a quello che esisteva prima dell'apparizione della deformazione viscosa). Tale particolare soluzione, sicuramente possibile ed equilibrata, è dunque necessariamente quella che si verifica in realtà.

regime viscoso quando l'andamento della deformazione è probabilmente molto più sensibile agli effetti delle tensioni tangenziali di quanto non lo sia la deformazione elastica).

Volendo istituire delle esperienze di controllo su una struttura in calcestruzzo, si sarà logicamente condotti ad adottare, come distorsione generatrice del fenomeno viscoso, l'effetto stesso del ritiro. L'introduzione di qualsiasi altra deformazione impressa, venendo a sovrapporsi al ritiro, condurrebbe infatti ad un fenomeno risultante troppo complesso, di interpretazione sicuramente molto incerta.

Ma allora bisogna osservare che la distorsione a cui si può assimilare l'effetto del ritiro varia nel tempo, per cui non vale più la legge della costanza della deformazione (5). I risultati precedenti consentono tuttavia di affermare che, quando si possa ammettere la costanza del coefficiente m, la deformazione ad ogni momento dovrà risultare eguale a quella che un ritiro di entità eguale a quello che si sarà manifestato a quell'istante determinerebbe nella struttura in assenza del fenomeno viscoso.

Nelle formule che traducono gli effetti a tempo indefinito del fenomeno viscoso, le proprietà del materiale intervengono sempre attraverso il prodotto $E\gamma$ (del modulo elastico per l'ordinata dell'asintoto della curva rappresentativa della viscosità specifica).

Questo coefficiente, privo di dimensioni, appare dunque come una caratteristica importante del conglomerato messo in opera.

Per un calcestruzzo ordinario, caratterizzato da un modulo elastico di circa 200.000 kg/cm², la viscosità specifica sembra dover raggiungere un valore approssimativo di 0,8/100.000/kg $^{-1}$/.cm². In queste condizioni, risulta per $E\gamma$ un valore prossimo di 1,6.

Se si adottano questi dati, il coefficiente di riduzione a tempo indefinito dei valori delle sollecitazioni determinate da una distorsione costante nel tempo risulta di

$$\frac{1}{e^{E\gamma}} = \frac{1}{e^{1,6}} \simeq 0,2$$

mentre il coefficiente di riduzione degli effetti statici del ritiro assume, a tempo indefinito, il valore

$$-\frac{1}{E\gamma}\left(e^{-E\gamma} - 1\right) = \frac{1}{1,6}\left(1 - e^{-1,6}\right) \simeq 0,5 .$$

Più che discutere l'attendibilità di questi dati numerici, ci preme di far notare che, con ogni probabilità, il valore del prodotto $E\gamma$ varietà assai

(5) Basta infatti riportarsi all'equazione differenziale del fenomeno (*) per rendersi conto che essa non esprime più l'invarianza della deformazione totale come ciò avveniva in presenza di una distorsione costante.

(*) F. Levi, *Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa* (II^a Nota). «Acc. Naz. Lincei», vol. IV, fasc. 2, 1948.

poco quando si considerino calcestruzzi anche assai diversi fra loro. È infatti ben noto che un conglomerato molto compatto presenta in genere una viscosità specifica relativamente bassa, mentre i conglomerati a basso modulo elastico danno luogo ad un fenomeno viscoso di notevole entità.

Alla luce di questo insieme di risultati, ed in particolare appoggiandosi sulla validità in campo viscoso del principio di sovrapposizione, si può tentare di delineare qualitativamente il comportamento nel tempo delle strutture iperstatiche in calcestruzzo.

Una costruzione viene generalmente sottoposta all'azione dei seguenti effetti:

Carichi:	permanenti
	accidentali
Distorsioni dovute a:	ritiro
	variazioni di temperatura
	cedimenti
	eventuali deformazioni plastiche
	deformazioni impresse artificiali.

Precisiamo subito che non ci occuperemo dei carichi accidentali, ammettendo che il loro intervento non abbia effetto sul fenomeno viscoso (per ipotesi sempre molto lento).

Lo stato di tensione dovuto al carico permanente, purchè mantenuto in tutti i punti entro il limite di elasticità del materiale, non è modificato dal successivo intervento di deformazioni viscose; queste si limiteranno infatti ad influire sullo stato di deformazione della struttura.

Per quanto si riferisce al ritiro, abbiamo già visto che la viscosità determina una riduzione del corrispondente regime statico. Si tratta evidentemente di un fenomeno favorevole in quanto gli effetti del ritiro sono generalmente nocivi.

Lo stesso dicasi dei cedimenti dei vincoli. La viscosità tenderà sempre ad attenuarne gli effetti. Per dei cedimenti bruschi, verificantisi nella struttura giovane, bisognerà applicare, a tempo indefinito, il fattore di riduzione $1/e^{E\gamma}$. Per dei cedimenti graduali, varrà invece una formula più complessa alla quale corrisponderanno a tempo indefinito dei coefficienti di riduzione tanto più bassi quanto più il fenomeno sarà lento. Se infine il cedimento si produce molti anni dopo il getto, il suo effetto dovrà praticamente venir calcolato in regime elastico.

Per le variazioni di temperatura le cose si complicano.

Se si immagina che nella struttura giovane intervenga una prima variazione, ad esempio negativa, della temperatura media, si deve ammettere che questo effetto, sicuramente non istantaneo, si accompagni con l'apparizione di deformazioni viscose che tendono ad attenuare l'effetto statico corrispondente. Quando però la temperatura media tenderà a riaumentare, queste deformazioni viscose permarranno dando luogo, a loro volta, ad una vera e propria nuova distorsione praticamente equivalente ad una varia-

zione positiva di temperatura. Se le successive variazioni fossero simmetriche rispetto alla temperatura iniziale, e se il calcestruzzo conservasse sempre la stessa attitudine viscosa, questo fenomeno produrrebbe una specie di « isteresi statica » sicuramente favorevole. Di fatto, almeno nelle nostre regioni, le variazioni negative sono molto spesso le prime ad intervenire e le più notevoli. D'altra parte il calcestruzzo si invecchia assai rapidamente. È dunque probabile che l'effetto viscoso si traduca generalmente in una attenuazione degli effetti statici delle diminuzioni di temperatura [6].

Vediamo ora a quali conclusioni qualitative si può giungere in presenza di deformazioni plastiche.

Tali deformazioni, che si verificano nelle strutture giovani quanto in certi punti si superano i limiti di elasticità, danno luogo notoriamente a due diversi effetti [7]: *a*) una ridistribuzione delle tensioni sulle sezioni maggiormente sollecitate; *b*) una ridistribuzione delle sollecitazioni nella costruzione, dovuta all'intervento di una « distorsione plastica » la cui azione si sovrappone al regime statico dovuto ai carichi.

Sul primo fenomeno la viscosità non influisce. Sul secondo invece essa agisce con il suo solito effetto di smorzamento, il quale però, questa volta, non è più favorevole ma nocivo.

Allo stato attuale delle nostre conoscenze in materia è però ben difficile affermare che questa attenuazione dell'effetto di adattamento plastico si produca davvero. Non è infatti inverosimile che nelle fibre deformate plasticamente la deformazione viscosa sia più segnata che altrove e che l'ampiezza della distorsione plastica vada dunque aumentando a mano a mano che il suo effetto sul regime delle iperstatiche tende a ridursi.

Non vi è dubbio poi che l'attenuazione graduale dell'effetto favorevole della deformazione plastica si deve tradurre in una riapparizione delle cause che a questa deformazione hanno dato origine. Si avrà dunque, anche per questa ragione, una certa tendenza alla comparsa di nuovi cedimenti plastici.

La struttura sembra dunque dover raggiungere il suo stato definitivo di equilibrio attraverso una serie complessa di assestamenti successivi di ampiezza sempre decrescente.

Poche parole infine sul caso delle deformazioni artificialmente impresse. Come è già stato fatto osservare [8], l'attenuazione del loro benefico effetto, provocata dal fenomeno viscoso, può venir evitata sia applicando la distorsione quando la costruzione è già matura, sia « ridando la carica »,

(6) Non è da escludere che questo effetto possa venir quantitativamente apprezzato con metodi analitici analoghi a quelli che ci hanno consentito di calcolare gli effetti del ritiro.

(7) G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*. Einaudi, 1941.

(8) G. KRALL, *Dell'impostazione del progetto nelle costruzioni dei ponti*. Ed. della Bussola. Roma, 1947. Cfr. anche un articolo dell'Autore dal titolo: *Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa* pubblicato dal « Giornale del Genio Civile ».

ossia aumentando dopo un certo tempo l'ampiezza della deformazione impressa.

Il semplice elenco dei problemi che pone la messa in conto dei fenomeni viscosi sottolinea l'ampiezza e la complessità dell'argomento.

Non vi è dubbio però che la questione, inquadrata nelle leggi fondamentali che ne regolano l'andamento: separazione degli effetti, invarianza dell'effetto statico dei carichi, invarianza delle deformazioni dovute alle distorsioni, sembra uscire dal novero delle enunciazioni generiche per entrare nel campo d'azione della ricerca sistematica.

Meccanica. — *Durata limite di una perturbazione sincrona nelle costruzioni asismiche.* Nota di A. Galli, presentata (*) dal Socio M. Panetti.

In recenti studi, indipendentemente eseguiti da vari Autori, per una costruzione asismica di grande slancio, due sono stati i criteri adottati per dimostrare la stabilità in fase tellurica delle strutture progettate. Il 1° tendeva a valutare un periodo fondamentale, senza troppi accenni a quelli successivi, fuori dallo spettro delle scosse pericolose ($0{,}25 \leq \tau \leq 1{,}75$ sec.); il 2° a dimostrare che, anche in sede di sincronismo, purchè il numero delle scosse non fosse superiore ad un numero N, in media eguale a quello (i sismologi però non si sono espressi in merito) di un *treno probabile* di onde telluriche, di un certo grado della *Scala Mercalli*, la stabilità sussisteva sempre nel senso che le altre azioni accidentali *separatamente* considerate (giacchè parrebbe che queste – il vento tempestoso in particolare – non si accompagnano a sì sinistre perturbazioni) impegnavano maggiormente la struttura. Per confortarsi poi di quanto poteva accadere già al vertice pauroso del grado X del Mercalli, non sembrando legittimo diminuire N al di sotto di ~ 10, si considerò per quel che è l'indiscutibile smorzamento dei treni d'onde sismiche, il che appare ragionevole quando si guardino i sismogrammi dei terremoti più gravi.

Pur riconoscendo che in Asismica conta molto più il carattere generale statico-dinamico e costruttivo del disegno che non lo studio meccanico-analitico di una struttura, studio che necessariamente si mantiene nel vago per la grave incognita che sta già nello stesso evento tellurico (e ciò sostanzialmente e tacitamente è detto dal n. s. *Regolamento Ufficiale*, direttamente o indirettamente redatto da cultori insigni di Statica e Dinamica: Guidi, Panetti, P. Alfani, Danusso), penso che soffermarsi in tesi generale su questo modo di affrontare l'avversità del sincronismo sia non privo d'interesse; del resto, in relazione a questa questione sono recentemente apparsi alcuni

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1948.

studi anche su questi « Rendiconti » e, in ogni caso, per raggiungere quei caratteri asismici costruttivi di cui ho detto, gli studi analitici servono senza dubbio sia pur per vie più o meno indirette. Questo intento cercherò di raggiungere informandomi, in certo qual modo, ai criteri di « massimo cimento dinamico » del Levi Civita, con tanto fervore proseguiti dalla Sua Scuola (1).

Ciò posto, prendo senz'altro riferimento ad un'asta considerata come sistema lineare, rettilinea, che potrà schematizzare una torre od una travata da ponte. Da un suo estremo $x = 0$ si conti una coordinata x; sia $x = L$ l'altro estremo. Sia EJ il coefficiente di rigidità, $m = m(x)$ la distribuzione delle masse, $w = w(x, t)$ lo spostamento trasversale, $s_0 = s_0(t)$ lo spostamento rigido dei vincoli in seguito all'azione tellurica, che penserò nel senso di w.

Se $c = c(x, x')$ è la funzione di influenza (spostamento in x provocato dalla forza $F = 1$ in $x = x'$ e viceversa, per un noto teorema di reciprocità), poichè agiscono le sole forze d'inerzia conseguenti all'accelerazione assoluta

$$\ddot{s}_0(t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,,$$

si avrà

$$(1) \qquad w(x, t) = -\int_0^L m(x')\, c(x, x') \left[\ddot{s}_0(t) + \frac{\partial^2 w(x, x')}{\partial t^2} \right] dx'.$$

Quest'equazione integro differenziale è di tipo ben noto. Per risolverla basta considerare le autofunzioni $u_\varrho(x)$ dell'equazione omogenea del Fredholm (2)

$$(2) \qquad u_\varrho(x) = \sigma_\varrho^2 \int_0^L m(x')\, c(x, x')\, u_\varrho(x')\, dx'$$

sulle cui proprietà conseguenti al carattere *polar positivo definito* del *nucleo* mi limiterò a rilevare quelle di *ortonormalità* e *chiusura*, le prime essendo compendiate dalla nota relazione

$$\int_0^L m(x)\, u_\varrho(x)\, u_\tau(x)\, dx = \begin{cases} 1\,, & \varrho = \tau \\ 0\,, & \varrho \neq \tau. \end{cases}$$

Posto secondo Rayleigh

$$(3) \qquad w(x, t) = \Sigma_r\, u_r(x)\, \varphi_r(t),$$

con $\varphi_r(t)$ coefficienti dello sviluppo da intendersi come coordinate lagrangiane del sistema, si ha subito

$$(4) \qquad \ddot{\varphi}_r + \sigma_r^2 \varphi_r = F_r(t)$$

(1) Cfr. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle Vibrazioni*. Vol. I, cap. VI, § 7. Zanichelli, Bologna 1940.

(2) Cfr. op. cit., in (1), vol. I, cap. VII.

con

$$F_r = m_r \ddot{s}_0(t) \quad , \quad m_r = \int_0^L m(x)\, u_r(x)\, dx .$$

Osservo senza dimostrarlo che, ove esistesse un'azione dissipativa collegabile ad una funzione del Rayleigh, il che si sa fare quando esistano azioni interne viscose nel senso del Routh, la (4) diviene [3]

$$\ddot{\varphi}_r + \sigma_r^2 \varphi_r + 2 h_r \dot{\varphi}_r = F_r(t). \tag{5}$$

Per h_r si ha una relazione assai semplice

$$h_r = \frac{\mathfrak{F}}{2E}\, \sigma_r^2$$

con $\mathfrak{F}$ coefficiente dissipativo del Routh, E modulo di elasticità. Non sempre è legittima la legge di cui sopra, anche se le esperienze di Honda e Konno tendono a dimostrarlo; in caso diverso occorre far ricorso ai *cicli di isteresi ellittici* di Küssner, recentemente sistematicamente studiati da Cattaneo [4], ma qui mi limiterò alla (5).

Si ha subito per φ_r corrispondente a $\varphi_r(0) = 0$, $\dot{\varphi}_r(0) = 0$,

$$\varphi_r(t) = \frac{1}{\omega_r} \int_0^t F_r(t')\, e^{-h_r(t-t')} \sin \omega_r (t - t')\, dt' \tag{6}$$

con

$$\omega_r = \sqrt{\sigma_r^2 - h_r^2}.$$

Con ciò il problema è risoluto dalla (3).

Supponiamo che, per il carattere periodico, o quasi, di $F(t)$ un termine, poniamo il ρ^{imo}, della serie venga a trovarsi in sincronismo o quasi. Questo termine sovrasta allora su tutti gli altri con il crescere di t e tanto vale – nell'ordine di approssimazione in cui si lavora – fissarsi su di esso soltanto.

Senza far troppe specificazioni su $F(t)$ cercherò subito un limite superiore avvalendomi della nota disuguaglianza di Schwarz

$$\int_0^L h(t)\, g(t)\, dt \leq \sqrt{\int_0^L h^2(t)\, dt \cdot \int_0^L g^2(t)\, dt}.$$

Ponendo $\sin \omega (t - t') = 1$, si ha dalla (6)

$$\varphi_r < \varphi_r^* = \frac{1}{\omega_r} \sqrt{\int_0^t F_r^2(t')\, dt' \cdot \int_0^t e^{-2h(t-t')} dt'}$$

(3) Cfr. op. cit. in (1), vol. I, cap. VI, § 7, n. 3.

(4) C. CATTANEO, *Azioni elastico dissipative a ciclo d'isteresi ellittico.* « Acta Pont. Acc. Sc. », vol. IX, n. 14.

e quindi per la (3)

$$(3\,a) \qquad w(x,t) \leqq \Sigma_r u_r(x)\,\varphi_r^*(t) \simeq u_\varrho(x)\,\varphi_\varrho^*(t).$$

Da qui, con riguardo alla posizione generalmente più interessante

$$F_r = m_r \ddot{s}_o(t) \quad \text{con} \quad \ddot{s}_o = a_o e^{-kt} \operatorname{sen} \nu t,$$

si hanno per il più sfavorevole valore di ν (per esempio $\nu = \sigma_\varrho$), le seguenti limitazioni φ_ϱ^* di φ_ϱ, *tutte superiori* (sicchè, per un dato valore di t si può, senz'altro, scegliere l'inferiore fra le superiori):

$$(7) \quad \varphi_\varrho(t) < \varphi_\varrho^*(t) = m_\varrho a_o \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{2\sigma_\varrho^2}\left(\dfrac{1}{2} + \sigma_\varrho t\right) \sim \dfrac{1}{2\sigma_\varrho}\, t \\ \dfrac{1}{\omega_\varrho}\sqrt{\dfrac{1 - e^{-2h_\varrho t}}{2h_\varrho}\cdot\dfrac{1 - e^{-2kt}}{2k}} \\ \dfrac{1}{\omega_\varrho}\sqrt{\dfrac{1 - e^{-2h_\varrho t}}{2h_\varrho}\cdot\sqrt{\dfrac{1 - e^{-4kt}}{4k}}} < \sqrt{\dfrac{t}{\dfrac{3}{8\omega_\varrho}(1+\omega_\varrho t)}} \end{cases}$$

l'ultima espressione di φ^* è ricavata applicando due volte la disuguaglianza di Schwarz). Infine, ove si prenda come *misura* dell'azione cimentante il momento flettente $M(x)$ nella sezione $x = \text{cost.}$, precisamente con riguardo al singolo termine ρ^{imo} della $(3\,a)$,

$$M(x) = -EJ \frac{d^2 u_\varrho}{dx^2}\,\varphi^*(t),$$

se per la stabilità deve essere, nella generica sezione $x = \text{cost.}$, $M(x) \leqq M^*(x)$ (con $M^*(x)$ raggiunto ad esempio nelle più sfavorevoli condizioni accidentali non concomitanti) dovrà essere

$$(8) \qquad EJ\left|\frac{d^2 u_\varrho}{dx^2}\right| \varphi^*(t) \leqq M^*.$$

Questa relazione porta a calcolare, appena ci si valga delle (7), il valore massimo t^* di t ammissibile in condizioni di sincronismo. Posto

$$t^* = \frac{2\pi}{\sigma_\varrho} N,$$

si ha il numero critico di ondulazioni (periodi) ammissibili: quando per φ^* si assume ad esempio la 1ª delle (7) cioè $\varphi^* = \dfrac{m_\varrho a_o}{2\sigma_\varrho}\, t^*$,

$$(9) \qquad N = \frac{1}{\pi}\,\frac{M^* \sigma_\varrho^2}{EJ\left|\dfrac{d^2 u_\varrho}{dx^2}\right| m_\varrho a_o}.$$

Si rilevi che le u_ϱ e σ_ϱ sono note e tabellate per molti sistemi, sicchè i calcoli che implica la (8), o la (9), non sono laboriosi.

Ripeto che le u_ϱ che intervengono in tutto il presente lavoro debbono essere normalizzate, cioè moltiplicate per un fattore tale che risulti

$$\int_0^L m(x)\, u_\varrho^2(x)\, dx = 1.$$

Esempi:

1. A titolo di orientamento fisso l'attenzione sulla trave semplicemente appoggiata con $m(x) = \mu_0 = \text{cost.}$, $EJ = EJ_0 = \text{cost.}$ Si ha notoriamente

$$u_\varrho(x) = \sqrt{\frac{2}{L\mu_\varrho}} \sin\frac{\varrho\pi}{L}x, \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots)$$

$$\sigma_\varrho = \frac{\varrho^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{\mu_0}},$$

$$m_\varrho = \int_0^L \mu_0 u_\varrho(x)\, dx \begin{cases} \dfrac{4}{\varrho\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_0 L}{2}} & \text{per } \varrho = 1, 3, 5, \cdots \\ 0, & \text{per } \varrho = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

e quindi, per $h = 0$, $k = 0$, posto che sia

$$M^* \cong \frac{\mu_0 g L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{L}x,$$

ciò vuol dire che l'asta ammette un momento suppletivo M^* pressapoco eguale a quello derivante dal peso proprio,

$$N = \begin{cases} \dfrac{\varrho g}{4 a_0}\left|\dfrac{\sin\frac{\pi}{L}x}{\sin\frac{\varrho\pi}{L}x}\right| & \text{per } \varrho = 1, 3, \cdots \\ \infty & \text{per } \varrho = 2, 4, \cdots. \end{cases}$$

Se la risonanza avviene sulla fondamentale $\varrho = 1$ e poniamo, all'VIII grado Mercalli $a_0 \cong 0.05\, g$, si ha subito $N = 5$.

2. – Per l'asta verticale incastrata al piede (schematizzazione di una torre)

$$u_1 \simeq \frac{1}{\sqrt{2,31\,\mu_0 L}}(3 - 4\xi + \xi^4), \qquad \xi = \frac{x}{L}$$

$$\sigma_1 \cong \frac{3,47}{L^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{\mu_0}},$$

quindi

$$\int_0^1 \mu_0 u_1^2\, dx = 1 \quad , \quad m_1 = \int_0^1 \mu_0 u_1\, dx = \mu_0 L \frac{1,20}{\sqrt{2,31\mu_0 L}}.$$

Se l'asta, considerata come mensola orizzontale incastrata ad un estremo, è proporzionata così da resistere al momento d'incastro derivante dal suo peso con che

$$M^* = \frac{1}{2} \mu_0 g \xi^2 L^2,$$

la (9) porge subito

$$N = \frac{2{,}31 \cdot 3{,}47^2}{2\pi \cdot 12 \cdot 1{,}2} \frac{g}{a_0} \cong 0{,}308 \frac{g}{a_0}$$

quindi, all'VIII grado del Mercalli, $N \cong 6{,}2$.

Astronomia. — *Osservazioni della R « Coronae Borealis »*. Nota di F. Succi, presentata (*) dal Socio G. Armellini.

Nella presente Nota espongo i risultati delle mie osservazioni sulla R *Coronae B.* eseguite dal maggio 1946 al novembre 1947, facendo seguito a quella pubblicata nel 1946 (1), nella quale comunicavo l'osservazione di un notevole minimo (febbraio 1946).

Come risulta dalle mie osservazioni, dopo questo minimo, la R, ritornata allo splendore normale (2) ai primi di aprile 1946, vi è rimasta sino ai primi di ottobre dello stesso anno, subendo nel frattempo solo piccole fluttuazioni di luce.

Poi, la stella ha cominciato a diminuire di splendore sempre più rapidamente, e alla fine di novembre 1946 era di 5 grandezze al di sotto della luminosità normale, essendosi ridotta quasi alla 11ª grandezza, e ciò per la prima volta da quando la osservo (maggio 1943). Dal 12 al 19 novembre 1946 la R è discesa dalla grandezza $7.^m9$ a meno di $10.^m5$; cioè è diminuita di più di 2,6 grandezze in soli 7 giorni.

Dopo il 27 novembre non ho più potuto osservarla, per la bassezza dell'astro sull'orizzonte, a causa dell'avvicinarsi dell'epoca della congiunzione della « Corona Borealis » con il Sole.

Il 22 gennaio 1947, prima osservazione dopo la congiunzione eliaca, ho ritrovato la R ancora molto debole: circa alla stessa luminosità che aveva intorno al 20 novembre 1946, per cui è molto probabile che nel frattempo abbia subito delle oscillazioni di splendore. Raggiunta la luminosità usuale alla fine di aprile 1947, tuttora la mantiene. Nella serie delle osservazioni vi è però una lacuna dal 4 giugno al 6 ottobre 1947.

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1948.

(1) V. F. Succi, *Osservazioni sulla R « Cor. B. »*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », Ser. VIII, vol. I, fasc. 6.

(2) Come è noto, le variabili del tipo di R *Coronae Borealis* sono caratterizzate dal fatto di *trovarsi normalmente nello stato di massimo splendore*. (Cfr. Armellini, *Astronomia Siderale*, vol. II, p. 308).

Tabella.

Da a	T. U.	mg.	Note	Data	T. U.	mg.	Note
1946 maggio	21,88	5.9		1947 gennaio	22,11	10.7 *	(6)
	25,84	6.1		febbraio	14,09	8.0	(3)
	27,85	6.0			15,00	8.0	(3)
giugno	1,86	6.1			22,97	(7.4)	(3), (8)
	6,88	6.1	(1)	marzo	7,93	7 0	(3), (4)
	18,85	6.1			11,94	6.8	(3)
	26,86	6.1			15,94	6.6	
	28,87	6.1			18,95	6.5	
luglio	23,93	6.4			27,89	6.4	(1)
	29,87	6.3			28,95	6.3	
agosto	16,83	6.2		aprile	1,89	6.3	(4)
	20,83	6.2			15,86	6,2	
	23,82	6.2			17,88	6.1	
settembre	22,77	6.1			29,87	6.1	(1)
	24,80	6.0–6.1		maggio	10,86	6.1	
ottobre	13,75	6.1			24,87	6.1–6.2	(1)
	29,75	6.3–6.4		giugno	4,89	6.1	(4)
novembre	2,73	6.7	(1), (2), (3)	ottobre	6,77	5.9	
	8,74	7.3	(2), (3), (4)		9,77	6.0	
	12,73	7.9	(2), (3)		17,76	(6.0)	(9)
	19,73	< 10.5	(5), (6)	novembre	7,72	6.1	
	21,71	10.9 *	(5), (6)		13,73	6.1	(5), (9)
	23,71	10.9 *	(5), (6)				
	24,71	< 10.6 *	(5), (6)				
	27,73	10.7 *	(5), (7)				

(1) Luna. (2) Astro basso. (3) Cannocchiale Salmoiraghi $\varnothing = 67$ mm., 15 ingr. (4) Forte luce lunare. (5) Astro bassissimo. (6) Cannocchiale id., id., 100 ingr. (7) Equatoriale Cauchoix–Cavignato, $\varnothing = 155$ mm. $f = 2{,}24$ m. (8) Nubi. (9) Foschia.

Dal 21 maggio al 29 ottobre 1946 e dal 15 marzo al 13 novembre 1947 le osservazioni sono state eseguite con un binocolo galileiano di 3 ingr.

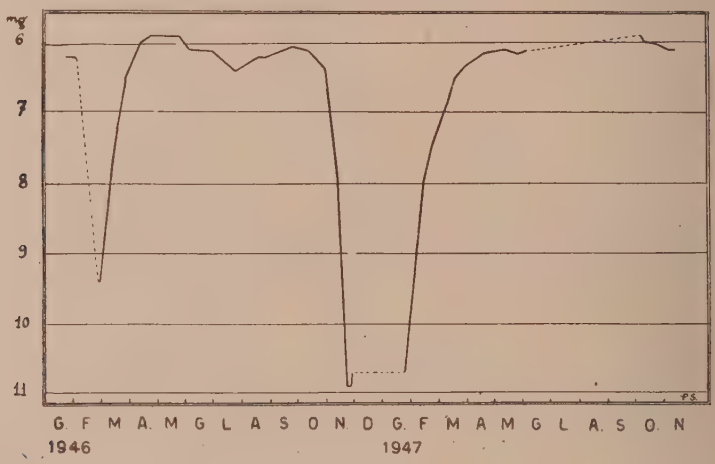
I dati fra parentesi sono incerti.

Le grandezze date per la R nell'annessa tabella, dall'osservazione del 21 novembre 1946 inclusa a quella del 22 gennaio 1947 inclusa, cioè durante il minimo, sono solo indicative, e ciò perchè:

I. – nelle osservazioni del 21, 23, 24 novembre 1946 e 22 gennaio 1947, la R e le stelle di confronto erano al limite della visibilità del mio cannocchiale. (In quelle del 25 e 27 novembre 1946, eseguite all'equatoriale medio dell'Osservatorio di M. Mario, erano distintamente visibili);

II. – le grandezze assunte, in tutte le sopradette osservazioni, per le stelle di confronto più deboli (nn. 9, 15, 16, 20 dell'*Atlas Stellarum Variabilium* del P. Hagen), non sono alla stessa scala di quelle che ho per le altre.

Interessante è il fatto che la R abbia presentato, per due anni consecutivi, 1945 e 1946, un minimo in febbraio ed uno in novembre.



Nell'annessa tabella riporto dettagliatamente i dati delle osservazioni da me eseguite con il metodo di confronto di Pickering – raramente con quello di Argelander – e coi quali ho disegnato la curva di luce sopra riprodotta.

Mi è grato ringraziare il Direttore dell'Osservatorio Astronomico di M. Mario, prof. Armellini, per avermi gentilmente concesso di osservare con l'equatoriale medio Cauchoix–Cavignato.

Stelle di confronto usate.

	mg. (Harvard)		mg.
π *Coronae Bor.*	5.60		
Harvard Rev. 5813	6.52		
f : B. D. 28° 2475	7.43	n. 9 A. S. V. di Hagen	10.4
g : B. D. 29° 2730	7.80	*r* : n. 15 id. id.	10.6
h : B. D. 28° 2969	7.95	n. 16 id. id.	11.1
l : B. D. 29° 2713	8.80	*t* : n. 20 id. id.	11.5
p : B. D. 28° 2473	9.75		
q : B. D. 28° 2474	10.46		

Fisica (Ottica). — *Sulla termodinamica della diffrazione.* Nota di G. Toraldo di Francia, presentata (*) dal Socio G. Abetti.

§ 1. – Il problema della reversibilità o irreversibilità dei fenomeni di propagazione della radiazione ha una lunga storia.

Il Wien (1) aveva creduto di dimostrare che sono irreversibili tutte quelle trasformazioni della radiazione, nelle quali il volume da essa occupato va aumentando senza compiere lavoro. In particolare quindi sarebbe stata irreversibile anche la propagazione libera della radiazione emessa da una sorgente. Planck (2) corresse questo errore, calcolando la temperatura di un sottile fascetto di pennelli luminosi omocentrici e dimostrando che essa rimane invariata nella propagazione libera secondo le leggi dell'ottica geometrica. Si tratta dunque di un fenomeno reversibile. Quanto alla riflessione e alla rifrazione, anch'esse avverrebbero senza cambiamento di temperatura, qualora una parte della radiazione incidente non venisse perduta rispettivamente per rifrazione o per riflessione. Ma poichè ciò avviene sempre nei casi reali, si ha in essi un abbassamento della temperatura e da questo sembrava che Planck inducesse, per quanto senza dirlo, l'irreversibilità di quei fenomeni. Infine nel caso della diffrazione dichiarava esplicitamente la possibilità di un cambiamento di temperatura e la conseguente irreversibilità.

Un notevole passo avanti nel problema fu compiuto dal Laue (3), con la scoperta che il principio dell'additività dell'entropia non vale per un insieme costituito da più fasci luminosi coerenti. Egli dimostrò ingegnosamente che per via d'interferenze è possibile far aumentare la differenza di temperatura di due fasci coerenti, ciò chè, se valesse il detto principio, porterebbe all'assurdo di una diminuzione dell'entropia dell'insieme. Ma in realtà, se si hanno n sistemi e si indicano rispettivamente con $S_1, S_2, \cdots, S_n$ le loro entropie e con $W_1, W_2, \cdots, W_n$ le loro probabilità, sarà per la relazione di Boltzmann

$$S_1 = k \log W_1 \quad , \quad S_2 = k \log W_2, \cdots, S_n = k \log W_n .$$

E l'insieme avrà l'entropia $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ soltanto qualora la sua probabilità W sia eguale al prodotto $W_1 W_2 \cdots W_n$. Ma questo richiede una completa indipendenza dei sistemi componenti fra loro, ciò che evidentemente non ha luogo per dei fasci luminosi ai quali si impone la condizione di essere coerenti. Allora, valendosi dell'espressione dell'entropia di un fascetto

(*) Nella seduta del 13 marzo 1948.

(1) W. Wien, *Temperatur und Entropie der Strahlung*, «Wied. Ann.», LII, p. 132. (1894).

(2) M. Planck, *Entropie und Temperatur strahlender Wärme*, «Ann. der Phys.», I, p. 719 (1900).

(3) M. Laue, *Thermodynamik der Interferenzerscheinungen*, «Ann. der Phys.», XX, p. 365 (1906).

di radiazione, data dal Planck, e della così detta legge del seno, che regge tutti i fenomeni dell'ottica geometrica, Laue riuscì a dimostrare che quando un fascio luminoso viene scomposto in più altri per mezzo di riflessioni e rifrazioni, l'entropia dell'insieme di questi ultimi è eguale all'entropia del fascio originario. La legge del seno, cui abbiamo accennato, dice in sostanza che, se un fascetto di raggi in un mezzo di indice n ha l'apertura angolare $d\omega$ (angolo solido) e taglia un'area dS su una superficie che attraversa con angolo d'incidenza θ, l'espressione $n^2 \cos\theta \, d\omega \, dS$ è invariante per riflessione e per rifrazione. La generalizzazione di questa legge al caso di fascetti astigmatici, fatta da Straubel [4], permise a Laue di dimostrare che i fenomeni dell'ottica geometrica sono reversibili in qualunque caso (naturalmente prescindendo dagli assorbimenti).

Era naturale allora passare a studiare i fenomeni di diffrazione. La cosa, con i mezzi di allora, era ben più complicata, ma dato lo sparpagliamento di energia che si aveva in quel caso, Laue pensava che difficilmente si potesse sbagliare ammettendo in generale l'irreversibilità della diffrazione. Unica eccezione poteva essere quella di una serie ben ordinata di aperture diffrangenti, cioè di un reticolo. E infatti Laue trovò [5] che le onde diffratte da un reticolo infinitamente esteso obbediscono alla legge del seno. E, poichè allora non si conoscevano che le onde diffratte ordinarie, ne seguiva in quel caso la reversibilità. Per il reticolo di dimensioni finite, Laue concludeva che il fenomeno era termodinamicamente equivalente alla diffrazione attraverso ad un'apertura della stessa forma e delle stesse dimensioni. Infine, in un successivo lavoro [6] dimostrò l'irreversibilità della diffrazione provocata da una particella trasparente, piccola rispetto alla lunghezza d'onda, o da una apertura grande rispetto alla lunghezza d'onda. Ne seguiva quindi che la diffrazione era da considerarsi in generale irreversibile.

§ 2. – Siamo oggi in grado per mezzo della teoria dell'interferenza inversa di chiarire completamente il problema e di rendere fisicamente evidenti le conclusioni.

Un treno di onde piane monocromatiche incida su una superficie Σ materiale piana, che ne alteri l'ampiezza e la fase diversamente da punto a punto (per esempio Σ potrebbe essere un diaframma opaco con aperture, o un reticolo ecc.). Il principio dell'interferenza inversa afferma che in questo caso [7] avrà origine al di là della superficie Σ un insieme (in generale doppiamente infinito) di onde piane e di onde evanescenti (onde diffratte), i cui parametri

(4) R. Straubel, *Ueber einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik und einige Anwendungen*, « Phys. Zft. »; IV, p. 114 (1902).

(5) M. Laue, *Zur Thermodynamik der Gitterbeugung*, « Ann. der Phys. », XXX, p. 225 (1909).

(6) M. Laue, *Zur Thermodynamik der Beugung*, « Ann. der Phys. », XXXI, p. 547 (1910).

(7) V. per esempio G. Toraldo di Francia, *Il teorema di Malus-Dupin generalizzato e la trasformazione dell'interferenza inversa*, « Rend. Acc. Naz, Linc. », 8ª, II, p. 787 (1947).

di orientamento e le cui ampiezze possono calcolarsi facilmente in base allo stato di vibrazione presente nei punti della faccia di emergenza di Σ. Ogni onda diffratta viene caratterizzata da due parametri di orientamento a e b e si dirà brevemente che essa ha l'*ordine* (a, b). Se si prescinde per il momento dalle onde evanescenti, si potrà anche dire col linguaggio dell'ottica geometrica che su Σ incide una congruenza di raggi paralleli e che si ha per diffrazione un insieme di congruenze di raggi paralleli. Ora nel lavoro testè citato ho potuto dimostrare che, se si deforma la congruenza incidente, mantenendola sempre una congruenza normale, anche le congruenze diffratte si deformano sempre restando normali. Anzi risulta che la trasformazione dell'interferenza inversa è la più generale trasformazione che mantenga la normalità delle congruenze. È questa una generalizzazione del teorema di Malus–Dupin. Ora, poichè la legge del seno è proprio una conseguenza di detto teorema, ne viene che essa è valida anche per l'interferenza inversa. Ma non sarà male darne una dimostrazione diretta.

Fissiamo tre assi cartesiani ortogonali x, y, z, con x, y giacenti su Σ. Se α, β, γ sono i coseni direttori di un raggio incidente e α', β', γ' quelli del raggio diffratto di ordine (a, b) si ha

$$(1) \qquad \begin{cases} n'\alpha' = n\alpha + a \\ n'\beta' = n\beta + b \end{cases}$$

essendo n e n' gl'indici di rifrazione rispettivamente del mezzo che precede e di quello che segue Σ. Ora si calcola facilmente che per due piccoli fascetti di raggi di angoli solidi $d\omega$ e $d\omega'$ presi rispettivamente attorno alle direzioni α, β, γ e α', β', γ' si ha

$$(2) \qquad d\omega = \frac{d\alpha\, d\beta}{\gamma} \quad , \quad d\omega' = \frac{d\alpha'\, d\beta'}{\gamma'} .$$

D'altra parte se si considera il primo fascetto come incidente su Σ e l'altro come corrispondente diffratto di ordine (a, b), le superficie dS e dS'. da essi tagliate su Σ coincideranno, sarà cioè $dS = dS'$. Con questo segue subito dalle (1) e (2)

$$n^2 \gamma\, d\omega\, dS = n'^2 \gamma'\, d\omega'\, dS'$$

cioè la legge del seno.

Allora, ripetendo esattamente il ragionamento di Laue, si giunge alla conclusione che, *se si prescinde dalle onde evanescenti la diffrazione non dà luogo a variazione di entropia* ed è quindi un processo reversibile [8]. E questo vale non soltanto quando le onde diffratte formano un sistema discreto, come nel caso dei reticoli infinitamente estesi, considerato da Laue, ma anche in tutti gli altri casi, in cui si ha a che fare con un sistema continuo. Basta sostituire nella formula dell'entropia un integrale al posto di una somma.

(8) S'intende che ci si limita al puro fenomeno di diffrazione, cioè a quello che ha luogo al di là di Σ. Naturalmente le eventuali alterazioni che Σ ha provocato sul fascio incidente per via di assorbimento non sono reversibili.

Ma nei casi reali sono sempre presenti anche le onde evanescenti (perchè la zona trasparente di Σ ha sempre dimensioni finite) ed esse sono irreversibili. Non si conosce infatti alcun mezzo per far ritornare esattamente su sè stessa l'energia trasportata da un'onda evanescente. Si conclude allora che, *salvo casi particolari puramente teorici, la diffrazione è un fenomeno irreversibile.* E non si creda che fra questi casi particolari rientri sempre anche quello del reticolo infinitamente esteso, come pensava Laue. Infatti anche per un reticolo infinitamente esteso hanno luogo in generale le onde evanescenti (basta per esempio che il reticolo sia a tratti trasparenti e opachi nettamente definiti).

Ci si può domandare in qual modo possa verificarsi realmente l'inversione dei processi di propagazione per quella parte per cui sono reversibili. Già Laue aveva notato che qando un fascio luminoso si scompone in più altri fasci coerenti per mezzo di riflessioni e rifrazioni, è possibile con i metodi dell'ottica geometrica ricomporli nel fascio originario. Ma quando si ha a che fare con insiemi continui di onde coerenti, come quelli generati normalmente per interferenza inversa, ci si può domandare se sia praticamente possibile trovare un dispositivo che faccia tornare esattamente ciascun'onda su sè stessa. Eppure il metodo è ovvio. Basta ricordare la teoria di Abbe relativa alle immagini in luce coerente. Infatti, se si pone dopo la superficie un sistema ottico perfetto che formi l'immagine di Σ su uno specchio piano (a coefficiente di riflessione 1), ciascun'onda tornerà proprio esattamente su sè stessa. Se il sistema ottico avesse l'apertura massima possibile (180°) e se non vi fossero fra le onde diffratte anche onde evanescenti, l'insieme delle onde di ritorno restituirebbe per interferenza diretta su Σ precisamente la stessa figura che lo ha generato; si sarebbe così invertito l'andamento del processo. Ma poichè nei casi reali esistono anche le onde evanescenti, che sono presenti fra le onde diffratte originarie, mentre mancano fra quelle di ritorno, la nuova figura sarà più o meno differente da quella di partenza; il processo non è dunque esattamente reversibile.

Fisica. — *La lunghezza termodinamicamente definita dal calore latente di fusione e grandezze che ne derivano.* Nota di L. Laboccetta, presentata (*) dal Socio G. A. Crocco.

Un corpo chimicamente puro risulta anche fisicamente definito in corrispondenza del suo punto triplo nel quale sono date la temperatura e la pressione regnanti, nonchè la densità delle tre fasi in presenza, solida, liquida e gassosa.

Temperatura, pressione e densità sono le tre grandezze fisiche delle quali viene ordinariamente indicato il valore, assumendole come caratteristiche del punto triplo, e ciò perchè esse sono anche quelle che appariscono esplicitamente nelle equazioni di stato dei diversi corpi.

(*) Nella seduta del 13 marzo 1948.

Ma in più di questa tradizionale terna di grandezze, T.P.D. altre ve ne sono, pur esse fisicamente definite in corrispondenza del punto triplo, che non mancano d'importanza. E fra queste una particolare considerazione giustamente richiede il calore latente di fusione, cioè la quantità di calore C che dall'unità di massa della fase solida del corpo considerato viene assorbita per passare allo stato liquido senza variare di temperatura e sempre restando sotto la pressione del vapore saturo presente.

Discende da questa definizione che se è M la massa che dallo stato solido passa allo stato liquido, la quantità Q di calore a ciò occorrente è $Q = CM$ e ad essa corrisponde un lavoro $W_C = JCM$, se con J si indica al solito l'equivalente meccanico della caloria. Questo lavoro è anche la misura dell'energia cinetica della massa considerata quando essa si muove con una velocità u soddisfacente alla relazione

$$(1) \qquad W_C = JCM = \frac{1}{2} M u^2$$

dalla quale si ricava

$$(2) \qquad u = \sqrt{2JC},$$

velocità [1] che è ovviamente indipendente dal valore più o meno grande della massa.

E perciò se un blocco del corpo considerato che trovisi alla temperatura del punto triplo ed allo stato solido, moventesi con la detta velocità viene improvvisamente arrestato, il calore che si sviluppa in conseguenza di tale arresto, corrispondente alla energia cinetica che scompare, è sufficiente a fonderlo senza variarne la temperatura. Se il blocco di cui si tratta ha forma sferica si può anche dire che la detta quantità di calore ed il corrispondente lavoro crescono col cubo del raggio R della sfera, cioè con il volume di essa.

Ma ad un corpo omogeneo di forma sferica è intimamente associata anche un'altra quantità di calore e cioè quella equivalente al *lavoro di formazione* della sfera stessa. Intendo con questa denominazione indicare la energia potenziale intrinseca della massa ridotta a forma sferica, vale a dire il lavoro che bisognerebbe spendere per allontanare le particelle materiali che la compongono disperdendole a distanza infinita le une dalle altre. Questo lavoro, supponendo di procedere ordinatamente all'allontanamento dei successivi strati superficiali indicando con Δ la densità della sfera, con k la costante gravitazionale e con r il raggio dello strato considerato, è evidentemente

$$(3) \qquad W_F = \int_0^R \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \Delta\right) \frac{4\pi r^2 \Delta}{r} k\,dr = \frac{16\pi^2 \Delta^2 k}{15} R^5$$

(1) La considerazione di questa particolare velocità si era presentata in una mia precedente ricerca: *Definizione termodinamica del metro.* « Atti della S.I.P.S. », XXI Riun., Roma 1932, vol. II, p. 4.

e come si scorge esso cresce con la quinta potenza del raggio della sfera [2].

Si presenta qui dunque una delle circostanze tipiche contemplate dalla similitudine meccanica di Galileo, avendosi un sistema, la sfera del corpo considerato, che definisce due grandezze omogenee, il calore latente di fusione ed il lavoro di formazione, le quali grandezze variano secondo due diverse potenze delle sue dimensioni lineari, cosicchè il rapporto dei loro valori, calcolati in un sistema qualsiasi di unità, fornisce la misura assoluta delle dimensioni del sistema stesso.

Fra questi rapporti ve ne è uno fisicamente distinto, quello uguale alla unità, corrispondente alle dimensioni per le quali il calore latente di funzione risulta uguale al calore di formazione:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \Delta CJ = \frac{16\pi^2 \Delta^2 k R^5}{15}. \tag{4}$$

Da questa relazione si ottiene:

$$R = \left[\frac{5\,CJ}{4\pi\Delta k}\right]^{1/2}. \tag{5}$$

A questo raggio corrisponde una massa

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta. \tag{6}$$

Avendo così ottenuto insieme alla velocità (2) che può chiamarsi *velocità di liquefazione*, anche una lunghezza R, quella (5) del raggio della sfera il cui lavoro di formazione è equivalente al calore latente di fusione, resta determinato anche un tempo che è quello

$$T = R/u = \left[\frac{5}{8\pi\Delta k}\right]^{1/2} \tag{7}$$

occorrente per percorrere il raggio R con la velocità u.

Se dunque il corpo considerato è, per esempio, l'acqua ponendo nelle espressioni innanzi trovate per u, R, M, T, i valori soliti C = 79,3 cal., J = 4, 186 × 10⁷ erg, Δ = 1, $k = 6{,}666 \times 10^{-8}$ si ottiene

$$\begin{cases} u = 8{,}144 \times 10^{10} \text{ cm. sec.}^{-1} \\ R = 1{,}579 \times 10^{8} \text{ cm.} \\ M = 1{,}651 \times 10^{25} \text{ gr.} \\ T = 1938 \text{ sec.} \end{cases} \tag{8}$$

Le costanti fisiche dell'acqua, prese in combinazione con la costante gravitazionale hanno permesso dunque di definire una massa, una lunghezza,

(2) A questa espressione del lavoro di formazione si era già pervenuti nello studio della condensazione delle nebulose. V. ad esempio C. BRIOT, *Théorie mécanique de la chaleur*. Gauthier-Villars, Paris, 1893, p. 161.

un tempo, cosicchè in un sistema di unità [M, L, T], come quello C.G.S. ordinariamente in uso è possibile dedurre tutte le altre grandezze meccaniche.

Senza soffermarsi su di ciò basterà qui osservare che risultano pure, implicitamente determinati: una quantità di calore

$$(9) \qquad Q = MC = 1{,}65 \times 10^{25} \times 79{,}3 = 1{,}309 \times 10^{26} \text{ cal.}$$

ed il corrispondente lavoro

$$(10) \qquad W = JQ = JMC = 4{,}186 \times 10^{7} \cdot 1{,}329 \times 10^{26} = 5{,}484 \times 10^{33} \text{ erg}$$

ed in chilogrammetri $5{,}595 \times 10^{26}$.

Ma quel che importa notare è che con la sfera col procedimento innanzi esposto costruita restano anche definite in modo assoluto le grandezze elettriche fondamentali. Infatti è chiaro che, essendo data la massa M dell'acqua formante la sfera ed il tempo T ad essa corrispondente, si avrà come immediata conseguenza:

1° L'intensità I della corrente la quale agendo per il tempo sopraindicato T decompone la massa M dell'acqua formante la sfera.

2° La quantità di elettricità $E = I\,T$ trasportata dalla corrente nel detto tempo.

Sempre riferendosi, come applicazione del metodo, al caso dell'acqua, la massa m da decomporre in 1 sec. sarà

$$(10) \qquad m = \frac{M}{T} = \frac{1{,}65 \times 10^{25}}{1{,}938 \times 10^{3}} = 8{,}590 \times 10^{21} \text{ gr.}$$

e siccome una corrente di 1 ampère decompone in 1 sec. gr. $9{,}33 \times 10^{-7}$ di acqua risulta che la corrente necessaria per effettuare tale decomposizione è di

$$(11) \qquad I = \frac{8{,}590 \times 10^{21}}{9{,}33 \times 10^{-7}} = 9{,}206 \times 10^{27} \text{ amp.}$$

La quantità di elettricità messa in giuoco in questa decomposizione elettrolitica della sfera di acqua è data dal prodotto degli ampère per i secondi e si ha

$$(12) \qquad E = 1{,}938 \times 10^{3} \cdot 9{,}206 \times 10^{27} = 1{,}784 \times 10^{31} \text{ coul.}$$

In quanto precede si è fatto sempre, come esempio, riferimento all'acqua, che è il corpo adoperato negli usuali sistemi di misure. Si comprende però che il procedimento è applicabile a qualsiasi corpo del quale sia noto il punto triplo ed i valori delle diverse grandezze così determinate varieranno di caso in caso.

I risultati ai quali così si è giunti acquistano un particolare interesse confrontandoli con quelli precedentemente ottenuti in questo campo.

Già Maxwell (3) aveva rilevato che combinando insieme una densità con la costante gravitazionale si giunge a definire un tempo. Se oltre la

(3) W. P. THOMPSON and P. G. TAIT, *Treatise on natural philosophy*. «University Press», Cambridge 1879, new. ed. vol. I, Part. I, p. 228.

costante gravitazionale si combina con la densità la velocità della luce si ottiene anche una lunghezza, e quindi una massa giungendo alla formazione di quella sfera che ho chiamato « *sfera normale* » ed il cui raggio è identico a quella lunghezza che nella teoria della relatività aveva, da Eddington, ricevuto il nome di *raggio gravitazionale* della massa ad esso corrispondente.

In un precedente scritto (4) ho indicato i valori del raggio, della massa e del tempo corrispondenti alla sfera normale che ha la densità dell'acqua, e questi valori sono

$$(13) \qquad R' = 5{,}672 \times 10^{13} \text{ cm.} \quad , \quad T' = 11887 \text{ sec.} \quad , \quad M' = 7{,}713 \times 10^{41} \text{ gr.}$$

I rapporti di questi valori a quelli corrispondenti (6), (8), (7) della sfera definita col calore latente di fusione, essendo rapporti di grandezze omogenee, sono dei numeri puri:

$$(14) \qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{R'}{R} = \dfrac{5{,}672 \times 10^{13}}{1{,}579 \times 10^{8}} = 3{,}592 \times 10^{5}. \\ \tau = \dfrac{T'}{T} = \dfrac{11887}{1938} = 6{,}1389. \\ \mu = \dfrac{M'}{M} = \dfrac{7{,}713 \times 10^{41}}{1{,}651 \times 10^{25}} = 4{,}672 \times 10^{16}. \end{cases}$$

Essi costituiscono dunque un gruppo di costanti numeriche caratteristiche del corpo al quale sono associate e che hanno carattere di invarianti assoluti, giacchè resta sempre inalterato il loro valore numerico tanto al mutare delle unità di misura quanto anche al mutare del sistema di riferimento rispetto al quale le misure vengono eseguite.

Fisiologia. — *Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo.* - A) *La reazione ortoclinostatica nell'adulto normale* (*). Nota III di C. Rizzo, presentata (**) dal Socio G. Cotronei.

Come si è veduto nella Nota precedente, gli individui normali possono avere i più diversi « orientamenti vegetativi » (1). Ciò non deve, tuttavia,

(4) *La curvatura dello spazio e le dimensioni limiti degli astri.* « La Ric. Scient. », vol. II, n. 1–2, luglio 1938.

(*) Lavoro eseguito nella Clinica neuropsichiatrica dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1948.

(1) Il cosiddetto « normale » del Pfister (v. grafico A della Tavola annessa alla Nota I) si avvicina, graficamente, al 2° Tipo della Tav. II annessa alla II Nota ed ha la formula vegetativa *o — po — pp* (con valutazione ponderale $P_{2,5} + O_{1,5}$); esso viene ad appartenere, così, alla categoria degli anfotonici con prevalente parasimpaticotonia, che – come risulta dal quadro riprodotto nella Nota II – comprende il 20 % dei miei soggetti. Si tratta, dunque, sì di un normale, ma – l'ho già accennato – non può affatto essere assunto come prototipo di normalità neuro-vegetativa, giacchè codesta normalità abbraccia vari altri tipi di grafici e numerose altre formule.

destar meraviglia, essendo stato già segnalato da parecchi altri studiosi. Così il Tinel (capit. XV del suo *Trattato*) non solo comprende fra le fisiologiche « Sintonìe » od « Eutonìe » tutte le possibili varietà vagotoniche, simpaticotoniche ed anfotoniche, ma riconosce che talvolta « s'incontra una formula pressochè simile in soggetti sani ed in altri con turbe vegetative nettamente patologiche », sicchè la classificazione in uso (simpaticotonia, vagotonia, ecc.) « non stabilisce alcuna distinzione netta fra stati di salute e stati di malattia ». Orbene, a queste vedute – frutto di lunga esperienza e riecheggianti, in parte, le sconfortevoli conclusioni del Söderbergh (v. Nota I) la mia ricerca reca non solo conferma, ma dà anche una solida base obiettiva.

Solamente in un punto debbo dissentire dal Tinel: egli comprende anche gli ipoanfotonici fra gli eutonici; io, invece, li escludo, perchè non ne ho trovato alcun rappresentante fra i miei 100 soggetti. D'altra parte, questa categoria d'individui (caratterizzata da una quasi linearità del grafico usuale e del grafico dei valori medi, con – al più – un semplice accenno alle guglie od alla cupola) è costituita d'ipostenici, gracili, defedati, che non possono in alcun modo essere scambiati per individui normali; ed in realtà lo stesso Tinel soggiunge che queste « tonìe leggermente deficitarie . . . si trovano . . . presso i soggetti depressi, stanchi, astenici o convalescenti »: col che egli pure viene ad escluderli dalla normalità vera e propria.

Piacerebbe ora trovare una giustificazione del diverso orientamento neuro-vegetativo dei soggetti da me esaminati, in differenze di talune caratteristiche fisiche degli individui stessi, ma ciò non è.

Ho confrontato, infatti, la distribuzione delle principali fra codeste caratteristiche (età, tipo costituzionale, pressione arteriosa massima) tanto nei 5 raggruppamenti del quadro riprodotto nella Nota II, quanto negli 8 Tipi di orientamento vegetativo raffigurati graficamente a Tav. II della Nota medesima, ma non ho potuto scorgere alcun rapporto fra l'ordinata progressione di quei raggruppamenti o di questi Tipi (disposti dalla pura parasimpaticotonia alla pura ortosimpaticotonia, attraverso varie sfumature di anfotonia) ed il progredire – od il regredire – dell'età o delle altre caratteristiche individuali prese in esame. Ho rilevato soltanto che i longitipi prevalgono fra gli ortosimpaticotonici, pur non constatandosi affatto quella correlazione che ci si aspetterebbe di vedere fra il progredire dell'ortosimpaticotonia e l'aumento del numero dei longilinei.

Le differenti formule vegetative riscontrabili nei normali – e indipendenti, come si è visto, dalle caratteristiche fisiche dei soggetti – sono forse spiegabili non tanto invocando un'effettiva molteplicità delle eutonìe neurovegetative (come vorrebbero il Tinel ed altri studiosi), quanto ammettendo che un numero più o meno grande di individui ritenuti sani non lo sia, in realtà, nei riguardi del S. N. V.; che – in altri termini – all'apparente e, invero, piuttosto grossolana « normalità » clinica non corrisponda sempre un eccellente funzionamento di quel complesso (tuttora non poco oscuro)

di attività, sinergie e correlazioni viscero–neuro–ormoniche che regolano e governano la vita vegetativa.

Se fosse, dunque, vero che circoscritte o iniziali o latenti turbe neuro–vegetative potessero sussistere nonostante una condizione di apparente sanità, potrebbe darsi che un certo numero di cosiddetti normali (ossia di individui giovani, robusti, fisicamente sani, con elettrocardiogramma fisiologico, cenestesi perfetta, valido tono dell'umore, ecc. quali sono i 100 soggetti su cui la mia ricerca si è basata) sia portatore di quelle turbe, le quali – clinicamente silenti – affiorano, però, con la reazione orto–clinostatica, dando luogo a formule che solo la nostra attuale ignoranza ci fa ancora classificare come eutoniche, mentre, in realtà, denunciano quell'iniziale disfunzione neuro–vegetativa che il semplice esame clinico non ci permetteva di svelare.

Partendo da quest'ipotesi, mi sono chiesto se non vi fosse il modo di sceverare (sia pure solo a titolo di probabilità) le formule vegetative più fisiologiche, e mi sembra di averlo trovato rifacendomi a tre criteri diversi, i quali, però, giungono fondamentalmente ad un medesimo risultato finale.

Un primo criterio possiamo definirlo « numerico » e porta a considerare più fisiologiche le formule vegetative riscontrate in un maggior numero di individui normali. Orbene, se esaminiamo i valori medi dei nostri 100 soggetti, troviamo che quelli aventi la configurazione ad M sono assai più numerosi (73) di quelli la cui configurazione grafica è a cupola (27). Ne segue, in base al criterio numerico ora investigato, che i « tipi M » dovrebbero rappresentare una maggiore normalità neuro–vegetativa dei « tipi Ω ».

Un secondo criterio, di tutt'altra natura, è fornito dall'analisi del comportamento vegetativo degli atleti. L'atleta rappresenta un felice complesso anatomo-funzionale su cui si fondano le sue peculiari doti fisiche e da cui traggono alimento le sue capacità di eccezionali prestazioni agonistiche: prestazioni che non sembra lecito supporre disgiunte da una solida impalcatura neuro–vegetativa e da una fortunata sintonia viscero–neuro–ormonica. Orbene, fra i miei 100 « normali » si trovano 20 atleti (10 pugili, 8 calciatori, 2 ciclisti), e di essi ben 19 appartengono ai tipi M (13, ossia il 65 %, sono schietti parasimpaticotonici con valutazione quantitativa alquanto superiore a P^4) e soltanto uno appartiene ai tipi a cupola (ma, più precisamente, a quella frazione dei tipi ad Ω che più si avvicina alla parasimpaticotonia, avendo formula vegetativa $P^3 + O^1$). L'assoluta prevalenza, fra gli atleti, dei « tipi M » è un'altra prova che questi tipi corrispondono ad una maggiore eutonìa vegetativa e che la parasimpaticotonìa è espressione di peculiare normalità, posto che gli atleti siano – come credo – gli esponenti d'una più spiccata regolarità delle funzioni vitali interne.

Un terzo e più generale criterio è dato dal confronto fra l'entità complessiva del fattore « P » (coefficiente di parasimpaticotonia) e quello del fattore « *O* » (coefficiente d'ortosimpaticotonia) nei 100 individui in esame: confronto facilmente controllabile in base ai dati dello specchio riportato nella Nota

precedente. Apprendiamo, così, che il fattore « P » sta a quello « *O* » come, all'incirca, 61 sta a 39, e questa sproporzione aumenta notevolmente (P = 91, *O* = 9) se si considerino solo gli atleti, di cui abbiamo già sostenuta l'importanza quali esponenti di sanità neuro-vegetativa.

Dai tre criteri ora illustrati mi sembra lecito dedurre che le formule di tipo M rappresentano una maggiore eutonìa vegetativa che non le formule di tipo a cupola. È anche possibile che esista, in certo qual modo, una correlazione diretta fra il grado dell'eutonìa e l'entità del fattore « P ».

Confido di poter avvalorare queste mie illazioni d'ordine fisiologico con altre ricerche e sopra tutto con i risultati – in corso di studio – forniti dalla reazione orto-clinostatica applicata ad un gran numero d'individui ammalati e ripetuta dopo la loro guarigione clinica.

Conclusioni.

1. La reazione orto-clinostatica è un ottimo mezzo per studiare, nella maniera più fisiologica, il tono del sistema nervoso vegetativo.

2. Con la tecnica proposta da H. O. Pfister ho applicata questa reazione in 100 individui clinicamente normali e ne ho analizzati i risultati, avvalendomi sopra tutto di un'espressione grafica sintetica (il « grafico dei valori medi »), con la quale mi si è offerta l'opportunità sia di cogliere le più importanti differenze individuali, sia di riunire in più o meno grossi « tipi vegetativi » i soggetti in esame.

3. Mercè il grafico dei valori medi, infatti, mi è stato possibile individuare – nei 100 individui normali – 32 diverse « formule vegetative », di vagliarne il significato clinico e di farne la « valutazione quantitativa », stabilendo, grosso modo, per ciascuna di esse l'entità della componente parasimpatica (= fattore « P ») e della componente ortosimpatica (= fattore « *O* ») che concorrono al loro prodursi.

4. Da un punto di vista formale, i grafici dei valori medi vanno distinti in due grandi categorie: quelli aventi una « configurazione ad M », espressione di prevalente parasimpaticotonia, e quelli la cui configurazione è « a cupola » (= a Π od a Λ) e che sono, in prevalenza, di natura ortosimpatica. Codesti grafici, inoltre, si debbono distinguere in « armonici » (più fisiologici) e « disarmonici », in base alla maggiore o minore simmetria dei cinque punti che li costituiscono.

5. Riunendo i grafici dei valori medi con identico « orientamento vegetativo » e tenendo altresì conto della loro forma, ho potuto individuare 8 « tipi grafici » fondamentali, che vanno dalla parasimpaticotonia all'ortosimpaticotonia, attraverso una gamma di situazioni anfotoniche.

6. L'individuazione dei « tipi grafici », delle « formule vegetative » e della loro « valutazione quantitativa » mi sembra molto importante, perchè reca finalmente un principio di chiarezza e di classificabilità d'ordine matematico ad un materiale sino ad ora piuttosto vago ed impalpabile, quale era quello delle tonìe neuro-vegetative. Si tratta, indubbiamente, d'una

materia suscettibile di molti miglioramenti, ma ritengo che un primo passo sia stato così compiuto per dare concretezza alle ricerche sulla vita vegetativa fisiologica e sulle sue deviazioni morbose.

7. La grande varietà di formule e di tipi grafici rilevabile nei soggetti normali non è giustificata dalle caratteristiche fisico-costituzionali degli individui. È forse lecito supporre che tale varietà dipenda, piuttosto, dall'esiguità delle nostre conoscenze sulla vera « normalità neuro-vegetativa » dell'uomo, sicchè individui che clinicamente ci sembrano sani potrebbero essere già portatori di turbe neuro-vegetative denunciate da questa o quella « formula vegetativa ». In base a varie considerazioni io ritengo – sia pure in via, per ora, ipotetica – che l'anzidetta normalità neurovegetativa sia, di preferenza, in funzione del fattore « P » e venga espressa da formule di tipo esclusivamente o prevalentemente parasimpaticotonico (con configurazione grafica ad M).

BIBLIOGRAFIA

D. DANIELOPOLU et A. CARNIOL, *Épreuves de l'atropine et de l'orthostatisme dans l'examen du système nerveux du cœur chez le sujet normal.* « Arch. Malad. Cœur », mars 1923.

A. C. GUILLAUME, *Vagotonies, sympathicotonies, neurotonies.* Masson, Paris (1925).

LAIGNEL-LAVASTINE et J. DEGRAIS, *Le réflexe d'orthostatisme dans la fièvre typhoïde.* « Rev. neurol. », (I), 1116 (1926).

A. OCCHIUTO, *Ricerche statistiche sulla frequenza del polso in soggetti maschi italiani.* « Arch. Sci. biol. », XXIV, 281 (1938).

H. O. PFISTER, *Die neuro-vegetativen Störungen der Schizophrenien* . . . « Schweiz. Arch. Neur. Psychiat. », XXXIX (Suppl.), 77 (1937).

C. RIZZO, *Un metodo pratico per l'esplorazione del sistema nervoso vegetativo.* « Riv. Patol. nerv. ment. », LVI, f. 3° (1940).

G. SÖDERBERGH, *Sur les moyens actuels d'exploration du système sympathique en clinique et leur valeur.* « Rev. neurol. », (I), 721 (1926).

STRAUSS, cit. dal GUILLAUME.

J. TINEL, *Le système nerveux végétatif.* Masson, Paris (1937).

Biologia. — *Ricerche sperimentali sulle perossidasi nello sviluppo embrionale di « Petromyzon »*, Nota (*) di M. CASTIGLI-PITOTTI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

PREMESSA. – Le presenti ricerche sono il proseguimento di quelle iniziate negli anni 1940-41 e delle quali ho già riferito in una Nota precedente (1). In essa ho brevemente riassunto i risultati che si ottengono con gli embrioni di *Petromyzon fluviatilis* nei riguardi dello studio delle perossidasi a seconda che per rivelarle venga adoperata la benzidina in soluzione

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia generale dell'Università di Perugia.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1948.

(1) « Rend. R. Acc. d'Italia », *3* (1941).

acquosa (metodo usato in precedenza da me [2]) ovvero in soluzione alcolica (metodo usato da Spirito [3]).

I risultati ottenuti furono i seguenti: le uova vergini, le uova fecondate e le uova segmentate fino allo stadio di blastula dànno una reazione blu egualmente distribuita in tutte le parti, sia usando la benzidina alcolica che quella acquosa. A partire dallo stadio di gastrula a termine – neurula, mentre con la benzidina alcolica la reazione blu compare in tutto l'embrione, diminuendo progressivamente soltanto nella parte embrionale propriamente detta, con la benzidina acquosa essa si attenua invece esclusivamente nella massa vitellina ventrale, fino a scomparirvi completamente allo stadio in cui ha inizio il sollevamento della zona cefalica, per non più riapparirvi neanche negli stadi successivi.

La prima idea che sorse per spiegare il fenomeno fu quella che contemplava la possibilità di una diversa penetrabilità dei reattivi nelle varie zone del germe, nel senso che la mancata reazione con la benzidina acquosa nella zona della riserva vitellina ventrale poteva essere imputata a una mancata penetrazione del reattivo in quella parte. E questo modo di vedere poteva essere accettato anche se fino a quello stadio di sviluppo la reazione con la benzidina acquosa si era verificata nella suddetta zona del germe, inquantochè a partire da esso nuove condizioni, riassumibili nel potenziarsi di intensi processi che portano al riassorbimento della riserva vitellina ventrale, avrebbero potuto renderla non più penetrabile al reattivo acquoso usato. Pertanto, per favorire in tal caso la penetrazione del reattivo acquoso, ho usato praticare una fissazione preliminare delle uova con una miscela 3:1 di alcole assoluto e cloroformio; miscela già da me proficuamente adoperata nelle uova di echinodermi [2]. In tal modo anche con la benzidina acquosa si ottiene una intensa reazione blu nella massa vitellina ventrale.

In questa fissazione preliminare occorre considerare però il fattore alcole, identicamente presente nel reattivo usato da Spirito, e pertanto altre esperienze furono fatte, sempre con l'impiego della benzidina acquosa, sottoponendo, prima della reazione, le uova all'azione del calore che, da certi punti di vista, poteva presentare delle analogie di azione con l'alcole stesso. In tal modo, col materiale sottoposto al vapore fluente o semplicemente alla temperatura di 75°, si ottenne la reazione blu nella massa vitellina ventrale sì come si otteneva con l'impiego della benzina alcolica.

Parte sperimentale. – Nel riprendere le esperienze per indagare il significato delle differenze rilevate con l'impiego dei due metodi e per spiegare il modo di azione dei fattori sperimentali introdotti allo scopo di rendere simili i risultati delle due reazioni, sì come è detto più sopra, innanzitutto ho pensato di ripetere le esperienze con i più vari reattivi in modo da poter precisare tra essi quelli aventi azione analoga a quella dell'alcole e del calore

(2) « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », *17* (1939).
(3) « Arch. Sc. Biol. », *20* (1934).

nel fare apparire la reazione blu nella massa vitellina ventrale con la benzidina acquosa.

Elenco qui sotto le sostanze con le quali ho ottenuta tale reazione positiva (4):

Alcole assoluto;
Sublimato acetico;
Acido tricloroacetico;
Acqua ossigenata;
Cloruro ferrico;
Solfato cuproammoniacale.

Le sostanze predette, cui possiamo aggiungere quelle usate precedentemente e cioè la miscela alcole–cloroformio e in più il fattore fisico rappresentato dal calore, presentano un lato interessante se considerate nel loro insieme, in quanto tutte hanno la proprietà di poter operare una denaturazione dei protoplasmi .È difficile riuscire a identificare per ogni sostanza la natura di questa denaturazione (infatti essa può avvenire con passaggio delle proteine dalla struttura ciclica a quella a catene fibrose; con formazione di legami tra gruppi amminici e gruppi carbossilici delle proteine stesse; con messa in evidenza di gruppi atomici particolarmente attivi; ecc.), tuttavia esiste un fenomeno comune a tutti i tipi di denaturazione, riassumibile nella profonda alterazione dei rapporti tra proteine e acqua. Era quindi logico supporre che l'azione dei diversi denaturanti da me usati, e responsabile della comparsa della reazione blu nella massa vitellina ventrale con la benzidina acquosa, fosse dovuta ad una proprietà comune a tutti essi e cioè presumibilmente all'alterazione del predetto rapporto tra proteine e acqua.

Da questo punto di vista si rendeva quindi particolarmente interessante l'impiego di sostanze capaci di agire su tale rapporto; sostanze rappresentate dalle serie liotrope di Hofmeister e che hanno una possibilità più o meno notevole di operare la trasformazione del protoplasma in senso soloide o geloide secondo Schade.

Si sono usati allo scopo i cloruri dei seguenti cationi: Li, K, Na, Ca, Ba alla concentrazione dell'8 per mille tenendovi il materiale per sei ore e lavandolo successivamente onde allontanare il reattivo adoperato.

Le reazione blu con la benzidina acquosa nella massa vitellina ventrale si è ottenuta con il NaCl, il KCl, il $BaCl_2$ e $CaCl_2$ e non con il LiCl. Se ora noi facciamo astrazione dai cloruri dei cationi Ca e Ba, i quali hanno sempre un'azione precipitante, disimbibente (antionchica secondo Schade e cioè un'azione che si oppone alla imbibizione dei biocolloidi) vediamo che gli altri cationi usati possono essere disposti in serie nel modo seguente andando,

(4) Gli embrioni di *Petromyzon fluviatilis e P. planeri* (che ho potuto avere quest'anno a disposizione) sono stati messi nelle soluzioni a varie concentrazioni per tempi variabili fino a 24 ore. Dopo lavaggio prolungato, per allontanare i reattivi usati, si è eseguita la reazione con la benzidina acquosa.

da quello ad azione più o meno intensamente positiva, a quello ad azione nulla:

Na K Li.

Questa disposizione corrisponde alla serie liotropa di Hofmeister rispetto all'intensità dell'azione precipitante di detti cationi sulle proteine in ambiente acido, dal K che l'ha in misura maggiore al Li che l'ha in misura minima.

I predetti risultati, che hanno l'appoggio del comportamento rilevato con il Ca e il Ba di cui ho detto più sopra, ci indicano la giustezza dei presupposti dai quali si era partiti nell'impostare queste nuove esperienze ed hanno chiarito il significato della reazione blu con la benzidina acquosa nella massa vitellina ventrale ottenibile a seguito di vari interventi usati, nel senso che essa è dovuta a un processo di denaturazione delle sostanze capaci di dare la reazione o comunque a una profonda alterazione del rapporto fra esse e l'acqua.

I fatti accertati nelle due forme di *Petromyzon* e soprattutto il risultato mostrante la possibilità di ottenere con opportuni artifizi la reazione blu con la benzidina acquosa là dove prima non si era rilevata, permettono di avanzare l'idea che le sostanze contenute nella massa vitellina ventrale e capaci di dare la reazione della benzidina siano di natura diversa dalle vere perossidasi. Infatti pur non potendosi escludere a priori che le predette sostanze siano realmente delle perossidasi, a volta, a volta rivelabili o meno con il reattivo acquoso, a seconda di particolari stati chimici o chimico-fisici di esse, ciò nondimeno è molto verisimile l'idea prospettata più sopra, in quanto, nello stesso embrione in sviluppo, altre parti hanno mostrata una continuità di modo di agire, per cui è suggestiva l'ipotesi di una differenza ben più profonda tra le sostanze rivelabili come perossidasi nella massa vitellina ventrale e quelle rivelabili nelle parti embrionali propriamente dette. Di più già in passato, a seguito di esperienze condotte con altri intenti, era stata prospettata da Spirito l'idea che le perossidasi dell'uovo di *Petromyzon* fossero di natura diversa da quelle dimostrabili negli Anfibi riferita da Friggeri [5].

Pertanto ho iniziato tutta una serie di esperienze per precisare la natura delle sostanze che con la benzidina dànno la reazione delle perossidasi nella massa vitellina ventrale dell'embrione di *Petromyzon*.

Dopo alcune indagini orientative ho eseguita la seguente prova la quale ha dato risultati soddisfacenti.

Un certo numero di uova vergini, o fecondate, o in sviluppo è stato posto nell'incavo di un vetrino portaoggetti e ridotto in poltiglia. A questa è stata aggiunta una piccola quantità di idrosolfito di sodio e successivamente una goccia di piridina, mescolando con una bacchettina di vetro. Così facendo si può osservare un netto cambiamento di colore della poltiglia che, da bian-

[5] «Riv. Biol.», 30 (1940).

castra, diventa di un colore rosso ciliegia più o meno intenso: osservando questa poltiglia al microspettroscopio (6) appare con grande evidenza lo spettro di assorbimento dell'emocromogeno. Analogo trattamento eseguito sulle uova di *Bufo*, che pur sono ricche nel vitello di sostanze rivelabili come perossidasi, non ha mai dato un risultato analogo.

Prima di procedere ad ulteriori ricerche atte a precisare il significato dell'emocromogeno ottenibile in *Petromyzon*, ho eseguito delle esperienze allo scopo di conoscere una eventuale localizzazione delle sostanze capaci di dare la reazione sopradescritta. Naturalmente ho scelto embrioni allo stadio in cui, come ho già detto, c'è una netta differenza nella reazione delle perossidasi tra la parte embrionale propriamente detta e la massa vitellina ventrale.

Preso un certo numero di embrioni, con un sottile bistouri ho separato la parte anteriore da quella posteriore, nella quale rimane tutta la massa vitellina ventrale. I frammenti di ciascuna delle due parti sono stati posti separatamente in due vetrini e sono stati trattati con la tecnica sopra esposta.

Mentre le poltiglie dei pezzi posteriori dànno la reazione dell'emocromogeno, quelle delle parti embrionali, ormai prive del vitello endocellulare, non dànno la predetta reazione. Alla differenza esistente tra le due parti, nei riguardi del loro comportamento a proposito delle perossidasi, veniva così ad aggiungersene un'altra notevole relativa al contenuto o meno di sostanze atte a dare lo spettro dell'emocromogeno.

L'interesse di quest'ultimo risultato mi ha spinto a indagare circa la possibilità di ottenere una reazione di localizzazione delle predette sostanze nell'embrione intero. A tale scopo ho operato come segue: il materiale, allo stato già precisato, è stato posto in capsule da embrioni in una soluzione satura di idrosolfito di sodio e lì lasciato per qualche tempo. Asportato l'eccesso della soluzione, veniva aggiunta una goccia di piridina. Si è potuto così osservare, in modo nettissimo, la localizzazione della colorazione rosso ciliegia nel vitello e la sua assenza nella parte embrionale: le due parti poste nel campo del microscopio, al cui oculare era stato sostituito il microspettroscopio, mostrano lo spettro dell'emocromogeno nella prima zona (*) e non nella seconda.

(6) Ringrazio vivamente il prof. Giulio Cotronei, direttore dell'Istituto « G. B. Grassi » dell'Università di Roma per avermi voluto così cortesemente permettere l'uso del microspettroscopio del suo Istituto.

(*) NOTA AGGIUNTA. – Questo speciale comportamento di tutta la parte ventrale dell'embrione di *Petromyzon* è causa dell'impossibilità (per lo meno con i mezzi attualmente a mia disposizione) di poter precisare il momento in cui, nelle isole del sangue, ha inizio la formazione dell'emoglobina, sì come è detto nel mio recente lavoro *Sulla precoce localizzazione degli abbozzi del sangue* in tale specie (« R. Acc. Lincei », *3*, 1947). A proposito del quale lavoro desidero ora ricordare che esso risolveva a sua volta, mediante una tecnica appropriata (e il risultato principale era stato già pubblicato in una mia Nota precedente « R. Acc. d'Italia », *3*, 1941), un'altra difficoltà e cioè quella di poter rivelare il primo apparire delle isole del sangue col metodo alla benzidina; difficoltà messa in luce da SPIRITO in uno dei suoi lavori sull'argomento (« Riv. Biol. », *19*, 1935). Ora in un recente lavoro di L. RAUNICH

Nella conoscenza delle proprietà delle sostanze capaci di trasformarsi, quando sono allo stato ridotto, in emocromogeno in presenza di una base [7] e delle interrelazioni tra esse proprietà ed una eventuale azione perossidasica, ho creduto interessante tentare una precisazione al fine di stabilire la reale essenza delle sostanze contenute nella massa vitellina ventrale in *Petromyzon*.

Pertanto ho eseguito una serie di ricerche per precisare la esatta localizzazione delle linee di assorbimento dell'emocromogeno predetto: in tal maniera da una comparazione della loro posizione con quella accertata per tutta una serie di composti organici, si sarebbe potuto dedurre l'effettivo significato delle sostanze in esame.

Con l'aiuto del microspettroscopio e sistemando la posizione della scala avvalendomi di una lampada al sodio, ho eseguito esatte determinazioni delle strie di assorbimento dell'emocromogeno ottenibile negli embrioni di *Petromyzon*. Esse corrispondono circa alle seguenti lunghezze d'onda:

$$m\mu\ 600 - 555 - 535$$

Si tratta quindi di sostanze rientranti nel gruppo dei citocromi.

CONSIDERAZIONI. – Le presenti ricerche si presentano interessanti, non soltanto per le peculiari proprietà accertate in *Petromyzon*, ma anche per una proficua comparazione che si può fare tra l'embrione di questa specie e quello degli Anfibi finora studiati per questi problemi di fisiologia embrionale.

Mi siano permesse a questo proposito alcune considerazioni. Innanzitutto è necessario che io ricordi il comportamento delle uova di *Petromyzon* e quello delle uova degli Anfibi a proposito dell'assunzione di ossigeno prima e dopo la fecondazione. Prendendo in esame le ricerche di Alberto Stefanelli [8] vediamo che in *Bufo* l'assunzione di ossigeno, misurata mediante il suo micro-

(« Mon. Zool. Ital. », 55, 1946) *Sullo sviluppo degli isolotti sanguigni in « Petromyzon planeri »* si parla appunto del problema della localizzazione degli abbozzi del sangue negli embrioni di lampreda e si dice dell'impossibilità di usare il solito metodo della benzidina, senza nemmeno accennare che tale impossibilità – come ho detto più sopra – era stata già precisata nel lavoro di SPIRITO del 1935 e si espongono i risultati ottenuti con un diverso impiego della benzidina senza ricordare che i primi reperti di rivelamento degli abbozzi del sangue in *Petromyzon* con l'uso di un altro metodo alla benzidina si trovano nel mio lavoro predetto del 1941.

E tali dimenticanze hanno invero nociuto al RAUNICH – che pur conosce i contributi stranieri, sistemati da più punti di vista dai lavori di SPIRITO – perchè altrimenti (a parte il ripetere esperienze già fatte da altri) non avrebbe riferito, per esempio, che l'isolotto sanguigno ventrale appare per la prima volta impari anteriormente e bifido posteriormente, perchè invece appare all'inizio pari in tutta la sua estensione; non avrebbe detto che esso si manifesta per la prima volta allo *stadio di pistola*, perchè invece appare molto prima e cioè allo stadio in cui da poco la zona cefalica si è sollevata al di sopra della massa vitellina ventrale; ecc. (confronta a tal proposito testo e figure del lavoro mio e del RAUNICH).

(7) J. B. SUMMER e G. F. SOMERS, *Chemistry and methods of enzymes* (1947).

(8) « Arch. Sc. Biol. », *24* (1938).

respirometro, non cambia con la fecondazione: in *Petromyzon* [9] invece lo stesso autore rileva che il processo della fecondazione porta ad un brusco aumento della quantità di ossigeno assunto. Questa differenza di comportamento si può spiegare con la presenza in *Petromyzon*, e l'assenza in *Bufo* di sostanze appartenenti al gruppo dei citocromi: si potrebbe infatti pensare che la presenza in *Petromyzon* di una notevole quantità delle predette sostanze rappresenti (siccome è indicato dal sistema Keilin–Warburg) la possibilità di mobilitare una più grande quantità di ossigeno (facilmente cedibile ai substrati di fronte alle necessità derivate dal notevole lavoro da compiere a partire dalla fecondazione), ciò che invece non può verificarsi in *Bufo* dove queste sostanze mancano.

Sarà interessante a questo proposito l'estensione dell'indagine comparativa delle sostanze allo studio in uova che presentino o meno, al momento della fecondazione, il fenomeno del brusco aumento nell'assunzione dell'ossigeno.

La precedente considerazione ne permette un'altra ad essa correlata. Essa si basa sul confronto tra l'esistenza o meno delle predette sostanze del gruppo dei citocromi in *Petromyzon* e in *Bufo* e il rispettivo loro comportamento in anaerobiosi. Ricordo a tal proposito che mentre in *Bufo* (Spirito [10]) le uova fecondate possono segmentarsi per un tempo notevole in ambiente privo di ossigeno, in *Petromyzon* le uova sono immediatamente bloccate nel loro sviluppo, sicchè non si può ottenere, a volte, in tali condizioni sperimentali nemmeno la segmentazione in due blastomeri. La continuazione dei processi di sviluppo in *Bufo* è dovuta – come ha dimostrato Spirito – alla continuazione di processi di ossidazione per opera di una riserva ossidante in esso contenuta. Questa riserva ossidante, secondo la teoria di Spirito [11-12] sul valore biologico della catalasi (ossiforo), sarebbe, per lo meno in gran parte, costituita da quest'ultima sostanza. Ma anche in *Petromyzon* (fornito di scarsa quantità di catalasi) non può negarsi *a priori* l'esistenza di una notevole quantità di ossigeno accumulato nell'interno dell'uovo (ricordare la grande quantità di sostanze del gruppo dei citocromi da me posta in evidenza). Soltanto ci sarebbe da pensare che l'azione sperimentale della sottrazione di ossigeno dall'ambiente in cui è posto il materiale (e cioè in ultima analisi la pressione negativa di questo elemento) sia sufficiente in *Petromyzon* e non in *Bufo* a sottrarre l'ossigeno in essi contenuto e ciò in relazione al fatto che tale elemento si trova nelle due specie legato a sostanze di diversa natura e dotate a tal riguardo di diverse proprietà.

(9) « Arch. Sc. Biol. », *27* (1941).
(10) « Arch. Sc. Biol. », *23* (1937).
(11) « Med. e Biol. », *1* (1942).
(12) XXIX Riunione della S. I. P. S. (1942).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente porge il saluto dell'Accademia e suo al prof. Hans Levy dell'Università di Berkeley in California, che assiste alla seduta.

Comunica poi alla Classe la triste notizia della morte, avvenuta il 23 dello scorso febbraio, del Socio Nazionale ALBERTO PELLOUX, Professore alla Università di Genova, che faceva parte dell'Accademia dal 27 luglio 1932. Il Pelloux era un cultore della mineralogia di alto valore e a lui si devono, oltre la scoperta di nuove specie mineralogiche rarissime, importanti ricerche nel campo applicativo che lo hanno condotto alla scoperta di nuovi giacimenti minerari, con i quali il Pelloux ha portato un contributo prezioso al nostro Paese. Alla memoria del compianto collega il Presidente invia un commosso saluto.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente informa la Classe che, a causa delle difficili condizioni finanziarie dell'Accademia, è stato necessario porre una limitazione alla pubblicazione nei « Rendiconti» di Note di estranei. Un estraneo potrà quindi pubblicare sei Note all'anno, cioè tre per semestre, e disporre di complessive trentasei pagine. Inoltre, in uno stesso fascicolo, non potranno essere inserite due Note dello stesso autore. Prega pertanto i Soci ad attenersi, nella presentazione di Note di estranei, alle nuove disposizioni, ispirate anche ad un ben inteso concetto dell'importanza e della dignità scientifica delle pubblicazioni accademiche.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci Natta, Cotronei, Crocco, Picone (anche per il Socio Straniero Sierpiński), Sergi, Amoroso e Colonnetti (a mezzo del Presidente Castelnuovo).

L'Accademico Segretario dà lettura delle Note pervenute all'Accademia.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

NATTA G. e BACCAREDDA M., Sulla velocità di propagazione degli ultrasuoni nelle miscele ideali.

SACCO F., Sopra una nuova teoria dell'interno terrestre.

AGLIARDI N. e RODITSCHEK R., Cinetica della deidrogenazione del cicloesanolo su ossido di rame (pres. dal Corrisp. G. NATTA).

BERTOLANI M., Sulla presenza della scorodite e dell'anglesite a Monte Valerio (Campiglia Marittima) (pres. dal Corrisp. G. CAROBBI).

CASTOLDI L., Applicazioni dei teoremi generalizzati della divergenza e di Stokes al calcolo della derivata sostanziale di integrali multipli negli Spazi di Riemann (pres. dal Socio L. BERZOLARI).

CERUTI A., Alterazioni istochimiche della *Trametes cinnabarina* sul legno e calcolo del peso delle ife nei materiali patologici (pres. dal Corrisp. C. CAPPELLETTI).

FICHERA G., Sul flusso di una funzione armonica (pres. dal Socio M. PICONE).

GALLICO E. e CAMERINO B., L'azione dei raggi X sui catalizzatori organici e su soluzioni di bleu di metilene (pres. dal Socio P. RONDONI).

GENNA G., Ricerche antropologiche sulla famiglia dei Medici (pres. dal Corrisp. S. SERGI).

LEVI F., Sugli effetti statici dei fenomeni viscosi. Nota II (pres. dal Corrisp. G. COLONNETTI).

MANARINI M., Sui paradossi di d'Alembert e di Brillouin nella dinamica dei fluidi (pres. dal Corrisp. F. ZAGAR).

RIEDEL A., Resti di animali domestici neo-eneolitici della caverna Pocala (Aurisina) conservati nel Museo dell'Istituto Geologico dell'Università di Padova (pres. dal Corrisp. G. B. DAL PIAZ).

URBANI, Il trattamento con chinoni e l'assunzione di ossigeno studiati sull'uovo in sviluppo di *Bufo vulgaris* e *Bufo viridis* (pres. dal Socio G. COTRONEI).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario illustra le pubblicazioni inviate in omaggio mettendo in particolare rilievo il volume *Astronomia sferica e teorica* del Socio Zagar e due studi del Socio Silvestri estratti dal « Bollettino del Laboratorio di entomologia agraria di Portici », volume 8°.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 13 marzo 1948.

AMALDI Edoardo. — *Centro di studio per la fisica nucleare e delle particelle elementari; attività svolta durante l'a. 1947.* Estr. da « La ricerca scientifica », anno 18° n. 1 (1948).

BERNARDINI Gilberto, LONGO Claudio, PANCINI Ettore. — *Relazione sulla costruzione del « Laboratorio della Testa Grigia ».* Estr. da « La ricerca scientifica », anno 18° (1948), n. 1.

BRANDENBERGER Heinrich. — *Neue Ergebnisse auf dem Gebiete der Materialforschung.* Estr. da « Schweizer. Bauzeitung », a. LXV, 1947, n. 37.

— *Neue Grundlagen der Materialprüfung und der Festigkeitslehre.* Estr. da « Schweiz. Bauzeitung », a. LXV, 1947, n. 49–50.

— *New theory of elasticity and strength,* s. u. t. Pp. 9, dattiloscritte.

— *Numerische Berechnung der Spannungsverfestigung beim Kaltrecken und Kaltstauchen.* Estr. da « Schweizer Archiv für angewandte Wissenschaft und Technik », a. XIII, 1947, nn. 8–9.

BROMEHEAD Cyril Edward Nowill. — *A geological Museum of the early seventeeth century.* Estr. da « Quarterly Journal of the geological Society », vol. CIII, 1947, p. 2.

BRONZIN Vincenzo. — *Sopra un quesito di probabilità.* Trieste, La Editoriale Libraria, 1947. Pp. 23, in–8°. (Istituto tecnico « G. R. Carli ». Quaderni di cultura, II).

LONGO Claudio. — Vedi BERNARDINI Gilberto.

PANCINI Ettore. — Vedi BERNARDINI Gilberto.

SILVESTRI Filippo. — *Descrizione di una specie nota e di una nuova di Lepismatidae (Insecta, Thysanura).* Estr. da « Bollettino del Laboratorio di entomologia agraria di Portici », vol. VIII, 1948.

— *Illustrazione della « Plusiocampa [Stygiocampa] nivea Joseph [Campodeidae, Diplura] » delle grotte di Postumia.* Estr. da « Bollettino del Laboratorio di entomologia agraria di Portici », vol. VIII, 1947.

ZAGAR Francesco. — *Astronomia sferica e teorica.* Bologna, Zanichelli, 1948. Pp. XVI–493, in–8°, con figg.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 aprile 1948.

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria). — *Intorno agli* S_k *che appartengono alle forme generali di dato ordine* (*). Nota II (**) del Corrisp. B. SEGRE.

4. Per $n = 2$ la (4) (o (4_k)) riducesi alla (2). Questa limitazione non può allora venir sostituita da una migliore nel teorema del n. 1, in quanto è ben noto (e facilmente dimostrabile) che, se $r \leq 2k$, una quadrica di S_r che contenga un S_k possiede qualche punto doppio, e non è quindi una F^2 generale di S_r.

Ci rimane dunque soltanto da completare la dimostrazione di quel teorema per

$$n \geq 3 \quad , \quad k \geq 1 , \tag{16}$$

e supponendo valga la (1) ma non la (4), sicchè sarà

$$r < \rho , \tag{17}$$

dove, per abbreviare, abbiamo posto

$$\rho = \rho_k = k + \binom{n+k-1}{n-1} . \tag{18}$$

In virtù nel n. 2 si tratta soltanto più di mostrare che, in tali ipotesi, *la generica* F^n *di* S_r *contiene qualche* S_k.

5. Premettiamo alcune considerazioni sugli S_k situati sulle forme d'ordine n di S_r. Siano Φ^n una forma siffatta ed S_k uno spazio k-dimen-

(*) Continuazione della Nota I, pubblicata a p. 261 di questo volume dei «Rendiconti», fasc. 3, 1948.

(**) Presentata nella seduta del 14 febbraio 1948.

sionale giacente su essa; ciascuno degli ∞^{r-k-1} S_{k+1} di S_r passanti per S_k sega Φ^n lungo tale S_k ed ulteriormente secondo una V_k^{n-1} (eventualmente indeterminata in S_{k+1}) la quale o contiene S_k come componente oppure interseca S_k in una V_k^{n-1}. Mostreremo che *le* V_k^{n-1} *così ottenute su* S_k *costituiscono in ogni caso un sistema lineare, riferito proiettivamente alla stella* ∞^{r-k-1} *degli* S_{k+1} *di* S_r *passanti per* S_k. Più precisamente, quel sistema lineare ha dimensione

$$q = r - k - 1 \tag{19}$$

se, e soltanto se, nessuna delle suddette V_k^{n-1} è indeterminata o contiene S_k, nel qual caso la proiettività indicata è n o n d e g e n e r e ; altrimenti esso ha dimensione

$$q < r - k - 1 \tag{20}$$

e tale proiettività risulta d e g e n e r e .

Tutto ciò segue subito analiticamente, assumendo S_k come spazio fondamentale

$$x_{k+1} = \cdots = x_r = 0 \tag{21}$$

delle coordinate $(x_0, x_1, \cdots, x_r)$. Allora infatti Φ^n si rappresenta con un'equazione della forma

$$\Sigma \varphi^{(j)}_{j_0, j_1, \cdots, j_k}(x_{k+1}, \cdots, x_r)\, x_0^{j_0} x_1^{j_1} \cdots x_k^{j_k} = 0, \tag{22}$$

ove la notazione è simile a quella usata nella (14) del n. 3, talchè, ad esempio, valgono le $j = n - (j_0 + j_1 + \cdots + j_k)$, $1 \leq j \leq n$; i vari S_{k+1} per S_k sono dati dalle

$$x_{k+1} : \cdots : x_r = y_{k+1} : \cdots : y_r ,$$

in corrispondenza a valori non tutti nulli delle y; ed infine il sistema delle V_{k-1}^{n-1} si rappresenta su S_k coll'equazione

$$\Sigma \varphi^{(1)}_{j_0, j_1, \cdots, j_k}(y_{k+1}, \cdots, y_r)\, x_0^{j_0} x_1^{j_1} \cdots x_k^{j_k} = 0 \qquad (j_0 + j_1 + \cdots + j_k = n - 1),$$

dove le $\varphi^{(1)}$ sono

$$\binom{n + k - 1}{n - 1} \tag{23}$$

f o r m e l i n e a r i nelle y. Si vede così che vale la (19) o la (20) secondochè non è od è possibile di annullare tutte le $\varphi^{(1)}$ in corrispondenza a valori non tutti nulli delle y. Il secondo caso equivale a supporre che qualcuna delle suddette V_k^{n-1} sia indeterminata o contenga S_k, e si presenta necessariamente qualora il numero (23) delle forme $\varphi^{(1)}$ risulti inferiore al numero $r - k$ delle variabili y, ossia, in virtù della (18), se $r > \rho$. Se invece

$$r \leq \rho , \tag{24}$$

otteniamo rispettivamente l'uno o l'altro caso a seconda che la matrice dei coefficienti delle forme $\varphi^{(1)}$ ha r a n g o $r - k$ o d i n f e r i o r e : è

chiaro che la prima alternativa è allora quella generale, sicchè, quando valga la (24), diremo ordinatamente nei due casi che l'S_k considerato è non speciale o speciale su Φ^n.

6. Proviamo ora che

Se vale la (24), *per ogni* S_{k-1} *di* Φ^n *passa un numero finito* (*eventualmente nullo*) *di* S_k *non speciali di* Φ^n.

Basterà per ciò dimostrare che ogni S_k di Φ^n passante per S_{k-1}, e che come tale non sia isolato, è di conseguenza speciale. Introduciamo all'uopo in S_r coordinate $(x_0, x_1, \cdots, x_r)$ tali che S_{k-1}, S_k si rappresentino rispettivamente colle (13), (21); allora l'equazione di Φ^n potrà scriversi nell'una e nell'altra delle forme (14), (22), confrontando le quali otteniamo le identità

$$(25)\qquad f^{(i)}_{i_0, i_1, \cdots, i_{k-1}}(x_k, x_{k+1}, \cdots, x_r) = c \sum_{j_k=0}^{i-1} \varphi^{(i-j_k)}_{i_0, i_1, \cdots, i_{k-1}, j_k}(x_{k+1}, \cdots, x_r)\, x_k^{j_k},$$

dove $i = n - (i_0 + i_1 + \cdots + i_{k-1})$, $1 \leq i \leq n$, e c è una costante non nulla.

I vari spazi k-dimensionali di S_r passanti per S_{k-1} si hanno ponendo le $x_k, x_{k+1}, \cdots, x_r$ uguali o proporzionali a dati numeri non tutti nulli; in particolare per l'S_k (21) può assumersi

$$(26)\qquad x_k = 1 \quad , \quad x_{k+1} = \cdots = x_r = 0.$$

In base al n. 3 ed alle ipotesi ammesse per questo S_k, si ha quindi che le (26) rappresentano una soluzione non isolata del sistema (15); questo consiste di $\rho - k$ equazioni omogenee nelle $r - k + 1$ variabili $x_k, x_{k+1}, \cdots, x_r$, alla prima delle quali – in un intorno della soluzione (26) – può venir attribuito senza restrizione il valore $x_k = 1$. Tenuto conto della (24), da qui si deduce che la matrice jacobiana dei primi membri delle (15) rispetto alle $x_{k+1}, \cdots, x_r$ deve avere rango inferiore ad $r - k$ per i valori (26) delle variabili. Ora, in forza delle (25), ciò equivale a dire che la matrice jacobiana delle $\rho - k$ funzioni

$$\varphi^{(1)}_{j_0, j_1, \cdots, j_k}(x_{k+1}, \cdots, x_r) \qquad (j_0 + j_1 + \cdots + j_k = n - 1),$$

rispetto alle $r - k$ variabili $x_{k+1}, \cdots, x_r$, deve avere rango inferiore ad $r - k$ per $x_{k+1} = \cdots = x_r = 0$; e ciò esprime appunto che S_k è speciale su Φ^n (n. 5).

7. Procediamo ora a stabilire la proprietà enunciata alla fine del n. 4, ricorrendo al seguente artificio. Se vale la (17), dove ρ è dato dalla (18), la generica F^n di S_r può ottenersi come sezione della generica forma d'ordine n di S_ρ, Φ^n, col generico S_r di S_ρ: tutto sta quindi nel dimostrare che *ogni* F^n *così definita contiene qualche* S_k.

In virtù del n. 3, Φ^n contiene infiniti S_k costituenti un sistema algebrico, irriducibile nel campo di razionalità di Φ^n, avente dimensione

$$(27)\quad \begin{cases} \vartheta = (k+1)(\rho-k) - \binom{n+k}{n} = (k+1)\binom{n+k-1}{n-1} - \binom{n+k}{n} \\ \quad = (n-1)\binom{n+k-1}{n}. \end{cases}$$

Ciascuno degli ∞^ϑ S_k di Φ^n determina in S_ρ un sistema lineare di S_r passanti per esso, la cui dimensione vale sempre esattamente

$$(28)\qquad (r-k)(\rho-r).$$

Dunque, in base al risultato richiamato in [6] nella Nota I, veniamo a definire una corrispondenza algebrica irriducibile se associamo un S_k di Φ^n ed un S_r di S_ρ quando si appartengono. Entro la totalità $\infty^{(r+1)(\rho-r)}$ degli S_r di S_ρ, quegli S_r che contengono qualche S_k di Φ^n costituiscono dunque un sistema algebrico irriducibile, Σ, la cui dimensione denotiamo con

$$(29)\qquad (r+1)(\rho-r) - \eta \qquad (\eta \geqq 0).$$

Il nostro assunto equivale a mostrare che Σ coincide colla suddetta totalità, ossia che è $\eta = 0$. Ciò è d'accordo col n. 2, in quanto – in base al principio del conto delle costanti ed alle (27)-(29), (3) – lo spazio S_r generico di Σ contiene un sistema algebrico irriducibile di S_k di Φ^n, di dimensione

$$d = \vartheta + (r-k)(\rho-r) - [(r+1)(\rho-r) - \eta] = \delta + \eta.$$

Il confronto colla (11) fornisce $\eta = \varepsilon$, sicchè la $\eta = 0$ equivale appunto alla condizione $\varepsilon = 0$ di cui al n. 2.

8. Stabiliamo anzitutto il seguente lemma:

La varietà Φ^n generica d'ordine n di S_ρ, dove ρ è dato dalla (18), *è tale che due generici suoi S_k risultano sghembi fra loro.*

Possiamo limitarci a considerare S_k non speciali di Φ^n, in quanto (n. 5) gli S_k speciali di Φ^n non sono su essa S_k generici; allora, in base al n. 6, per ogni S_{k-1} di Φ^n passa soltanto un numero finito di quegli S_k. Suppongasi per assurdo che due distinti S_k generici di Φ^n si seghino secondo un S_h $(0 \leqq h \leqq k-1)$.

Mostriamo intanto che non può essere $h = k-1$. Invero, se fosse $h = k-1$, si otterrebbero i vari S_k generici di Φ^n costruendo, per ogni S_{k+1} di un S_k^0 fissato generico di Φ^n, i diversi S_k non speciali di Φ^n che lo contengono. Questi sarebbero dunque complessivamente al più tanti quanti sono gli S_{k+1} di S_k^0 (n. 6), ossia ∞^k, onde la (27) fornirebbe

$$k \geqq (n-1)\binom{n+k-1}{n},$$

in contraddizione colle (16).

Fissiamo, come dianzi, un S_k^0 generico di Φ^n, il quale per ipotesi dovrà incontrare ogni altro S_k generico di Φ^n lungo un S_h $(0 \leq h \leq k-2)$; ne consegue che un S_{k-h-2} generico di S_k è sghembo con S_k^0. Preso un S_{k-h-2}^0 generico di Φ^n, necessariamente sghembo con S_k^0, consideriamo l'insieme degli $S_{k\ h-1}$ di Φ^n che lo contengono. In base all'osservazione finale del n. 3 ed alle (12), (18), questo insieme ha dimensione

$$\sigma = \rho - \rho_{k\ h-1} = \binom{n+k-1}{n-1} - \binom{n+k-h-2}{n-1} + h + 1$$

$$= \binom{n+k-2}{k} + \binom{n+k-3}{k-1} + \cdots + \binom{n+k-h-2}{k-h} + h + 1 ;$$

sicchè, tenuto conto della prima delle (16), risulta

$$(30)\quad \sigma \geq (k+1) + k + \cdots + (k-h+1) + h + 1 = (h+1)(2k-h+4)/2 .$$

Gli ∞^σ S_{k-h-1} suddetti possono d'altro canto anche ottenersi nel modo seguente. A norma del n. 3 ognuno di essi sta in qualche S_k di Φ^n, e ciascuno degli S_k così definiti contiene lo spazio S_{k-h-2}^0 fissato; viceversa, ogni S_k di Φ^n passante per S_{k-h-2}^0 contiene ∞^{h+1} S_{k-h-1} per S_{k-h-2}^0, ed è ovvio che ciascuno di questi sta su Φ^n. Si ha pertanto

$$\sigma \leq \tau + (h+1),$$

denotando con τ la dimensione del sistema formato dagli S_k di Φ^n passanti per $S_{k\ h-2}^0$. Ora il generico di questi S_k sega S_k^0 lungo un S_h; viceversa, preso uno qualunque degli $\infty^{(h+1)(k-h)}$ S_h di S_k^0, gli S_k per S_{k-h-2}^0 che lo contengono passano tutti per l'S_{k-1} congiungente S_h ed S_{k-h-2}^0, onde fra essi v'è soltanto un numero finito di S_k non speciali di Φ^n (n. 6). Si ha pertanto $\tau \leq (h+1)(k-h)$, e quindi

$$\sigma \leq (h+1)(k-h+1).$$

Il confronto di questa relazione colla (30) porge la limitazione assurda $(h+1)(h+2) \leq 0$, ciò che prova il lemma.

9. Osserviamo ora che per due S_k generici di Φ^n, i quali (n. 8) sono sghembi fra loro, passa sempre qualche S_r di S_ϱ; risulta invero, in base alle (1), (16),

$$r \geq k + \frac{1}{k+1}\binom{n+k}{k} \geq k + \frac{1}{k+1}\binom{k+3}{k} \geq 2k+1 .$$

Dunque il generico S_r del sistema Σ, definito nel n. 7, contiene un sistema algebrico irriducibile $\infty^{\delta+\eta}$ di S_k di Φ^n, due generici dei quali sono sghembi fra loro.

Ciò premesso, fissiamo ancora genericamente un S_k^0 di Φ^n, ed associamo fra loro un S_k generico di Φ^n ed un S_r di S_ϱ quando S_r contiene S_k^0 ed S_k.

Veniamo così a definire una corrispondenza algebrica irriducibile fra quegli S_k e questi S_r, in virtù della quale – a norma del n. 2 – S_r descrive in S_ϱ tutta la stella di centro S_k°; la dimensione di questa stella vale $(r-k)(\varrho-r)$, ed il suo generico S_r contiene $\infty^{\delta+\eta}$ S_k di Φ^n (n. 7). Sappiamo inoltre che Φ^n contiene ∞^ϑ S_k (n. 7), il generico dei quali, essendo sghembo rispetto ad S_k° (n. 8), sta in $\infty^{(r-2k-1)(\varrho-r)}$ S_r passanti per S_k°. In base al principio del conto delle costanti [7] si ha quindi

$$(r-k)(\varrho-r)+(\delta+\eta)=\vartheta+(r-2k-1)(\varrho-r);$$

e questa relazione si riduce appunto a quella $\eta=0$ da dimostrare (n. 7), in forza delle (3), (18), (27).

Matematica (Geometria). — *Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche* [*]. Nota I [**] del Corrisp. B. Segre.

1. In questa Nota, ed in altre tre che seguiranno, mi occupo sia dal punto di vista algebrico che da quello aritmetico delle forme cubiche F_r, di S_{r+1}, rappresentate dall'equazione

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{r+2}^3=0, \tag{1}$$

nonchè di certe forme cubiche Φ_{r-1} ottenibili come sezioni di F_r con degli S_r pluritangenti. Mentre le Φ_{r-1} posseggono un numero positivo finito di nodi, che è probabilmente il massimo raggiungibile da una forma cubica di S_r (n. 22), le F_r – in base alla (1) – risultano chiaramente prive di punti multipli. Siccome poi ogni omografia trasformante F_r in sè deve mutare in sè l'hessiano $x_1x_2\cdots x_{r+2}=0$ della (1), così si vede che tali omografie sono in numero di $3^{r+1}(r+2)!$, e si rappresentano tutte col permutare le $x_1, x_2, \cdots, x_{r+2}$ comunque e col moltiplicarle per radici cubiche arbitrarie dell'unità.

È ben noto che F_1 è una *cubica piana equianarmonica* [1]; essa ammette tre flessi reali:

$$x_1=x_2+x_3=0 \quad , \quad x_2=x_3+x_1=0 \quad , \quad x_3=x_1+x_2=0, \tag{2}$$

i quali ne costituiscono la sezione colla retta $x_1+x_2+x_3=0$. A norma dell'ultimo teorema di Fermat, la cui validità per il valore 3 dell'esponente è da lungo tempo stabilita [2], quei tre flessi sono *i soli punti razionali* (ossia di coordinate razionali) *giacenti su* F_1.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Presentata nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) Ved. per esempio F. Enriques–O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. II (Bologna, Zanichelli, 1918), p. 199.

(2) Cfr. ad esempio L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, vol. II (New York, Stechert, 1934), cap. 21, oppure G. H. Hardy–E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*. (Oxford, Clarendon Press, 1938), pp. 192–194.

La F_2, cioè la superficie cubica dello spazio ordinario:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0, \tag{3}$$

fu studiata per primo da Eckardt [3], ed è caratterizzabile come *superficie cubica equianarmonica del primo tipo* [4]. Essa contiene le *tre rette razionali*

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0 \quad , \quad x_1 + x_3 = x_4 + x_2 = 0 \quad , \quad x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0, \tag{4}$$

e queste soltanto, le quali costituiscono la sua sezione col piano $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$; ne consegue che la (3) possiede un'infinità di soluzioni razionali, date dai punti razionali delle rette (4) e da altri che da essi si ricavano mediante noti procedimenti generali [5]. Ma v'è di più: è infatti possibile *risolvere parametricamente la* (3) *nel campo razionale in modo completo*, come mostrò Eulero [6]; le formule di Eulero, semplificate da Binet [7], furono poi riottenute da Hermite [8] con un procedimento geometrico suggestivo, che conduce a rappresentare omaloidicamente la superficie (3) su di un piano, restando nel campo razionale.

Non molto era noto sull'equazione (1) per $r \geqq 3$, e le relative citazioni verranno date più oltre. Io qui dimostro che, per ogni valore di $r \geqq 1$, *la* (1) *contiene un numero finito di spazi lineari razionali di dimensione* $[r/2]$, rappresentati da equazioni che sono ovvie estensioni delle (2), se r è dispari (n. 3), o delle (4), se r è pari (n. 14). Deduco tali risultati dallo studio preliminare della medesima questione nel campo complesso, da cui discende che, se r è pari, anche in tale campo la (1) contiene un *numero finito di* $S_{[r/2]}$ (n. 2); mentre invece, se r è dispari e superiore all'unità, gli $S_{[r/2]}$ situati sulla (1) costituiscono un *numero finito di sistemi algebrici irriducibili* ∞^2, ciascuno dei quali è proiettivamente identico al sistema delle rette giacenti sulla forma cubica F_3 (n. 7). Quest'ultimo sistema viene poi rappresentato su di un *piano 18 plo*, avente come curva di diramazione una sestica di terza classe contata 15 volte (n. 12).

I risultati suddetti permettono di ricavare *soluzioni complete* della (1) nel campo razionale, di grado 4 se r è pari (nn. 4, 5), e di grado 10

(3) F. E. ECKARDT, *Ueber diejenigen Flächen 3ten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden*, «Math. Ann.», *10*, 227–272 (1876), n. 28.

(4) Ved. B. SEGRE, *The non singular cubic surfaces*. (Oxford, Clarendon Press, 1942), §§ 88, 100, 103.

(5) Cfr., anche per ulteriori indicazioni, B. SEGRE, *Arithmetic upon an algebraic surface*, «Bull. Amer. Math. Soc.», *51*, 152–161 (1945), e B. SEGRE, *A parametric solution of the indeterminate cubic equation* $z^2 = f(x, y)$, «Journ. London Math. Soc.», *18*, 226–233 (1943).

(6) L. EULER, *Solutio generalis quorundam problematum Diophanteorum quae vulgo nonnisi solutiones speciales admittere videntur*, «Novi Comm. Ac. Sc. Petrop.», *6*, 155–184 (1761), od *Opera Omnia*, 1ª s., vol. II (Lipsia, Teubner, 1915), pp. 428–458, *Probl. 16*.

(7) J. BINET, *Note sur une question relative à la théorie des nombres*, «Comptes Rendus», *12*, 248–250 (1841).

(8) C. HERMITE, *Sur l'équation* $x^3 + y^3 = z^3 + u^3$, «Nouv. Ann. de Math.» (2), *11*, 5 (1875), od *Oeuvres*, vol. III (Paris, Gauthier-Villars, 1912), pp. 115–117.

se r è dispari e superiore al 7 (n. 15). La questione non è qui risoluta per $r = 3, 5, 7$; per r pari essa era già stata trattata, in modo un po' meno semplice e completo, dal Morin (9).

Problemi analoghi studio poi per le *forme cubiche* Φ_{r-1}, delle quali già ho fatto cenno in principio. Queste godono di varie eleganti proprietà, per le quali rinvio alla Nota IV, e si riducono per $r = 4, 5$ rispettivamente alle note varietà di C. Segre e di Veneroni.

2. Consideriamo dapprima le forme F di dimensione pari, e stabiliamo che:

Sulla forma cubica

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2n}^3 = 0 \tag{5}$$

giacciono

$$\rho_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n (2n)(2n-1)\cdots(n+1) \tag{6}$$

S_{n-1}, *e non di più. Questi spazi sono permutati fra loro transitivamente dalle omografie che mutano in sè la* (5) (n. 1), *uno di essi essendo rappresentato dalle equazioni.*

$$x_{n+1} + \varepsilon_1 x_1 = x_{n+2} + \varepsilon_2 x_2 = \cdots = x_{2n} + \varepsilon_n x_n = 0, \tag{7}$$

dove le ε *denotano radici cubiche dell'unità.*

Nell'S_{2n-1} in cui $(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$ sono coordinate omogenee di punto, ogni S_{n-1} si ottiene ponendo n legami lineari indipendenti fra le x. Disponendo di un'omografia trasformante in sè la (5) (n. 1), possiamo ridurre quei legami ad essere risolubili rispetto alle $x_{n+1}, \cdots, x_{2n}$, e quindi porli nella forma

$$x_{n+i} = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{8}$$

le f essendo forme lineari nei loro argomenti. Affinchè lo spazio (8) giaccia sulla (5) occorre e basta che sia

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 \equiv -[f_1^3(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + f_n^3(x_1, x_2, \cdots, x_n)] \tag{9}$$

identicamente nelle $x_1, x_2, \cdots, x_n$; sicchè, in un S_{n-1} ove si assumano queste variabili quali coordinate omogenee di punto, le equazioni

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = 0 \tag{10}$$

$$f_1^3(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + f_n^3(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \tag{11}$$

rappresentano una medesima forma cubica. Ciò intanto implica che le n forme lineari $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ siano fra loro indipendenti, altrimenti la (11) avrebbe qualche punto triplo (in cui tali forme si

(9) U. MORIN, *Un problema d'analisi indeterminata di terzo grado*, «Boll. Un. Mat. Ital.» (2), 1, 201–205 (1939). Seppi di questo lavoro soltanto durante la correzione delle bozze.

annullano), mentre invece la (10) è manifestamente priva di punti multipli. Le (10), (11) hanno pertanto rispettivamente come hessiane le

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 0 \quad , \quad f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdots f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 ,$$

e queste debbono coincidere fra loro, se si vuole che le (10), (11) coincidano; deve dunque essere

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv -\varepsilon_1 x_{i_1} , f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv -\varepsilon_2 x_{i_2} ,$$
$$\cdots , f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv -\varepsilon_n x_{i_n} ,$$

dove le ε sono costanti non nulle ed $i_1, i_2, \cdots, i_n$ denota una permutazione dei numeri $1, 2, \cdots, n$. Dall'identità (9) ora seguono le $\varepsilon_i^3 = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, talchè, disponendo ancora di un'omografia trasformante in sè la (5), le (8) si mutano nelle (7).

È poi subito visto che il numero complessivo ρ_n, dei suddetti S_{n-1} si esprime colla (6).

3. Dal n. 2 segue senz'altro come corollario che:

Sulla forma cubica (5) *giacciono* $(2n)(2n-1)\cdots(n+1)/2^n$ S_{n-1} *razionali, e non di più. Questi sono permutati fra loro transitivamente dalle omografie razionali che mutano in sè la* (5), *uno di essi essendo rappresentato dalle equazioni*

$$x_1 + x_{n+1} = x_2 + x_{n+2} = \cdots = x_n + x_{2n} = 0 .$$

Tali S_{n-1} *possono caratterizzarsi come gli* S_{n-1} *della* (5) *che appartengono all'iperpiano*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} = 0 ,$$

ond'essi risultano a due a due incidenti.

4. *Una* V_{2n-2}^3 *di* S_{2n-1} *contenente due* S_{n-1} *sghembi è omaloidica per* $n > 1$, potendo venire rappresentata biunivocamente su di un S_{2n-2} di S_{2n-1} coll'associare un punto di V_{2n-2}^3 ed un punto di S_{2n-2} quando la retta che li congiunge si appoggi a quei due S_{n-1}. Quest'osservazione è classica per $n = 2$, ed è stata fatta esplicitamente per $n = 3$ dal Veneroni [10].

È interessante rilevare – col Morin [9], ed estendendo l'argomentazione di Hermite [8] – come, *nel caso della forma* (5), *la suddetta rappresentazione possa ottenersi senza uscire dal campo razionale*, quantunque la (5) non possegga nessuna coppia di S_{n-1} sghembi razionali (n. 3). La (5) invero, in base al n. 2, contiene $(2n)(2n-1)\cdots(n+1)/2$ coppie razionali di S_{n-1} sghembi, ciascuna formata da due S_{n-1} dipendenti da irrazionalità quadratiche coniugate; e quella rappresentazione può appunto effettuarsi

(10) E. VENERONI, *Sopra una varietà cubica con quindici punti doppi dello spazio a cinque dimensioni* (Note I e II), « Rendic. Istit. Lombardo », *47*, 521-533 e 704-718 (1914), n. 26. Ved. pure G. FANO, *Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni contenenti rigate razionali del 4° ordine*, « Comm. Math. Helv. », *15*, 71–80 (1942–43), n. 1.

nell'ambito razionale, come ora mostreremo, utilizzando una coppia siffatta, ad esempio quella costituita dagli spazi

$$(12)\qquad x_{n+1} + \varepsilon x_1 = x_{n+2} + \varepsilon x_2 = \cdots = x_{2n} + \varepsilon x_n = 0 \qquad \left(\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$(13)\qquad x_{n+1} + \varepsilon' x_1 = x_{n+2} + \varepsilon' x_2 = \cdots = x_{2n} + \varepsilon' x_n = 0 \qquad \left(\varepsilon' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Preso in S_{2n-1} un qualunque punto $P(y_1, y_2, \cdots, y_{2n})$ non situato su nessuno di tali spazi, la retta per esso a questi appoggiata è il luogo descritto dal punto

$$(14)\qquad x_i = 2\alpha y_i - (\alpha - \beta) y_{n+i}\ ,\ x_{n+i} = (\alpha - \beta) y_i + (\alpha + \beta) y_{n+i}\ \ (i = 1, 2, \cdots, n),$$

al variare del rapporto β/α. Basta infatti notare che detto luogo è proprio una retta, e che il suo punto (14) si identifica con P per $\beta = \alpha$, mentre giace sullo spazio (12) o sullo spazio (13) quando rispettivamente si assuma $\beta/\alpha = i\sqrt{3}$, $\beta/\alpha = -i\sqrt{3}$. Sostituendo le (14) nella (5) si ottiene un'equazione cubica in α e β, che si riduce alla

$$(15)\qquad 3\alpha \sum_{i=1}^{n} y_i (y_i^2 - y_i y_{n+i} + y_{n+i}^2) = \beta \sum_{i=1}^{n} [(y_i - 2y_{n+i})(y_i^2 - y_i y_{n+i} + y_{n+i}^2)]$$

dopo aver soppresso il fattore $3\alpha^2 + \beta^2$, ciò che equivale a trascurare i due punti d'appoggio della retta (14) cogli spazi (12), (13). La (15) è identicamente soddisfatta se entrambe le somme che in essa figurano valgono zero, nel qual caso la retta (14) giace interamente sulla (5); altrimenti dalla (15), a meno di un fattore non nullo inessenziale di proporzionalità, si deduce

$$(16)\qquad \begin{cases} \alpha = \sum_{i=1}^{n} [(y_i - 2y_{n+i})(y_i^2 - y_i y_{n+i} + y_{n+i}^2)] \\ \beta = 3 \sum_{i=1}^{n} y_i (y_i^2 - y_i y_{n+i} + y_{n+i}^2), \end{cases}$$

ciò che fornisce l'intersezione della retta (14) colla (5) residua ai suddetti due punti di appoggio.

Concludendo, possiamo enunciare che:

Le equazioni (14), *in cui* α *e* β *si esprimano colle* (16), *o si lascino indeterminate qualora entrambe queste espressioni si annullino, forniscono una soluzione completa della* (5) *nel campo razionale. Così si ottengono le x come forme biquadratiche a coefficienti interi nei parametri omogenei y; questi possono ivi senza restrizione venir assoggettati ad una qualsivoglia condizione lineare a coefficienti razionali, per esempio alla* $y_{2n} = 0$.

5. L'ultimo risultato porge, nell'ambito razionale, una corrispondenza generalmente biunivoca fra i punti (y) dell'iperpiano $x_{2n} = 0$ ed i punti (x) della forma (5). Ma vi sono e c c e z i o n i alla biunivocità della corrispondenza, che ora conviene approfondire.

Anzitutto, in base al n. 4, la corrispondenza fra (x) ed (y) si esprime con equazioni, diciamole (14*), deducibili dalle (14) scambiandovi le $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ rispettivamente colle $y_1, y_2, \cdots, y_{2n}$, e determinando β/α in guisa che risulti $y_{2n} = 0$, ossia

$$(\alpha - \beta)\, x_n + (\alpha + \beta)\, x_{2n} = 0\,,$$

ciò che in generale fornisce

$$\beta/\alpha = (x_n + x_{2n}) / (x_n - x_{2n})\,.$$

Vi è *soltanto eccezione se* $x_n = x_{2n} = 0$, nel qual caso il punto (y) rimane indeterminato sulla retta rappresentata dalle (14*) al variare dei parametri omogenei α e β.

Similmente, dato (y) si ottiene (x) univocamente nel modo indicato al n. 4, *eccettuato quando le espressioni* (16) *si annullano entrambe*, nel qual caso il punto (x) risulta indeterminato sulla retta rappresentata dalle (14) al variare di α e β. Le (16) mostrano che il caso eccezionale ha luogo se

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i (y_i^2 - y_i\, y_{n+i} + y_{n+i}^2) = \sum_{i=1}^{n} y_{n+i} (y_i^2 - y_i\, y_{n+i} + y_{n+i}^2) = 0\,,$$

ciò che implica

$$(18) \qquad \sum_{i=1}^{2n} y_i^3 = 0\,.$$

Notiamo che, in tale ipotesi e supposto $y_{i_0} \neq y_{n+i_0}$ per un dato i_0 $(1 \leq i_0 \leq n)$, le (17) non rimangono verificate qualora si scambino y_{i_0} ed y_{n+i_0}; dunque, poichè le y debbono essere non tutte nulle e quindi non possono risultare tutte uguali fra loro in forza della (18), ne consegue che il caso eccezionale può sempre e v i t a r s i operando una conveniente sostituzione sulle $y_1, y_2, \cdots, y_{2n}$, ciò che – in base ai nn. 1, 4 – si riflette nella medesima sostituzione sulle $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$. Pertanto:

Le (14) *– in cui* α *e* β *si esprimano colle* (16) *– forniscono direttamente proprio t u t t e le soluzioni razionali dell'equazione* (5), *quando si prescinda dall'ordine in cui le variabili figurano in quest'equazione.*

6. Esaminiamo in particolare brevemente il caso $n = 2$, in cui la (5) si riduce alla (3). Allora, assumendo com'è lecito parametri non omogenei a, b legati alle y dalle

$$y_1 : y_2 : y_3 = a + b : -1 : 2\,b \quad , \quad y_4 = 0\,,$$

l'enunciato finale del n. 4 porge senz'altro per la (3) la *soluzione completa di quarto grado*

$$\begin{aligned} x_1 &= \quad (a^2 + 3\,b^2)^2 \quad a - 3\,b \\ x_2 &= \quad (a^2 + 3\,b^2)(3\,b - a) + 1 \\ x_3 &= -(a^2 + 3\,b^2)^2 + a - 3\,b \\ x_4 &= \quad (a^2 + 3\,b^2)(a + 3\,b) - 1\,, \end{aligned}$$

la quale *coincide con quella di Eulero, Binet e Hermite* citata nel n. 1.

Dal n. 4 può anche dedursi una *soluzione completa di terzo grado della* (3), assumendo il legame lineare fra le y nella forma $y_3 + y_4 = 0$. Invero allora, tenuto conto delle (16) ed in conformità a quanto si è detto nel n. 1 circa le (4), si può sopprimere dai secondi membri delle (14) il comune fattore generalmente non nullo $y_1 + y_2$; posto inoltre

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = a : a + b : 1 : -1 ,$$

si ottiene così la soluzione cubica annunciata:

$$\begin{aligned} x_1 &= (a+1)(a^2+ab+b^2) + 3a(b+1) \\ x_2 &= (a+b-1)(a^2+ab+b^2) + 3(a+b)(b+1) \\ x_3 &= -(a-2)(a^2+ab+b^2) + 3(b+1) \\ x_4 &= -(a+b+2)(a^2+ab+b^2) - 3(b+1). \end{aligned}$$

La questione generale di determinare quando e come una superficie cubica di data equazione può venir rappresentata su di un piano, senza uscire dal campo di razionalità dei coefficienti di tale equazione, è trattata in B. Segre, « Journ. London Math. Soc. », *18*, 24–31 (1943) e *19*, 84–91 (1944).

Astronomia. — *Sul problema lunare di Hill.* Nota (*) del Socio G. Armellini.

1. Come è noto, il problema dei tre corpi si chiama *ristretto* quando le orbite giacciono tutte in un medesimo piano ed uno dei corpi L è di massa infinitesima, mentre gli altri due S e T descrivono orbite circolari intorno al comune baricentro. Un caso speciale di grande importanza è il cosidetto problema *lunare*, studiato specialmente dal grande astronomo americano Hill, nel quale – oltre alle ipotesi già dette – si suppone ancora che S (Sole) abbia una massa molto grande rispetto a quella di T (Terra) e che la distanza TS sia pure molto grande rispetto alla distanza TL.

Prendiamo come piano xy il piano del moto, come origine T e come asse delle ascisse la retta TS. Allora le equazioni differenziali del moto di L (Luna) intorno a T, date da Hill, sono:

$$(1) \qquad \begin{cases} x'' - 2Ny' + \left(\dfrac{fm}{r^2} - 3N^2\right)x = 0 \\ y'' + 2Nx' + \dfrac{fm}{r^3}y = 0 \end{cases}$$

dove gli accenti rappresentano derivate rispetto al tempo, r è la distanza TL ed m, f, N indicano rispettivamente la massa della Terra, il coefficiente attrattivo e la velocità angolare con cui ruota l'asse x e cioè il moto medio della Terra intorno al Sole. Non insistiamo nella dimostrazione delle (1)

(*) Presentata nella seduta del 10 aprile 1948.

giacchè essa si trova riportata nei trattati di Meccanica Celeste [1]; notiamo soltanto che Hill sceglie le unità di misura in modo da avere $N = fm = 1$, mentre noi lasciamo le unità arbitrarie.

2. Hill ha esaminato se le (1) ammettano soluzioni particolari in cui x ed y siano sviluppabili in serie di Fourier procedenti secondo i coseni di archi multipli del tempo ed ha dato risposta affermativa, pervenendo così ad una soluzione periodica (sebbene particolare) del problema lunare. Ma qui ci proponiamo di studiare il problema da un punto di vista più generale, esaminando la traiettoria descritta da L intorno a T. Ed a tal fine, dopo aver trasformato le (1) in coordinate polari, ho eliminato tra esse il tempo prendendo come variabile indipendente l'anomalia e, servendomi dell'integrale dell'energia, sono giunto ad una *equazione differenziale del secondo ordine* tra il raggio vettore e l'anomalia, che è appunto l'equazione della traiettoria di L intorno a T.

Questa equazione, che non era stata fin qui ottenuta, pur non essendo riducibile alle quadrature, permette di studiare varie proprietà dell'orbita. Nella presente Nota, dopo averla ottenuta, mi limiterò per brevità a due sole applicazioni che sembrano di qualche importanza. E cioè dedurrò da essa l'equazione di una *curva algebrica simmetrica rispetto agli assi*, che io chiamo *curva di separazione*, perchè ha la proprietà di separare le regioni del piano dove possono cadere gli *apogei* (massimi di TL) dalla regioni del piano dove possono cadere i *perigei* (minimi di TL). Inoltre mostrerò come la ricerca dell'orbita *secolare* conduca ad un'equazione *differenziale lineare del primo ordine* e sia quindi immediatamente riducibile alle quadrature.

3. Ponendo per brevità

$$r = \frac{1}{u} \tag{2}$$

ed indicando con ϑ l'anomalia, e cioè l'angolo che il raggio vettore TL forma con l'asse x, abbiamo immediatamente

$$x = \frac{\cos\vartheta}{u} \quad ; \quad y = \frac{\sin\vartheta}{u} . \tag{3}$$

Derivando le (3) rispetto al tempo e sostituendo nelle (1) si ottiene subito

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{\cos\vartheta}{u}\vartheta'^2 + \frac{2\sin\vartheta}{u^2}u'\vartheta' - \frac{\sin\vartheta}{u}\vartheta'' + \frac{2\cos\vartheta}{u^3}u'^2 - \frac{\cos\vartheta}{u^2}u'' - \\ &\quad - \frac{2N\cos\vartheta}{u}\vartheta' + \frac{2N\sin\vartheta}{u^2}u' + (u^3 fm - 3N^2)\frac{\cos\vartheta}{u} = 0 \\ &-\frac{\sin\vartheta}{u}\vartheta'^2 - \frac{2\cos\vartheta}{u^2}u'\vartheta' + \frac{\cos\vartheta}{u}\vartheta'' + \frac{2\sin\vartheta}{u^3}u'^2 - \frac{\sin\vartheta}{u^2}u'' - \\ &\quad - \frac{2N\sin\vartheta}{u}\vartheta' - \frac{2N\cos\vartheta}{u^2}u' + u^2 fm\sin\vartheta = 0 . \end{aligned}\right. \tag{4}$$

(1) Cfr., per esempio, CHARLIER, *Mechanik des Himmels*, Bd. II, p. 138 e sgg.; POINCARÈ, *Les meth. nouv. de la Méc. Cél.*, vol. I, p. 159 e sgg.

Moltiplicando ordinatamente per $\cos\vartheta$ e $\sin\vartheta$ e sommando, abbiamo dopo facili riduzioni

$$u'' = \frac{2u'^2}{u} - u\vartheta'^2 - 2Nu\vartheta' + fmu^4 - 3N^2 u\cos^2\vartheta . \tag{5}$$

Ed analogamente, moltiplicando per $\sin\vartheta$ e $\cos\vartheta$ e sommando, abbiamo

$$\vartheta'' = \frac{2u'\vartheta'}{u} + \frac{2Nu'}{u} - 3N^2\cos\vartheta\sin\vartheta \tag{6}$$

dove gli accenti indicano sempre derivate *rispetto al tempo.*

Moltiplichiamo ora la (5) per $\frac{2u'}{u^4}$ e la (6) per $\frac{2\vartheta'}{u^2}$ e sommiamo; avremo:

$$\frac{2u'u''}{u^4} - \frac{4u'^3}{u^5} + \frac{2\vartheta'\vartheta''}{u^2} - \frac{2u'\vartheta'^2}{u^3} - 2fmu' + \tag{7}$$

$$+ \frac{6N^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{u^2}\vartheta' + \frac{6N^2\cos^2\vartheta}{u^3}u' = 0$$

e cioè:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u'^2}{u^4} + \frac{\vartheta'^2}{u^2} - 2fmu - \frac{3N^2\cos^2\vartheta}{u^2}\right] = 0 \tag{8}$$

da cui segue immediatamente l'integrale primo

$$\frac{u'^2}{u^4} + \frac{\vartheta'^2}{u^2} - 2fmu - \frac{3N^2\cos^2\vartheta}{u^2} = r'^2 + r^2\vartheta'^2 - \frac{2fm}{r} - \tag{9}$$

$$- 3N^2 r^2\cos^2\vartheta = 2h$$

che costituisce l'integrale dell'energia, rappresentando $r'^2 + r^2\vartheta'^2$ il quadrato della velocità di L intorno a T ed essendo $\frac{2fm}{r}$ il doppio del potenziale dovuto all'attrazione di T. Notiamo fin d'ora che, nel caso della Luna (come in generale dei satelliti), la costante delle forze vive h è *negativa.*

4. Fin qui abbiamo sempre preso come variabile indipendente il tempo; cerchiamo ora di eliminarlo, prendendo come variabile indipendente l'anomalia ϑ in modo da poter pervenire all'equazione geometrica della traiettoria descritta da L, indipendentemente dai tempi impiegati a descriverla. A tal fine, ricordiamo dal Calcolo Infinitesimale le due equazioni

$$\frac{du}{d\vartheta} = \frac{u'}{\vartheta'} \tag{10}$$

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} = \frac{u''\vartheta' - \vartheta''u'}{\vartheta'^3} . \tag{11}$$

Sostituendo nella (11), al posto di u'' e di ϑ'' i loro valori dati dalla (5) e dalla (6) e tenendo presente la (10), abbiamo allora:

$$(12)\qquad \frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{fmu^4}{\vartheta'^2} - \frac{2N}{u\vartheta'}\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right] + \frac{3N^2}{\vartheta'^2}\left[\cos\vartheta\sin\vartheta\frac{du}{d\vartheta} - u\cos^2\vartheta\right].$$

L'eliminazione del tempo non è però ancora completa, giacchè la (12) contiene ϑ' che è una derivata rispetto al tempo, e cioè un elemento cinematico e non puramente geometrico, rappresentando una velocità angolare. Ma è possibile eliminarlo, servendoci dell'integrale dell'energia.

Infatti, si ha identicamente dalla (10)

$$(13)\qquad u' = \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)\vartheta'$$

onde la (9) diviene

$$(14)\qquad \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\vartheta'^2 + u^2\vartheta'^2 - 2fmu^3 - 3N^2u^2\cos^2\vartheta = 2hu^4$$

da cui si ha subito

$$(15)\qquad \vartheta'^2 = \frac{2fmu^3 + 2hu^4 + 3N^2u^2\cos^2\vartheta}{u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2}.$$

Introducendo questo valore di ϑ' nella (12) e riducendo, abbiamo in fine

$$(16)\qquad \frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{fmu^4 - 3N^2u\cos^2\vartheta + 3N^2\cos\vartheta\sin\vartheta\frac{du}{d\vartheta}}{2fmu^3 + 2hu^4 + 3N^2u^2\cos^2\vartheta}\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right] - \frac{2N\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right]^{3/2}}{u\sqrt{2fmu^3 + 2hu^4 + 3N^2u^2\cos^2\vartheta}}.$$

La (16), che non era stata fin qui ottenuta, è *l'equazione geometrica* della traiettoria di L intorno a T, dalla quale il tempo risulta completamente eliminato. Come si vede, essa è un'equazione differenziale del secondo ordine tra le due coordinate polari ϑ ed u.

5. Notiamo che (come appunto deve essere) se si trascura l'azione perturbatrice del Sole, la (16) si riduce all'equazione di una conica che ha per fuoco T.

Infatti, se si pone $N = 0$, la (16) ci da

$$(17)\qquad \frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{fm}{2fmu + 2h}\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right]$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per $2\frac{du}{d\vartheta}$ e riducendo, abbiamo subito

$$(18) \qquad \frac{2\frac{du}{d\vartheta}\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+2u\frac{du}{d\vartheta}}{\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2+u^2}=\frac{fm}{fmu+h}\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)$$

equazione differenziale esatta, che integrata e passando dai logaritmi ai numeri, ci da

$$(19) \qquad u^2+\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2=\beta(fmu+h)$$

essendo β una costante arbitraria. In virtù della (19), la (17) diviene ponendo $\beta f\frac{m}{2}=k$:

$$(20) \qquad \frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u=k$$

equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, che s'integra immediatamente, dando per risultato

$$(21) \qquad u=\frac{1}{r}=k+\lambda\cos(\vartheta-\omega)$$

dove λ ed ω sono costanti arbitrarie. Come è evidente, la (21) rappresenta una conica che ha per fuoco l'origine T, per parametro $\frac{1}{k}$ e per eccentricità $\frac{\lambda}{k}$.

6. Nel caso generale, quando si tenga conto dell'attrazione del Sole e cioè quando si suppone N diverso da zero, la (16) non è più riducibile alle quadrature; ma ciò non ostante se ne possono dedurre conseguenze interessanti sopra le proprietà dell'orbita di L.

Supponiamo, per esempio, che questa orbita abbia un perigeo od un apogeo in un punto P di coordinate ϑ ed u, e cioè che in P la u sia massima o minima. Ovviamente in P la derivata $\frac{du}{d\vartheta}$ sarà eguale a zero, mentre la derivata seconda $\frac{d^2u}{d\vartheta^2}$ sarà positiva o negativa, secondo che si tratta di un minimo o di un massimo. In conseguenza, ponendo $\frac{du}{d\vartheta}=0$ e $\frac{d^2u}{d\vartheta^2}\gtrless 0$ nella (16) e riducendo, vediamo che le coordinate di P dovranno soddisfare alla ineguaglianza

$$(22) \qquad F=\frac{fmu^3-3N^2\cos^2\vartheta}{2fmu^3+2hu^2+3N^2\cos^2\vartheta}-\frac{2N}{\sqrt{2fmu^3+2hu^2+3N^2\cos^2\vartheta}}-1\gtrless 0$$

In conseguenza, la curva di equazione $F = 0$ e cioè (ponendo al posto di u il suo valore $\frac{1}{r}$ e riducendo) la curva di equazione

$$(23) \qquad 6N^2 r^3 \cos^2\vartheta + 2hr + fm + 2Nr\sqrt{3N^2 r^4 \cos^2\vartheta + 2hr^2 + 2fmr} = 0$$

separerà le regioni del piano in cui possono cadere i perigei, dalle regioni del piano in cui possono cadere gli apogei. La chiameremo perciò *curva di separazione*.

Riservandoci eventualmente di eseguirne la discussione in altra Nota, osserviamo intanto che questa curva è *simmetrica* rispetto all'asse x come pure rispetto all'asse y, giacchè la (23) resta invariata se si cambia ϑ in $-\vartheta$, oppure ϑ in $180 - \vartheta$.

Notiamo ancora che, se si trascura l'attrazione del Sole e cioè se si pone $N = 0$, la (23) si riduce a

$$(24) \qquad r = -\frac{fm}{2h}$$

e cioè ad un *cerchio* avente per centro l'origine. Ricordiamo che nel nostro caso h è negativa e che (come si sa dalla teoria delle orbite) è legata al semiasse maggiore a dell'orbita ellittica, che descriverebbe L quando non venisse perturbata dal Sole, dall'equazione

$$(25) \qquad h = -\frac{fm}{2a}.$$

Ne segue che, in tal caso, la curva di separazione è un cerchio avente per centro l'origine T (e cioè il fuoco dell'ellisse) e per raggio il semiasse maggiore a, onde ovviamente il perigeo cade sempre nel suo interno e l'apogeo sempre all'esterno.

Ovviamente nel caso di moto imperturbato ($N = 0$) vale la legge delle aree $r^2\vartheta' = C$ e quindi, chiamando con v la velocità di L, si ha immediatamente

$$(26) \qquad v^2 = r'^2 + r^2\vartheta'^2 = \vartheta'^2\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right] = C^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right]$$

essendo sempre $u = \frac{1}{r}$.

7. Passiamo ora allo studio dell'*orbita secolare* di L. Poichè $2\cos\vartheta\sin\vartheta = \sin 2\vartheta$ ha per valore medio lo zero, e poichè $2\cos^2\vartheta = 1 + \cos 2\vartheta$ ha per valore medio l'unità, la (16) diviene subito sostituendo al posto di queste due quantità i loro valori medi

$$(27) \qquad \frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{fmu^3 - 1{,}5N^2}{2fmu^4 + 2hu^3 + 1{,}5N^2 u}\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right] - \frac{2N\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right]^{3/2}}{u\sqrt{2fmu^5 + 2hu^4 + 1{,}5N^2u^2}}.$$

Poniamo ora

$$\frac{du}{d\vartheta} = w. \tag{28}$$

Avremo immediatamente, prendendo u come variabile indipendente:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} = \frac{dw}{d\vartheta} = w\frac{dw}{du} \tag{29}$$

onde la (27) diviene

$$w\frac{dw}{du} + u = \frac{fmu^3 - 1{,}5\,N^2}{2fmu^4 + 2hu^3 + 1{,}5\,N^2u}(u^2 + w^2) - \frac{2N(u^2+w^2)^{3/2}}{u\sqrt{2fmu^5 + 2hu^4 + 1{,}5\,N^2u^2}} \tag{30}$$

Ponendo ancora

$$u^2 + w^2 = \frac{1}{\zeta^2} \tag{31}$$

la (30) si trasforma con brevi riduzioni in

$$\frac{d\zeta}{du} = \frac{2N}{u\sqrt{2fmu^5 + 2hu^4 + 1{,}5\,N^2u^2}} - \frac{fmu^3 - 1{,}5\,N^2}{2fmu^4 + 2hu^3 + 1{,}5\,N^2u}\zeta \tag{32}$$

equazione differenziale lineare del primo ordine, immediatamente riducibile alle quadrature. *Il problema del moto secolare è quindi risolto.*

Astronomia (Astrofisica). — *Altezza della cromosfera nell'anno 1947 ed andamento del ciclo solare* (*). Nota (**) del Socio G. Abetti.

I risultati medi delle osservazioni dell'altezza della cromosfera solare eseguiti con l'equatoriale di Amici in Arcetri nell'anno 1947, come usualmente di 30° in 30° di latitudine, sono raccolti nella seguente tabella; i dettagli delle osservazioni stesse sono dati nelle pubblicazioni dell'Osservatorio di Arcetri (1).

Arcetri (1947).

Latitudine	Altezza	Latitudine	Altezza
+ 90° N	10″.7	— 90° S	10″.6
+ 60 E	10 .3	— 60 W	10 .3
+ 30 E	10 .6	— 30 W	10 .6
0 E	10 .7	— 0 W	10 .4
— 30 E	10 .8	+ 30 W	10 .0
— 60 E	10 .8	+ 60 W	10 .0

(*) Lavoro eseguito all'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.
(**) Presentata nella seduta del 10 aprile 1948.
(1) Cfr. « Oss. e Mem. Arcetri », e « Memorie S. A. I. » in corso di stampa.

Da cui risulta l'altezza media annuale 10".48; la differenza con l'altezza ottenuta nel 1946 è + 0".27 e, come avviene alle epoche di massimo della attività solare, si può ritenere uniformemente distribuita a tutte le latitudini.

La riduzione e discussione di tutte le osservazioni dell'altezza della cromosfera eseguite in Arcetri dal 1921 al 1946 sono state fatte da Fracastoro [2], tenendo conto delle equazioni personali dei vari osservatori. Viene confermata la variazione dell'altezza ai diversi angoli di posizione in funzione del ciclo undecennale ed è possibile un reale cambiamento nell'altezza media annuale della cromosfera, che potrà eventualmente venir meglio stabilita con future osservazioni.

L'area totale delle protuberanze dalle osservazioni di Arcetri risulta per il 1947 di **1895** unità di protuberanza (area di 1° del bordo solare per 1" di altezza) con un aumento di **603** U. P. rispetto al 1946, in accordo con il notevole aumento riscontratosi anche nei numeri relativi di Wolf per le macchie solari durante tutto il 1947, ed in accordo con le previsioni circa l'epoca del presente massimo di attività solare, che potrebbe essere già trascorso attorno al 1947,4, se non vi sarà qualche ripresa nell'anno corrente. Come è stato annunciato nello scorso anno [3] il grande gruppo di macchie apparso nel febbraio 1947 raggiunse la sua massima area (5400 milionesimi dell'emisfero solare secondo le misure di Greenwich e circa 6000 secondo le misure di Arcetri), il 9 aprile; alla sua terza apparizione si dissipava rapidamente al principio di maggio. Le polarità magnetiche del gruppo erano molto complicate con vaste aree nei diversi nuclei di polarità opposte e l'intensità del campo magnetico raggiunse circa 3500 oersted, che per una macchia così estesa è piuttosto bassa; forse a queste circostanze si deve ascrivere il fatto che i fenomeni geofisici da essa provocati non furono molto notevoli.

In attesa che questo ciclo (1944–1955) si completi, si può già dire che esso è già uno dei più attivi, se non il più attivo, di tutti quelli che sono stati precedentemente osservati.

(2) «Mem. S.A.I.», vol. 19, p. 45 e «Oss. Mem. Arcetri», fasc. 64 (1948).
(3) Questi «Rendiconti», ser. VII, vol. II, p. 499 (1947).

Chimica (Chimica Fisica). — *Sulla velocità di propagazione degli ultrasuoni nelle miscele ideali* (*). Nota di G. Natta e M. Baccaredda, presentata (**) dal Corrisp. G. Natta.

La determinazione delle velocità di propagazione delle onde ultrasonore nelle miscele liquide, in relazione alle velocità nei liquidi puri, presenta interesse per lo studio della natura e dell'entità delle forze che possono esercitarsi mutuamente tra le molecole dei componenti delle miscele.

D'altra parte la conoscenza delle leggi che regolano la variazione della velocità di propagazione in funzione della concentrazione di una sostanza solida disciolta in un dato solvente può anche permettere, attraverso estrapolazione, la determinazione della velocità di propagazione del soluto allo stato di liquido soprafuso (1).

Nei casi nei quali il volume specifico della miscela segue la legge dell'additività, nei casi cioè in cui ogni componente mantiene nella miscela il volume specifico che esso possiede allo stato puro, sarebbe logico prevedere che ciascuno dei componenti non venga influenzato dagli altri nei riguardi della propagazione degli ultrasuoni, e che pertanto i tempi impiegati nella propagazione in una miscela siano addittivi rispetto a quelli relativi ai componenti puri.

Nei casi nei quali invece la formazione della miscela è accompagnata da sensibile variazione di volume intervengono tra le molecole dei diversi componenti azioni di associazione o di dissociazione, generalmente connesse ad azioni reciproche dei dipoli e conseguente variazione dell'energia coesiva complessiva del sistema, che causano notevoli deviazioni nella velocità di propagazione delle onde ultrasonore.

Deviazioni potrebbero presentarsi anche nei casi in cui si abbiano nella miscela, per ragioni di natura sterica, delle variazioni dei volumi liberi tra le molecole.

La determinazione della velocità di propagazione degli ultrasuoni può pertanto concorrere, con gli altri metodi finora più largamente applicati (misure di densità, di indice di rifrazione, di costante dielettrica) allo studio delle miscele liquide.

In considerazione del relativamente scarso numero di lavori apparsi in questo campo nella letteratura, è stata intrapresa una serie di ricerche sulla misura di velocità di propagazione degli ultrasuoni in miscele binarie e ternarie.

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Chimica Industriale del C.N.R. presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 marzo 1948.

(1) W. Schaaffs, « Zeit. f. Physik », *105*, 658 (1937).

Mentre sui risultati di tali ricerche si riferirà dettagliatamente in seguito, con la presente Nota si vuole stabilire quale sia la legge che determina la velocità di propagazione degli ultrasuoni nelle miscele ideali. La conoscenza di tale legge deve essere considerata infatti il presupposto fondamentale per potere affrontare lo studio delle deviazioni da essa delle miscele non ideali.

Schaaffs [1] ha ammesso che in generale nelle miscele binarie e nelle soluzioni la velocità di propagazione varî linearmente con la concentrazione dei componenti, ossia che:

$$u_x = u_1 x + u_2 (1 - x) \qquad (1)$$

dove u_x, u_1, u_2 rappresentano rispettivamente le velocità di propagazione nella miscela di concentrazione x e nei due componenti puri.

Schaaffs [1] nell'esame di numerose miscele, ha concluso che questa legge viene seguìta con buona approssimazione nei sistemi benzolo–clorobenzolo, benzolo–paradiclorobenzolo, acetone–paradiclorobenzolo, benzolo–canfora, toluolo–etere etilico, tetracloruro di carbonio–acetone e tetracloruro di carbonio–eptano normale. Per altre coppie osserva invece notevoli deviazioni da detta relazione, che fornisce in generale risultati più elevati di quelli sperimentali, come ad esempio nei sistemi: esano normale–benzolo, eptano normale–benzolo, benzolo–nitrobenzolo, benzolo–fenolo, benzolo–paranitrotoluolo, metanolo–fenolo, acqua–resorcina, acetone–resorcina, metanolo–resorcina, sebbene buona parte di questi obbedisca alla legge dell'addittività dei volumi specifici.

Per le soluzioni acquose di sostanze solide, quali urea, urotropina, saccarosio e ramnosio, Schaaffs troverebbe un miglior accordo applicando una relazione lineare fra gli inversi delle velocità di propagazione e le rispettive concentrazioni in volume.

Si deve osservare d'altra parte che la formula adottata da Schaaffs per le miscele tra componenti liquidi non trova giustificazione nella natura del fenomeno della propagazione delle onde elastiche longitudinali che costituiscono gli ultrasuoni. Difatti il fenomeno della propagazione in una miscela ideale di due componenti può considerarsi che avvenga, dal punto di vista dei tempi impiegati per percorrere un determinato spazio, come se i componenti stessi si trovassero separati l'uno dall'altro, ed occupassero due strati contigui di spessore (misurato nella direzione di propagazione) proporzionale alla rispettiva percentuale in volume nella miscela.

La velocità media di propagazione u_x attraverso i due strati in funzione dei loro spessori s_1 ed s_2, risulta data da

$$u_x = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$$

essendo t_1 e t_2 i tempi rispettivamente impiegati ad attraversare i due strati.

Eliminando le t dalla equazione scritta sopra, essendo $t_1 = \frac{s_1}{u_1}$ e $t_2 = \frac{s_2}{u_2}$ e sostituendo agli spessori s_1 e s_2 le concentrazioni in volume dei due componenti che indichiamo con r e $1 - r$, si ottiene:

$$u_x = \frac{1}{\frac{r}{u_1} + \frac{1 - r}{u_2}}.$$

Passando alle concentrazioni in peso x e $1 - x$, essendo

$$x = \frac{r\rho_1}{\rho_x} \quad \text{e} \quad 1 - x = \frac{(1 - r)\rho_2}{\rho_x}$$

si ottiene

$$(2) \qquad u_x = \frac{1}{\left(\frac{x}{u_1 \rho_1} + \frac{1 - x}{u_2 \rho_2}\right)\rho_x}$$

essendo ρ_1, ρ_2, ρ_x le densità rispettive dei due componenti puri e della miscela; ρ_x nelle miscele ideali è, a sua volta, funzione lineare di x. Quest'ultima espressione fornisce per u_x valori sempre inferiori a quelli dati dalla (1) ed in misura tanto maggiore quanto più grande è la differenza tra i prodotti $u_1\rho_1$ e $u_2\rho_2$ e quanto più ci si allontana, nella composizione dalla miscela, dai due componenti puri. Nel caso in cui $u_1\rho_1$ sia poco diverso da $u_2\rho_2$ i valori di u_x forniti dalla (1) e dalla (2) tendono a coincidere.

Allo scopo di concludere quale delle due espressioni (1) e (2) interpreti meglio i dati sperimentali abbiamo preso in esame due sistemi nei quali l'appartenenza di entrambi i componenti alla stessa serie omologa dà garanzia della massima idealità: e precisamente il sistema di idrocarburi ciclici saturi cicloesano–decalina e quello di idrocarburi alifatici eptano normale–poliisobutilene. Questo secondo sistema costituito da componenti a peso molecolare molto diverso presenta notevole differenza tra le velocità di propagazione degli ultrasuoni nei due componenti puri, e quindi offre il vantaggio di consentire un più evidente confronto tra le formule (1) e (2).

Le misure di velocità ultrasonore sono state eseguite mediante un apparecchio di ultrasuoni il cui generatore è stato messo gentilmente a disposizione dall'Istituto di Elettroacustica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, che ne ha curato la costruzione; per il restante dispositivo sperimentale si rimanda ad un precedente lavoro [2]. La frequenza impiegata è stata di 4 MH_3.

Il cicloesano è stato ottenuto in questo Istituto per idrogenazione catalitica del benzolo; la decalina risultò, in base ai dati della densità e della velocità di propagazione [3] una miscela delle due forme cis e trans in proporzioni all'incirca eguali; l'eptano era un prodotto sintetico della Casa Heyl.

(2) M. Baccaredda A. Giacomini, Questi « Rendiconti », ser. VIII, *1*, 401 (1946).
(3) M. Baccaredda, « Ricerca Scientifica e Ricostruzione », *16*, 662 (1946).

Il poliisobutilene, del peso molecolare medio di circa 3000, era stato da noi ottenuto per polimerizzazione catalitica a bassa temperatura in presenza di BF_3 dell'isobutilene. Per esso il valore della velocità di propagazione a 20°C, non misurabile direttamente a causa della forte viscosità del prodotto, è stato dedotto per estrapolazione dei dati misurati sperimentalmente alle temperature di 65,70 e 75°C.

I risultati delle determinazioni di velocità a 20°C sono riportati nella tabella, nella quale sono confrontati con quelli calcolati in base alle formule (1) e (2).

TABELLA.

Sistema cicloesano–decalina (20° C).

$u_1 = 1281$ m. sec^{-1} $\rho_1 = 0.7780$ gr. cm^{-3}
$u_2 = 1427$ » $\rho_2 = 0.8832$ »

x		0.09	0.182	0.468	0.726
u_x sperimentale	(m. sec^{-1})	1407	1395	1347	1312
u_x calcolata secondo (1)	»	1413	1399	1358	1321
u_x calcolata secondo (2)	»	1406	1394	1347	1312

Sistema eptano n.–poliisobutilene (20°C).

$u_1 = 1153$ m. sec^{-1} $\rho_1 = 0.6836$ gr. cm^{-3}
$u_2 = 1508$ » $\rho_2 = 0.885$ »

x		0.267	0.499	0.717	0.860
u_x sperimentale	(m. sec^{-1})	1365	1278	1212	1179
u_x calcolata secondo (1)	»	1413	1332	1255	1203
u_x calcolata secondo (2)	»	1363	1277	1218	1182

Sistema acqua–saccarosio (20° C).

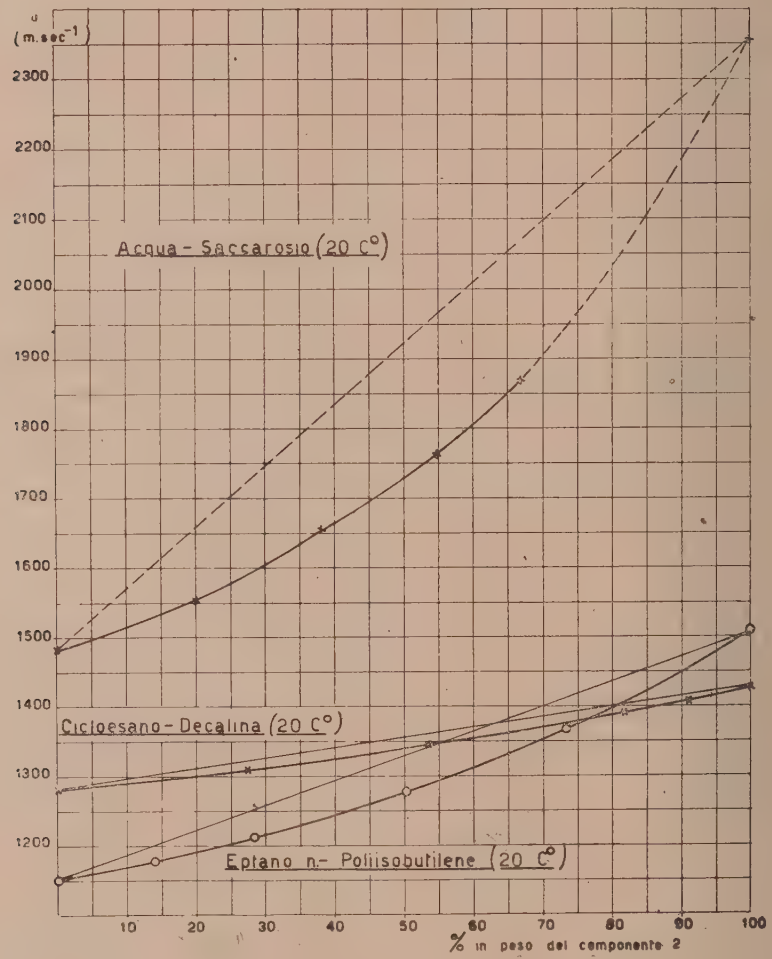
$u_1 = 1485$ m. sec^{-1} $\rho_1 = 0.9982$ gr. cm^{-3}
$u_2 = 2360$ » $\rho_2 = 1.588$ (solido) »

x		0.333	0.450	0.619	0.800
u_x sperimentale	(m. sec^{-1})	1868	1764	1660	1554
u_x calcolata secondo (1)	»	2068	1965	1818	1661
u_x calcolata secondo (2)	»	1873	1770	1655	1556

Dal confronto risulta un buon accordo dei valori sperimentali con la formula (2) da noi proposta, mentre i valori calcolati con la formula (1) risultano sempre superiori a quelli sperimentali. Ciò appare chiaramente anche dai diagrammi della figura nella quale sono riportati in ordinate le velocità ed in ascisse le percentuali in peso dei componenti.

La legge di dipendenza (1) è rappresentata in figura dalla congiungente i punti rappresentativi dei componenti puri; i punti sperimentali si trovano invece sulle curve inferiori che son state calcolate con la formula (2).

Nella stessa tabella e nella figura sono pure riportati i nostri valori sperimentali e quelli calcolati per le soluzioni acquose di saccarosio, che noi



abbiamo pure esaminato come esempio di un sistema con un componente solido, le cui soluzioni presentano volumi specifici addittivi. Non essendo nota nè facilmente determinabile direttamente la velocità di propagazione del saccarosio allo stato di liquido soprafuso, essa è stata determinata risolvendo l'espressione (2) rispetto ad u_2. A 20°C ed in base ai dati dedotti dalla soluzione più ricca in saccarosio (66,7 %° in peso) si è ottenuto per il saccarosio puro il valore di 2360 m. sec^{-1}.

Schaaffs [4] aveva determinato in base alla estrapolazione dei suoi dati sperimentali, $u_2 = 2263$ m. sec^{-1}.

Anche in questo caso si nota un buon accordo tra i dati sperimentali e quelli calcolati con la formula (2), mentre le discordanze sono assai forti rispetto ai dati calcolati con la formula (1).

Buona parte delle miscele che mostravano deviazioni, in base alle determinazioni di Schaaffs, dalla formula (1) forniscono invece risultati conformi o comunque più vicini alla espressione da noi proposta; così dicasi per le miscele esano normale–benzolo, eptano normale–benzolo, benzolo–nitrobenzolo, benzolo–fenolo, benzolo–paranitrotoluolo, metanolo–fenolo, acqua–resorcina, acetone–resorcina, metanolo–resorcina. D'altra parte anche per altri sistemi per i quali Schaaffs ha verificato la formula (1) (benzolo–clorobenzolo, benzolo–canfora) risulta pure verificata la formula (2), in quantochè, data la piccola differenza tra u_1 e u_2 in questi casi le due espressioni forniscono valori di u_x praticamente coincidenti. La formula (1) si verifica casualmente o fornisce valori più vicini ai risultati sperimentali quando nella formazione della miscela si osservano variazioni di volume che causano un aumento della velocità di propagazione rispetto ai valori ideali (esempi: miscele toluolo–etere etilico, tetracloruro di carbonio–acetone). In definitiva anche le suddette eccezioni, per miscele non ideali, finiscono per confermare la validità della formula da noi proposta per le miscele ideali.

Occorre pure ricordare che esistono delle miscele che forniscono valori di u_x che non sono conformi a nessuna delle espressioni proposte, e presentano addirittura dei massimi (esempio: acqua–etanolo [5]) o dei minimi (esempio: etanolo–cloroformio) [6].

In generale si hanno dei massimi o dei minimi nei casi nei quali entrambi o uno solo dei componenti siano liquidi polari notevolmente associati allo stato puro e nei casi in cui si abbia formazione di un composto di differenti caratteristiche dei componenti; d'altra parte in tali casi si ha in generale contemporaneamente una forte variazione di volume specifico, il che concorre a fare allontanare il valore di u_x dalla legge dell'additività.

Esistono infine rari esempi di miscele obbedienti alla legge dell'additività dei volumi specifici, costituite da composti non associati e non polari, che si scostano da qualsiasi legge di additività delle velocità ultrasonore: tale è il caso del sistema benzolo–tetracloruro di carbonio che, in base alle determinazioni di Schaaffs, confermate anche da nostre misure, fornisce valori di u_x costantemente più elevati di quelli calcolabili dalle formule (1) e (2), e di altri sistemi tutti contenenti tetracloruro di carbonio. Così la miscela cloroformio–tetracloruro di carbonio, studiata da Parshad [7], mostrebbe un minimo di velocità che l'autore spiega in base alla particolare forma delle

(4) W. Schaaffs, loc. cit (1).
(5) A. Giacomini, « Acta Pontificia Academia Scientiarum », *6*, 87 (1942).
(6) K. Sacher, « Physik. Zeit. », *51*, 360 (1940).
(7) R. Parshad, « Journ. Chem. Physics », *15*, 418 (1947).

molecole dei due componenti e ad una conseguente esaltazione delle forze di dispersione di London.

Conclusioni. – Nell'esame di soluzioni liquide binarie per mezzo degli ultrasuoni, si è giunti alla conclusione che la velocità di propagazione nelle soluzioni ideali, per le quali si verifica l'additività dei volumi specifici, risulta dalla espressione

$$u_x = \frac{1}{\left(\frac{x}{u_1 \rho_1} + \frac{1 - x}{u_2 \rho_2}\right)\rho_x}$$

dove u_1, u_2, ρ_1, ρ_2 sono rispettivamente le velocità di propagazione degli ultrasuoni e le densità dei componenti puri e u_x, ρ_x i corrispondenti valori per le miscele nelle quali il componente 1 è presente nella concentrazione x (espressa in peso).

Tale espressione è stata verificata da noi sperimentalmente con notevole esattezza per alcune miscele binarie di liquidi che seguono le leggi di Raoult per la tensione di vapore, quali quelle costituite da cicloesano–decalina e da eptano normale–poliisobutilene, e per le soluzioni acquose di saccarosio, per le quali vale la regola dell'additività dei volumi specifici.

L'espressione da noi proposta interpreta meglio anche diversi dati sperimentali di Schaaffs che non la formula basata sull'ipotesi della dipendenza lineare della velocità dalla concentrazione di uno dei componenti $u_x = u_1 x + u_2 (1 - x)$ e che, come ha constatato lo stesso Schaaffs, fornisce spesso valori di u_x più elevati di quelli sperimentali (esempi: miscele esano normale–benzolo, eptano normale–benzolo, benzolo–nitrobenzolo, benzolo–fenolo, benzolo–paranitrotoluolo, metanolo–fenolo, acqua–resorcina, acetone–resorcina, metanolo–resorcina). Quest'ultima formula casualmente fornisce risultati più vicini a quelli sperimentali quando nella formazione della miscela si osservano piccole contrazioni di volume (esempio: miscela toluolo–etere etilico) che causano un aumento della velocità di propagazione rispetto a quelli ideali.

Nei casi invece di miscele ideali in cui i prodotti $u_1 \rho_1$ e $u_2 \rho_2$ hanno valori molto vicini le formule (1) e (2) forniscono risultati praticamente coincidenti (esempi: miscele benzolo–clorobenzolo, benzolo–canfora).

Chimica (Chimica-fisica). — *Tixotropia e pseudotixotropia.* Nota I (*) del Corrisp. O. Scarpa.

1. I fenomeni tixotropici. – Le trasformazioni da uno stato apparentemente solido in uno detto liquido, poichè dotato di notevole scorrevolezza, che avvengono in alcuni sistemi quando sono sottoposti ad azioni meccaniche non molto intense (1) (pressioni localizzate, scosse, sbattimenti, vibrazioni, ultrasuoni, ecc.) vennero chiamate « tixotropiche » (2) dal biologo Peterfi (3) quando, nell'anno 1927, le scoprì nel contenuto di alcune cellule viventi.

Ma trasformazioni di tal genere erano certamente note nel passato (4), probabilmente anche in tempi molto lontani.

Caratteristica dei fenomeni tixotropici è la invertibilità, intesa nel senso che lasciando in riposo il sistema quando ha apparenza di liquido, esso si rapprende riformando un solido con il quale si possono ripetere più volte (sovente molte e molte volte) le trasformazioni inverse. Questi fenomeni, non possedendo punti di trasformazione, differiscono essenzialmente da quelli nei sistemi mesomorfi (cristalli liquidi ecc.).

Le prime osservazioni con carattere scientifico di trasformazioni tixotropiche sono generalmente attribuite ai fisici Cotton e Mouton, i quali nel 1907 descrissero alcune singolari apparenze osservate nei coaguli di ferro Bravais (5). Ma fin dal 1904 i medesimi fenomeni erano da me stati osservati nel corso di ricerche sulle soluzioni colloidali e loro coaguli (6).

Ecco, testualmente, come allora li descrissi:

È interessante ricordare il fenomeno presentato da un acetato basico di ferro. Tale soluzione colloidale è assai diluita ed è tuttavia intensamente colorata in rosso, essa ha l'apparenza di una soluzione vera benchè le sue proprietà sieno nettamente colloidali.

Osservata al microscopio normale è perfettamente omogenea, ma con l'ultramicroscopio mostra un numero straordinariamente grande di particelle animate

(*) Presentata nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) Dico *non molto intense* per ben distinguere la tixotropia dai fenomeni di fluidità di metalli solidi (piombo, ecc.) e di altri corpi solidi per azione di forti pressioni.

(2) Dalla parola greca τύχη (tyche) che significa anche *colpire*.

(3) Freunlich, « Koll. Zeit. », XLI, 289 (1928).

(4) Ricordo ad esempio che circa 40 anni or sono un naturalista Napoletano mi descrisse le liquefazioni di un miscuglio (apparentemente solido) di sostanze organiche, ottenute facendo oscillare il recipiente; nonchè le successive spontanee risolidificazioni. Egli voleva in tal modo riprodurre le apparenze della liquefazione del sangue, nota come miracolo di San Gennaro e di altri fenomeni noti in tempi lontanissimi.

(5) « Annales de Chimie et de Physique », XI (1907).

(6) *Una semplice disposizione per le osservazioni ultramicroscopiche e alcune osservazioni sulle soluzioni colloidali e i loro coaguli.* « Archivio di Fisiologia », 2° fascicolo: marzo 1905, p. 31 e sg.

da vivissimi moti Browniani e poca luce diffusa. Mantenendola alcun tempo fra i vetrini porta e coprioggetti essa forma dei coaguli, immobili, ma basta un piccolo urto dato al coprioggetti per rompere i coaguli e tornare alle apparenze della soluzione primitiva con le particelle ultramicroscopiche libere e animate dai moti Browniani. Dopo pochi istanti i coaguli si riformano e conservano le caratteristiche particolari di questo colloide.

Circa venti anni più tardi Szegvary e Schalek [7] sperimentando con colloidi di egual natura, riscoprirono e più ampiamente studiarono il fenomeno. Ed è a partire da questa epoca che datano numerose pubblicazioni riguardanti in special modo colloidi organici [8]. Questi fenomeni interessavano infatti sopratutto i biologi [9] ma negli ultimi anni vennero fatte applicazioni tecniche varie.

Nella recente nomenclatura scientifica la denominazione *tixotropia* venne estesa a fenomeni che presentano analogie con i sopra indicati, pur avvenendo in sistemi (ad esempio, le sabbie marine dette *mobili*, alcuni finissimi precipitati microcristallini ecc.) che certamente non si possono includere nella categoria dei colloidi [10].

Per dar ragione delle cause di fenomeni tixotropici alcuni sostennero l'analogia con le note esperienze di Baumbauer (rottura di edifici cristallini per effetto di azioni meccaniche e successiva riformazione degli edifici) ipotesi però non accettabile, in generale, ove si considerino le differenze fondamentali con i sistemi sopraindicati. Altri supposero che condizione necessaria per aver tixotropia fossero forme allungate delle particelle che avrebbero causato mutue azioni attrattive specialmente intense alle loro estremità.

2. I sistemi che presentano trasformazioni tixotropiche, si possono schematicamente comprendere in tre classi:

A) La prima include sostanze organiche e inorganiche, le quali allo stato liquido si debbono riguardare come dispersioni di particelle con diametri medi compresi fra 0,1 μ e 0,001 μ (secondo un'altra definizione i granuli e le micelle sarebbero costituite con un numero di atomi compreso fra 10^9 e 10^3), dimensioni che nel linguaggio comune si chiamano *ultramicroscopiche*. All'atto della coagulazione queste particelle si aggregano formando degli ammassi spugnosi comprendenti vacuoli ripieni di liquido: ma se il coagulo è tixotropico bisogna ammettere che le forze attrattive agenti fra le particelle e gli ioni coagulanti sieno così deboli da concedere (almeno

(7) « Koll. Zeit. », XXXII e XXXIII, anno 1923.

(8) Vedere nelle annate successive del « Koll. Zeitschrift ».

(9) Vedere ad esempio, in: P. RONDONI, *Biochimica*, V edizione, p. 1338; LIESEGANG and LICHTWITZ, *Dottrina medica dei colloidi*, p. 98 e sg. Colgo l'occasione per ringraziare la dott.ssa Natalia Prada che ha effettuato le ricerche bibliografiche nel campo biologico.

(10) P. DUCLAUX, *Tixotropie* ecc., « Actualités Scientifiques et techniques ». Hermann. Il Duclaux indica come si deve operare per ottenere i precipitati di Carbonato e di solfato di Calcio dotati di tixotropia.

per un certo tempo) scorrimenti con conseguente disgregazione degli ammassi per effetto di pur leggere azioni meccaniche, in modo che il liquido incluso nei vacuoli possa venir liberato e l'agitazione termica delle sue molecole faccia riacquistare temporaneamente ai granuli o alle micelle il moto Browniano. Dopo di che, se si lascia il sistema in riposo, le forze agenti (elettriche e di massa) fanno ricostituire i coaguli, i quali sono sovente suscettibili di ripetute analoghe trasformazioni.

La labilità delle forze agenti fra le particelle formanti gli ammassi differenzia quindi i colloidi tixotropici dai non tixotropici, da quelli cioè che una volta coagulati più non riprendono lo stato primitivo per effetto di azioni meccaniche del tipo sopraindicato.

B) Una seconda classe comprende i sistemi che nello stato scorrevole (liquido) sono costituiti da fitte dispersioni in mezzi liquidi di minutissime particelle (amorfe o cristalline aventi dimensioni microscopiche) singolarmente rivestite con sostanze di tipo colloidale generalmente organiche. Tali sono le particelle delle sopracitate *sabbie mobili*, nel qual caso le sostanze colloidali provengono da dilavamento del terreno. In causa delle forze agenti fra le particelle vicine, queste tendono, in tempi più o meno brevi, ad aggregarsi (talvolta ad agglutinarsi per effetto dei suddetti rivestimenti) formando ammassi con apparenza solida i quali racchiudono nella impalcatura gran parte del liquido già disperdente, ma in modo che forze esterne anche deboli possano produrre la disgregazione degli ammassi liberando il liquido occluso con la qual cosa il sistema riassume temporaneamente lo stato scorrevole.

C) La terza classe è ben rappresentata dai finissimi precipitati di carbonato e di solfato di calcio citati da P. Duclaux, le cui particelle (microscopiche) non appaiono rivestite da sostanze colloidali, ma soltanto da veli di liquido adsorbito. La figura 1 ben rappresenta questo fatto, benchè si riferisca a un sistema d'altra natura (amalgama di Zinco tixotropica in via di rapprendersi). Anche in questo caso le forze agenti causano poco a poco la formazione di ammassi con apparenza solida, i quali, nel caso di tixotropia, possono venir disgregati mediante leggere azioni meccaniche riacquistando scorrevolezza comparabile con la primitiva. Ma in parecchi casi il prodotto della trasformazione rassomiglia a un fango assai denso.

3. In tutti i tre casi i sistemi apparentemente solidi, ma tixotropici, differiscono dai solidi non tixotropici dotati di una certa scorrevolezza (cera ecc.) in quanto sempre racchiudono nel loro seno notevoli quantità di liquido, il quale in taluni casi (come vedremo in molte amalgame) tende a separarsi spontaneamente ma molto lentamente da una impalcatura solida. Ciò avviene quando la densità del liquido è assai superiore a quella delle particelle, mentre in altri casi bisogna spremerlo o evaporarlo. Il solido così residuato è talvolta capace, di riassorbire il liquido già disperdente, riformando sistemi capaci di trasformazioni tixotropiche.

4. Oltre ai fenomeni presentati da queste schematiche classi di sistemi tixotropici ho avuto campo di osservare trasformazioni da uno stato apparentemente solido in uno stato apparentemente liquido e viceversa che non si debbono confondere con le sopradescritte. Questi sistemi se versati in un recipiente (ad esempio in tubi di saggio) assumono infatti, dopo tempi più o meno brevi, apparenza solida, ma se premendo sulla superficie libera con una bacchetta si rompe la crosta superficiale, risulta che essa nasconde un liquido sottostante, il quale mediante energico rimescolamento con i frammenti della crosta riforma un liquido apparentemente omogeneo. Questo, se lasciato in riposo. torna a riformare la crosta superficiale, che concede di ripetere molte e molte volte le trasformazioni.

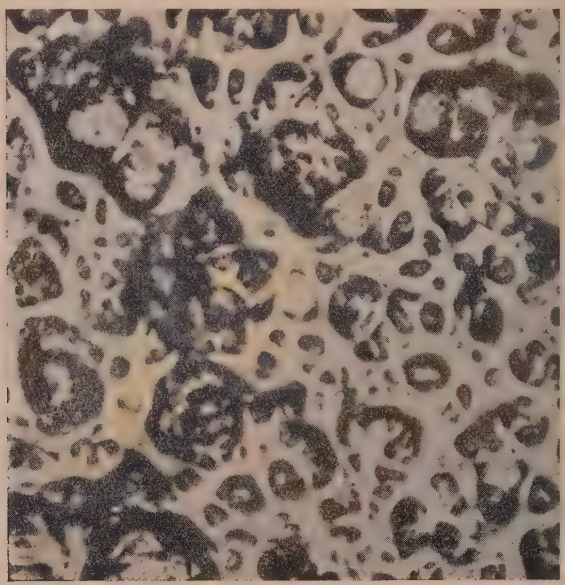


Fig. 1.

A questi sistemi propongo di attribuire la qualifica di *pseudotixotropici*.

5. In ogni caso i sistemi capaci di tixotropia sono quindi polifasi. Ma se si volesse applicare la legge dell'equilibrio eterogeneo quale è normalmente espressa (legge delle fasi) sono prevedibili gravi discordanze, non fosse altro perchè fra le minutissime particelle costituenti questi sistemi e il liquido in cui sono disperse, oppure il liquido incluso nei vacuoli o nelle numerosissime cellette delle impalcature solide, certamente si esercitano con particolare intensità forze di natura elettrocapillare.

La ipotesi fondamentale che è necessario ammettere per dedurre la regola delle fasi è che le forze di tal natura sieno di intensità trascurabile.

Si ammette infatti che il potenziale termodinamico interno del sistema (comprendente m fasi) si possa esprimere con la forma:

$$\Phi = M_1 \varphi_1 + M_2 \varphi_2 + \cdots$$

ove, M_1, M_2, indicano le masse delle singole fasi e $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ i potenziali termodinamici per unità di massa ad esse corrispondenti, i quali si debbono riguardare come funzioni soltanto delle pressioni, della temperatura e delle concentrazioni dei singoli componenti. Poichè nei sistemi tixotropici dispersi la grandezza complessiva della superficie di contatto fra le diverse fasi è numericamente enorme rispetto alla massa totale, e certamente agiscono anche forze elettriche, si dovrebbe tener conto oltre delle usuali $n + 2$ variabili (numero dei componenti indipendenti oltre alla temperatura e alla pressione) di altre variabili in numero generalmente non ben determinabile. Con la qual cosa si arriverebbe a leggi di equilibrio aventi espressione ben differente da quella normalmente indicata come regola delle fasi [11]. Nè si deve dimenticare che in sistemi di tal natura hanno particolarmente importanza stati di falso equilibrio del tipo considerato da Pierre Duhem nei suoi studi termodinamici [12]. Inoltre non si deve dimenticare che per lo studio teorico delle trasformazioni tixotropiche non è possibile applicare, senz'altro, le considerazioni che si deducono dal 2° principio di termodinamica poichè se tali trasformazioni appaiono fisicamente invertibili, esse si debbono considerare come *irreversibili* dal punto di vista termodinamico, poichè i loro cammini (diretto e inverso) non possono venir modificati in modo da renderli man mano vicinissimi (al limite coincidenti) con un cammino ideale costituito da una successione infinita di stati di equilibrio [13]. Quindi ad esse certamente non è applicabile l'equazione di Clausius nè le equazioni di Gibbs e di Helmholtz che ne derivano.

6. Le proprietà tixotropiche possono durare in alcuni sistemi tempi molto brevi e in altri lunghissimi ed esser svelabili anche dopo secoli di riposo come avviene in certi sistemi minerali (esempio alcune bentoniti). Esse possono però sparire definitivamente con l'essicamento.

Aggiungo che il fenomeno della tixotropia, in quanto dipende dall'esistenza di forze agenti fra particelle in un mezzo viscoso, è intimamente collegato con la singolare proprietà di alcuni sistemi dispersi in mezzi liquidi, per cui la viscosità in taluni aumenta e in altri diminuisce al crescere della velocità con cui si fanno fluire entro a tubi.

(11) « Questa osservazione da me venne, testualmente, fatta più di quarantà anni or sono (« Nuovo Cimento », anni 1905 e 1906) per dimostrare le cause delle invalidità della legge delle fasi per i sistemi colloidali, che chimici e biologi dell'epoca tentavano di applicare a sistemi di tipo colloidale.

(12) Vedere nelle opere di PIERRE DUHEM e in particolare in *Théorie Thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*. Paris, Hermann, 1896.

(13) Vedere nel trattato: *Thermodynamique et Chimie* di PIERRE DUHEM.

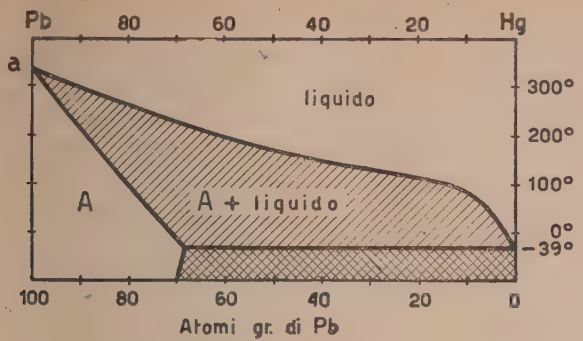
Chimica (Chimica-fisica). — *La tixotropia delle amalgame.* Nota II (*) del Corrisp. O. Scarpa.

7. Le ricerche su speciali pile contenenti mercurio che, secondo notizie della stampa estera vennero impiegate nella recente guerra, mi hanno condotto a esaminare il comportamento elettromotore di alcune amalgame di cui a suo tempo darò particolare relazione. In quella occasione ho avuto campo di osservare che alcune amalgame sono suscettibili di trasformazioni da uno stato apparentemente liquido (assai scorrevole) in uno stato apparentemente solido (talvolta più o meno plastico) e nelle trasformazioni inverse le quali hanno però caratteristiche fondamentalmente differenti da quelle dei comuni sistemi plastici (cera, pece ecc.). Questi ultimi si debbono infatti considerare, secondo Tamman, come veri liquidi omogenei allo stato di sopraffusione, dotati di grandissima viscosità. Le trasformazioni da solido rigido a solido pastoso o a liquido, che ho osservato in alcune amalgame, mi apparvero invece simili per molti riguardi alle tixotropiche o alle pseudotixotropiche. Esiste però rispetto ai sistemi tixotropici tipici una differenza fondamentale poichè dalle amalgame pastose si può spremere un liquido (che erroneamente viene creduto mercurio mentre è una soluzione liquida più o meno diluita del metallo amalgamato) il quale possiede proprietà elettroniche di tipo metallico e quindi differisce fondamentalmente dagli elettroliti che riempiono i vacuoli e le cellette dell'impalcatura dei solidi tixotropici tipici.

Per lo studio dei fenomeni tixotropici e pseudotixotropici nelle amalgame è necessario distinguerle in base ai diagrammi di stato che ad esse competono.

Per semplificare l'esposizione mi riferisco anzitutto alle amalgame binarie di piombo, il cui diagramma di stato (fig. 2) indica che se si fanno raffreddare fino alla temperatura ambiente (18° C) amalgame di piombo con tenori inferiori a 73 atomi grammo di Piombo per 100 totali debbono separarsi soluzioni solide molto ricche in Piombo insieme a un liquido che nelle condizioni finali di temperatura deve avere tenore in mercurio dell'ordine di 3 atomi grammo di Pb per 100 totali, cioè circa 3,2 gr. di Piombo per 100 di mercurio. Sperimentando con nove amalgame al 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 %, in Piombo raffreddate fino alla temperatura di 16°, ho trovato che con tenori inferiori al 60 per cento in Piombo si ottengono sistemi parzialmente solidi e parzialmente liquidi. Ma anche quando la quantità di liquido è molto scarso (come nelle amalgame più ricche in Piombo) sbattendo energicamente questi sistemi essi si trasformano in liquidi apparentemente omogenei (soltanto in alcuni casi si osserva la formazione di una piccola quantità di polverino grigio,

(*) Presentata nella seduta del 10 aprile 1948.



a = 326°9 (temp. di fusione del Pb)

A = Soluzione solida di Hg nel Pb

Fig. 2.

probabilmente costituito da cristallini di piombo ossidato che galleggia sul liquido). Questi sistemi, apparentemente omogenei, se lasciati in riposo rigenerano il primitivo sistema solido–liquido. Trattasi quindi di vera tixotropia.

Le amalgame al 70 % di Piombo che in base al diagramma di stato dovrebbero a 16° essere ancora bifasi, appaiono invece (anche dopo energico sbattimento) solidi pastosi non certo assimilabili a liquidi. Ai tenori 80 %

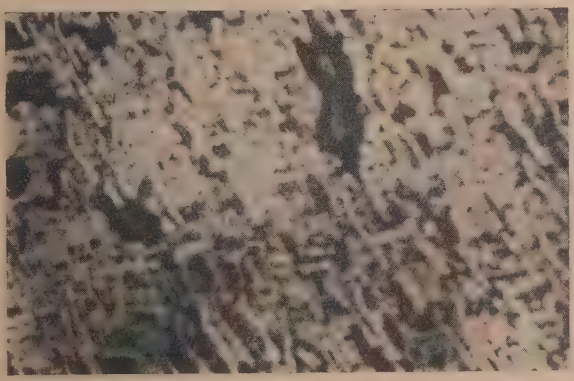


Fig. 3.

e 90 % questi sistemi pseudosolidi dànno con energico sbattimento grossi grumi solidi. A queste concentrazioni non si può quindi dire di avere tixotropia.

La fig. 3 mostra la immagine microscopica (senza intacco con ingrandimento 35 diametri) della fase solida di una amalgama di Piombo al 40 %. Da essa appare (malgrado l'imperfezione micrografica dovuta alla impossibilità di spianare il preparato e quindi di poter mettere tutte le parti in

fuoco) quale è la costituzione fisica della impalcatura, nonchè il liquido ancor incluso nei vacuoli esistenti fra i microcristalli della impalcatura.

Non molto differenti sono i fenomeni che si osservano nelle amalgame di zinco e in parecchie altre da me esaminate ad esempio in quelle di Nichelio. Nel caso delle amalgame di Zinco (diagramma di fig. 4) due sono le soluzioni solide da considerare e cioè quelle corrispondenti alle forme allotropiche α e β dello Zinco. Esiste inoltre un eutettico avente tenore superiore al 95 % in mercurio. La micrografia di figura 1 dà un'idea della costituzione della impalcatura solida di queste amalgame quando posseggono uno stato pastoso. Nelle amalgame di Zinco poco concentrate con tenore di Zinco assai superiore a quello dell'eutettico ho osservato che se si preparano mescolando a caldo,

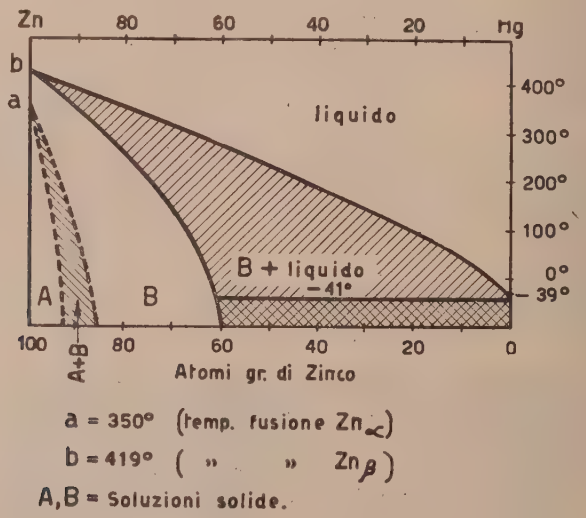


Fig. 4.

ritagli di Zinco con del mercurio in modo da ottenere una concentrazione discretamente superiore a 6 atomi di Zinco per 100 di mercurio, e l'amalgama liquida omogenea si versa ancor calda, entro a un tubo da saggio essa assume, alla temperatura ordinaria, apparenza solida. Ma se la sua superficie libera viene premuta con una bacchetta di vetro questa sprofonda e agitando si ottiene un liquido apparentemente omogeneo che riprende la apparenza di solido dopo lasciato alcun tempo in riposo. Esaminando il sistema apparentemente solido contenuto nel tubo da saggio, ho trovato che è costituito da una crosta rigida sotto alla quale trovasi una grande quantità di liquido che è trattenuto dalla crosta entro al recipiente, mascherando la vera costituzione fisica del sistema. È in questo liquido che apparentemente si ridisciolgono, per effetto della frammentazione meccanica della crosta e del rimescolamento meccanico, i cristalli onde la crosta è costituita. Può però sorgere il dubbio che il sistema scorrevole ottenuto per effetto dei rimescolamenti sia una soluzione liquida soprasatura di Zinco nel mercurio.

Per dirimere la questione ho riesaminato le particolarità dei fenomeni da me osservati parecchi anni or sono [14] operando con pile di concentrazione interamente metalliche costituite con amalgame di Zinco diversamente concentrate.

Costituendo delle pile di concentrazione con amalgame aventi concentrazioni medie comprese fra 2 e 16 atomi grammo di Zinco per 100 totali, poste in diretto contatto con del mercurio puro, usando come elettrodi due fili di platino (fig. 5) che attraverso un sensibilissimo galvanometro formano insieme con l'amalgama e con il mercurio, con essa in diretto contatto, un circuito interamente metallico mantenuto, in una camera termostatica, a temperatura rigorosamente costante e uniforme (+ 19° C), ho misurato, fra i due fili di Platino, le forze elettromotrici i cui valori sono riportati nel diagramma di figura 6. Questo diagramma presenta un primo tratto corrispondente alle concentrazioni comprese fra 0 e 5,7 atomigrammo di Zinco per 100 totali nel quale la f. e. m. delle pile cresce regolarmente da 0 al valore che raggiunge quando l'amalgana (liquida) ha la concentrazione di saturazione rispetto alla soluzione solida con essa in equilibrio alla temperatura di 19°. Da questo punto in poi il valore della forza elettromotrice rimane costante al crescere del tenore (medio) in Zinco (tratto orizzontale del diagramma).

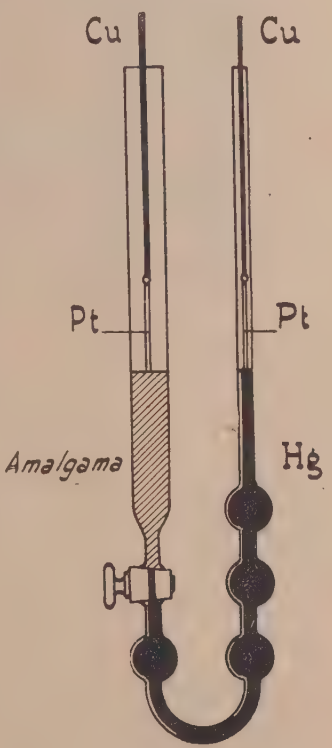


Fig. 5.

Questo fatto indica che essendo le forze elettromotrici di tali pile essenzialmente determinate dal valore della concentrazione in Zinco [15] nell'amalgama liquida in contatto con il mercurio, poichè questo tenore rimane costante mentre cresce il tenore MEDIO in Zinco, deve rimanere costante il valore della forza elettromotrice. Se la fase liquida fosse soprasatura, la forza elettromotrice dovrebbe invece crescere come indica il tratto di punteggiata segnato sul diagramma.

E poichè la concentrazione di 5,7 atomi grammo di Zinco per 100 totali è, a + 19° C, la concentrazione della fase liquida in equilibrio con la solida,

(14) Vedi in: « Atti del R. Istituto Lombardo di Scienze », anno 1929; « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », anno 1929; « Zeit. Phys. Chem. », anno 1931; « Le Journal de Physique et le Radium », anno 1934, ecc.

(15) Per la teoria vedere nella Nota citata (« Journal de Physique » anno 1934) e nella Memoria: *Pile metalliche isotermiche* letta alla Riunione Internazionale di Chimica-fisica. Parigi 1934 (Hermann e C. Editori).

la fase apparentemente omogenea delle amalgame liquide da me sperimentate aventi tenori MEDI in Zinco maggiori di 5,7 atomi gr. di Zinco per 100 totali, deve consistere di sospensioni di particelle solide (non discernibili otticamente) della soluzione solida possedente la concentrazione di equilibrio a 19° con la soluzione liquida avente il tenore di 5,7 atomigrammi di Zinco su 100 totali. Queste sospensioni comprendono quindi (in un determinato volume) allo stato di dispersione, quantità della suddetta soluzione solida crescenti al crescere del tenore medio. Ne segue che la fase che si deve considerare come un vero liquido omogeneo è costituita dalla soluzione liquida satura

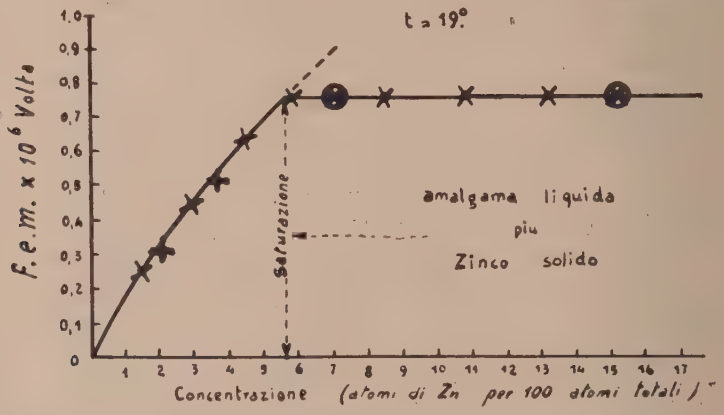


Fig. 6.

alla temperatura dell'esperimento e non da soluzioni soprasature. La figura 7 mostra la micrografia di una amalgama di Zinco bifase nel periodo in cui la fase liquida è in via di separazione dalla solida, formando dei grossi nuclei di liquido, mentre esso esiste ancora, in parte, allo stato di goccie microscopiche racchiuse nella impalcatura solida.

8. Avendo esaminato le amalgame di Zinco e di Cadmio già da me sperimentate circa venti anni or sono, conservate entro a vasi chiusi nella camera termostatica del laboratorio, ho trovato che quelle con concentrazione maggiore all'equilibrio, si sono scisse nel frattempo formando grovigli cristallini galleggianti su un'amalgama liquida. Ma nemmeno con energico sbattimento, durato parecchie ore, è stato ora possibile ricostituire un sistema apparentemente omogeneo sebbene i grovigli solidi si siano rotti formando finissime polveri, talmente fini da originare una nebbia (un' *aerosol*) nella regione superiore del barattolo. Queste polveri sembrano costituite da minutissimi cristallini più o meno ossidati superficialmente, il che indica che condizione necessaria per ottenere il sistema disperso apparentemente omogeneo è che la costituzione chimica e quindi la tensione superficiale fra le due fasi abbia determinati valori.

9. Nella amalgame di rame, per quanto risulta da ricerche chimiche analitiche (ma non dal diagramma di stato che tutt'ora non è stato possi-

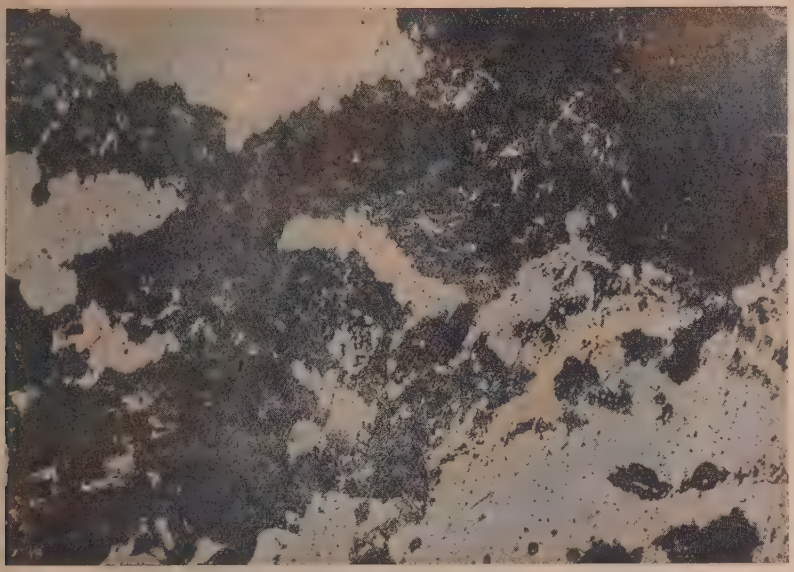


Fig. 7.

bile di ricavare mediante l'analisi termica), si deve ammettere l'esistenza di più composti intermetallici. Per ottenere la trasformazione, dallo stato solido rigido in pastoso, con azioni meccaniche, è in esse sovente necessario un preventivo riscaldamento al quale consegue la parziale decomposizione di tali composti, fatto che è mostrato dalla comparsa, durante il riscaldamento, di minutissime goccie di amalgama liquida alla superficie del solido. In questo liquido mediante successiva energica compressione e macinazione in un mortaio, si possono disperdere le particelle provenienti dalla frammentazione della impalcatura solida, formando sistemi pastosi più o meno fluidi. Spremendoli si ottiene un liquido che deve venir considerato come una soluzione diluita di rame nel mercurio e un solido pastoso che poi indurisce e non è più suscettibile di trasformazione inversa ove non venga portato a fusione.

L'apparenza microscopica di queste amalgame quando sono allo stato pastoso è simile a quella dei coaguli di colloidi inorganici (del ferro Bravais ecc.). Essa è mostrata dalla figura 8.

Fenomeni non molto differenti, nelle linee generali, avvengono nelle amalgame ternarie: Mercurio–Argento–Stagno e nelle quaternarie: Mercurio–Argento–Stagno–Rame con piccolo tenore in rame, le quali allo stato solido contengono composti intermetallici e soluzioni solide circondati da eutettici. Altri fenomeni del genere si osservano in amalgame d'oro, nonchè nelle amalgame di Nichelio. Ricordo che (fatto già osservato da Moissan) le amalgame di Nichelio, si decompongono rapidamente all'aria umida con formazione di ossidi di Nichelio.

10. Una differenza sostanziale fra i sistemi tixotropici tipici e le amalgame tixotropiche sta nel carattere metallico che queste posseggono, per effetto del quale non è possibile stabilire se le particelle sospese posseggono cariche elettriche libere come avviene nei sistemi colloidali nei quali il liquido disperdente è un elettrolita. Nè è possibile rivelare l'esistenza di tali particelle mediante l'ultramicroscopia.

Ricordo tuttavia che in alcune leghe metalliche solide (ad esempio nelle leghe rame–zinco) esistono delle fasi apparentemente omogenee che si ritengono costituite da dispersioni di fasi eterogenee dal mezzo (esempio il β apparente nelle leghe rame–zinco) alle quali, estendendo arbitrariamente una locuzione ben definita nel campo chimico–fisico, è stato dato dai metal-

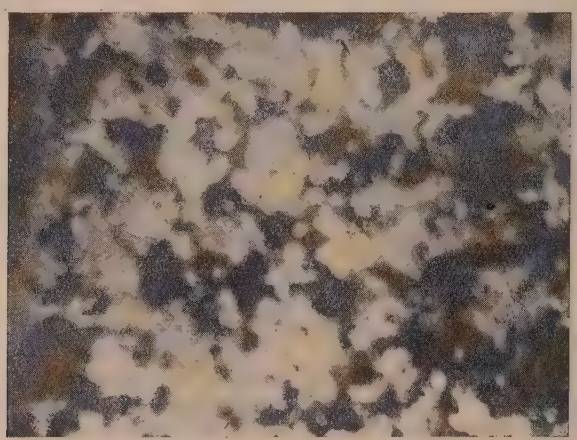


Fig. 8.

lurgici il nome di soluzioni solide colloidali, in quanto non sono microscopicamente distinguibili le particelle delle fasi presenti.

D'altra parte sono note sospensioni di particelle solide, aventi proprietà elettroniche di tipo metallico, in metalli liquidi. Sono note ad esempio le sospensioni di grafite in speciali ghise allo stato fuso. È quindi a queste dispersioni che sarebbero da comparare quelle dei cristallini di metallo puro, di composti intermetallici o di soluzioni solide metalliche nelle sopracitate amalgame liquide apparentemente omogenee ma che in base allo studio dei diagrammi di stato si debbano considerare polifasi.

Conclusioni.

1° Nei precedenti paragrafi ho esposto un modello chimico–fisico dei sistemi capaci di dar luogo a trasformazioni tixotropiche, che ben rappresenta le cause e l'andamento di tali fenomeni.

2° Ho mostrato che mediante azioni meccaniche (compressioni, sbattimenti, macinazione ecc.) si possono far avvenire in parecchie amalgame

trasformazioni per effetto delle quali esse passano da stati che si possono qualificare rigidi a stati pastosi (plastici) o a fluidi scorrevoli. La loro considerazione ha concesso di meglio illustrare il modello fisico di cui al numero 1.

3° Le amalgame apparentemente omogenee simili a liquidi ma possedenti una concentrazione superiore a quella di saturazione, non si possono considerare soluzioni soprasature del metallo amalgamato nel mercurio. Esse debbono invece essere considerate come costituite da sospensioni di cristalli microscopici o ultramicroscopici del metallo amalgamato, oppure di cristallini di soluzioni solide, oppure di cristallini di composti intermetallici, entro un mezzo liquido costituito dalla soluzione satura in equilibrio (alla temperatura dell'osservazione) con la fase e le fasi solide presenti.

4° Le trasformazioni di amalgame solide (rigide) in pastose richiedono talvolta un preventivo riscaldamento il quale dà luogo a decomposizione dei composti intermetallici, o delle soluzioni solide, onde il solido è costituito, generando così la fase liquida necessaria per ottenere un sistema plastico apparentemente omogeneo, dal quale si può spremere la fase liquida interposta fra i cristallini ottenendo un sistema ancora plastico ma capace di rapido e forte indurimento.

5° Ho mostrato come si possono ottenere con alcune amalgame sistemi con apparenza solida, ma effettivamente costituiti da un liquido avente volume macroscopico racchiuso entro a macroscopiche croste solide, rompendo e frammentando le quali si possono produrre sistemi apparentemente omogenei e molto scorrevoli, che sono costituiti da sospensioni dei minuti cristalli provenienti dalla frammentazione delle croste solide nel liquido sopradetto. Questi sistemi hanno apparentemente proprietà tixotropiche pur differendo sostanzialmente dai sistemi tipicamente tixotropici. Propongo quindi di indicarli come *pseudotixotropici*.

Geologia. — *Sopra una nuova teoria sull'interno terrestre.* Nota (*) del Socio F. Sacco.

È noto che, riguardo all'interno terrestre, dopo la vecchia idea del fuoco centrale, i geofisici moderni, basandosi sulla legge generale della gravitazione e su varî dati, specialmente sismologici (propagazione delle onde sismiche indicanti superficie di discontinuità o salto di densità verso i 2900 Km circa di profondità) sono generalmente concordi nell'idea del Wichert (1897) che i materiali del globo terrestre siansi disposti, in complesso, nell'ordine concentrico del loro rispettivo peso specifico, per l'assieme in tre principali zone, cioè (vedi figura, lato sinistro) sotto l'*Atmosfera*:

la *Litosfera* o Crosta di Silicati d'Alluminio (Sial);

la Zona intermedia di Ossidi e Solfuri e di Silicati di Magnesio (Sima);

(*) Presentata nella seduta del 13 marzo 1948.

la *Barisfera* o nucleo metallico, specialmente di Ferro e Nichelio (Nife); però con molte varianti secondo gli autori, riguardo al numero di queste zone o involucri (suddivisi da alcuni), la loro composizione chimica, il loro stato fisico, il loro spessore, ecc., ciò che non è il caso di qui esaminare, trovandosi generalmente nei trattati di Geologia e di Geofisica.

Ma ecco che i professori W. Kuhn e A. Rittmann di Basilea, emisero e svolsero nella « Geolog. Rundschau », B. XXXII, H 3, 1941, col titolo: *Der Erdkern und die Physikalische Verbindung zur oberflache – Ueber den zustand des Erdinnern und seine Entstehung aus einem homogenen Urzustand*, una ben diversa teoria sopra l'interno terrestre che si troverebbe ancora in uno stato primitivo indifferenziato della massa solare; teoria che fu recentemente riesposta e commentata da Felice Ippolito nell'articolo sopra *La nuova teoria di Kuhn e Rittmann sull'interno terrestre.* (Rivista « L'Universo », anno XXVII, 1947).

Orbene la principale divergenza tra questa nuova teoria e quella generalmente prima ammessa sta appunto nella formazione nucleare del globo terrestre che, secondo Kuhn e Rittmann, ne costituirebbe la maggior parte e sarebbe il materiale solare originario rimasto quasi imprigionato, separato dall'esterno per via dei gusci periferici (atmosferico, litoide e magmico) in modo che non avrebbe potuto differenziarsi nei soli tre miliardi di anni da che esso rimase isolato, restando così tuttora uniforme indifferenziato. (Vedi figura, lato destro).

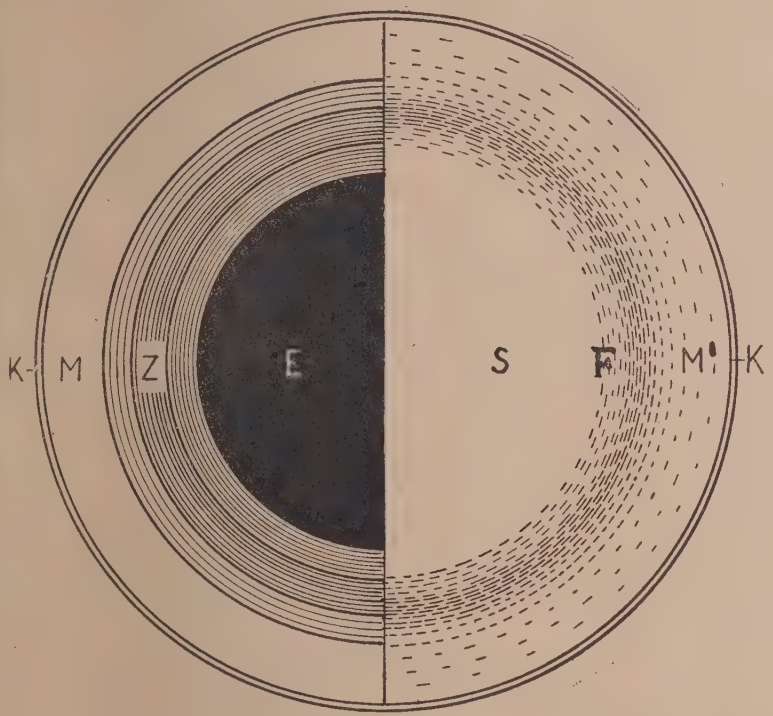
Ma contro questa idea si possono fare alcune considerazioni di ordine gravitazionale, sismico, ecc. Intanto il supposto limite di tre miliardi d'anni non pare accettabile, perchè, se l'inizio della vita organica sulla Terra può farsi risalire a circa due miliardi d'anni, ed occorse forse più di un miliardo d'anni per la formazione della primitiva Scoriosfera e dell'Idrosfera, prima della costituzione di queste dovettero trascorrere molti miliardi d'anni durante i quali il materiale solare originario avrebbe avuto tutto il tempo di differenziarsi e di addensarsi partendo dal suo primitivo stato gazoso generale.

Notisi intanto che, se la massa che formò poi la Terra si staccò da quella solare, come generalmente si ritiene, tale stacco dovette verificarsi dalla parte esterna del Sole la quale doveva certamente essere gazosa e di minima densità come è tuttora e quindi, se si fosse conservata indifferenziata non avrebbe potuto presentare la forte densità che invece presenta l'intero globo terrestre, come è provato dal suo complessivo peso specifico, di circa 5, 6.

Ma è qui opportuno di fare una considerazione di carattere pregiudiziale; cioè: sappiamo noi come si è staccata la materia geica da quella solare? La risposta a tale domanda si collega naturalmente alla conoscenza dell'origine del sistema solare planetario.

A tale riguardo sappiamo che due sono le teorie principali oggi prevalenti, cioè: 1°) quella nebulare a tipo endogeno, come quella ben nota di Kant-Laplace (prima generalmente ritenuta giusta ed ora quasi abbandonata) per cui la massa terrestre (come quella degli altri Pianeti) si sarebbe staccata, pe forza centrifuga, da quella solare rapidissimamente rotante;

oppure: 2°) quella a tipo esogeno (di See, Chamberlin e Moulton, Belot, Jeans, Jeffreyes, Moreux, ecc.), detta mareale, dualistica o dei due corpi, perchè suppone che un grande corpo astrale sia passato tanto vicino al corpo solare da sollevarne, per attrazione a tipo mareale, qualche parte che ne venne separata, individualizzandosi poi a costituire la massa terrestre, come, analogamente, quella degli altri pianeti.



Sezione della Terra secondo:

(*a sinistra*)

le teorie di Wiechert, ecc.

- K – Crosta terrestre solida (*Litosfera*) (specialmente *Sial*).
- M – Mantello silicato (magmico) (specialmente *Sima*).
- Z – Zona intermedia.
- E – Nucleo metallico (specialmente ferro) (*Barisfera*) (specialmente *Nife*).

(*a destra*)

la teoria nuova di Kuhn e Rittmann

- K – Crosta terrestre (*Litosfera*).
- M' – Zona magmatica di Silicati misti. Verso l'alto magma alcalino-basaltico, parzialmente degassato; verso il basso passante gradualmente in un magma picrit-basaltico meno degassato e poi in un magma olivinico ancora meno degassato.
- F – Zona di magma olivinico con eccesso di ferro, non degassato, anzi ricco di idrogeno.
- S – Materia solare non differenziata e non degassata.

In entrambi i metodi adottati in dette teorie la massa di materia solare staccatasi a formare la Terra sarebbe stata gazosa, leggera, tenue, nè presenterebbe quella densità che dovrebbe avere la materia solare rimasta indifferenziata imprigionata nel globo terrestre, come è immaginato da Kuhn e Rittmann.

Ma sull'origine del Sistema planetario vi è ora un terzo tipo di teoria che si può denominare della *Novae* (Sacco 1940), che ho già indicato esponendo alcune *Considerazioni cosmogoniche sull'origine dei sistemi stellari* (« Riv. Urania », XVIII–1940) e che poi svolsi nella Nota speciale sopra *L'origine del Sistema solare* (« Atti Acc. Sc. Torino », vol. 79, 1944). Secondo tale teoria il nostro sistema planetario, ed altri simili, si sarebbe originato dalle Stelle *Novae*; cioè durante l'evoluzione delle Stelle, quando esse sono ancora tenuissime, giganti, e raggiungono un'altissima temperatura (di 40.000 –50.000 gradi ed anche più), come specialmente nella fase argoniana, possono esplodere, per reazioni intratomiche nucleari, originando una Stella *Nova*, di vita più o meno lunga; questa *Nova*, specialmente se trattasi di una *Supernova*, può diventare talora quasi stabile, una così detta *Nebulosa anulare*, quasi permanente; cioè una Stella circondata da fascie o anelli nebulosici, generalmente due, di cui l'esterno è di materiale gazoso, tenuissimo, e l'interno di materiale più denso, ma pur sempre dapprima gazoso oppure meteoritico (come l'anello di Saturno).

Ad ogni modo detta gigantesca esplosione della *Novae* deve aver trasformato l'originaria materia nebulosica in stato ionico o elettronico od atomico, che poi solo lentamente potè condensarsi in una o più masse globulari che diventarono pianeti, sia di tipo *jovico* nell'anello esterno, sia di tipo *geico* nell'anello interno, dove i pianeti poi si incrostarono con una scoriosfera.

Ma anche secondo quest'ultima teoria della *Novae* la materia cosmica solare dovette conservarsi, ancor più che secondo le due teorie precedenti, per un tempo lunghissimo (molti miliardi d'anni) in uno stato primitivo, leggero, tenuissimo, gazoso e tale da avere tutto il tempo necessario per differenziarsi, condensarsi e distribuirsi gravitazionalmente nella massa geica prima di venire racchiusa, imprigionata per così dire, dalla Litosfera.

Concludendo, la primitiva nebulosa sferoidale geica gaziforme, a densità tenue ma quasi uniforme, comunque originata dalla massa solare, è presumibile che abbia potuto gradatamente e lentissimamente condensarsi attraverso molti miliardi di anni, mentre andavano accentrandosi i suoi elementi più pesanti (così la massima parte del ferro, giungendosi verso il centro alla densità di 9–10 (*Barisfera*), mentre verso l'alto si andavano riunendo gli elementi più leggeri, i quali poi, per ossigenazione di elementi metallici, ecc., originarono composti svariati; specialmente Ossidi, Solfuri, Silicati, ecc. [1].

(1) F. Sacco, *Evoluzione cosmica*. (« Atti Acc. Sc. Torino », vol. 79, 1944).

Giacchè, assieme coll'abbassamento della temperatura periferica, si andò costituendo dal magma superiore, relativamente meno denso (2–3), essenzialmente sialico, la *Scoriosfera*, dapprima bucherelleta dalla fuoriuscita dei gas del grandioso ribollimento, come vediamo tuttora ben conservato nei circhi e crateri della superficie lunare [2] dove mancarono gli agenti esogeni (atmosfera ed acqua) che invece agirono in seguito sulla superficie terrestre, alterando, trasportando e deponendo il materiale roccioso primitivo in modo da formare la *Stratosfera*.

Geologia. — *Sulla tettonica del Promontorio Circeo e sulla influenza della gravità nella orogenesi*. Nota [*] del Socio G. ROVERETO.

Nelle trattazioni geologiche sono necessarie di tanto in tanto delle messe a punto: rifare l'osservazione sul terreno, che è tutto, rinnovare le deduzioni, che è cosa secondaria. Così è, ad esempio, della interpretazione tettonica da darsi all'ammasso di M. Circeo. Erano vent'anni che Viola e Di Stefano lo avevano spiegato, invocando delle paraclasi perimetrali, quand'io riconobbi che si trattava di una facoide di terreni liassici, carreggiata sul miocene o sull'oligocene che sia. Questo divario era solo dovuto al fatto che nel frattempo si era accertata la teoria delle falde di ricoprimento. Ora sono altri ventitre anni che ho detto tutto ciò, ed è naturale che un giovane abbia cercato di riconoscere se io ero nel vero e, dopo aver rifatto il lavoro di rilevamento, ha assicurato, in uno scritto recentissimo, di poter esporre *una terza soluzione*, che a me sembra però una diligente analisi costruttiva delle condizioni strutturali, ma non una nuova sintesi.

Sicchè, se debbo modificare le mie conclusioni dopo ventitre anni, non lo faccio partendo dai dati del Maxia, ma solo cercando di non essere in contraddizione con questi.

È necessario aver presente ciò che ora si va riconoscendo rispetto all'influenza delle azioni dovute alla gravità, le quali sono intervenute, più di quanto finora si è ammesso, nella formazione delle montagne.

Movimenti dipendenti dalla gravità si sono verificati, in corrispondenza dell'area italiana, in più tempi, ma soprattutto durante il luteziano e il cattiano–miocene, permessi sempre, suppongo, da una fossa tirrenica, allungata in direzione meridiana, e rimasta profonda, anche dopo che erano avvenute, come si può apprendere dal mio lavoro *Liguria Geologica*, la traslazione della falda del Gran San Bernardo, e le estrusioni e il viaggio in falda del Massiccio Ligure delle *pietre verdi*, in allora unito direttamente con la Corsica.

In questa fossa, dopo un primo viaggio, scivolava la falda ligure–toscana delle ofioliti appenniniche, e la colmava. Veniva così la serie ofiolitifera titonico–cretacea ad urtare contro una falesia costituita dalle pietre verdi liassiche, e ben evidente in Liguria come in Corsica.

(2) F. SACCO, *Essai schématique de Sélénologie*. Torino 1907.

(*) Presentata nella seduta del 10 aprile 1948.

La stessa traslazione oggi si ripeterebbe, ad esempio, se la fossa fra Macassar e Nagasaki, le cui pendici sono attualmente inclinate di una diecina di gradi, sino all'enorme profondità di 10,793 m. (secondo Maurer), subissero un movimento tangenziale, che portasse tale pendenza al punto critico dello scivolamento, ossia a 16–17°: quindi, un corrugamento di una geomonoclinale per spinta laterale prima, una traslazione per gravità di poi, come sin dal 1924 ho supposto nel mio « Trattato ». Si aggiunga che in corrispondenza di questi e di altri fossati oceanici si hanno forti anomalie positive della gravità, che nel Mare di Banda, ad esempio, ad est delle Celebes, oltrepassano di parecchio + 100 mgal.; non è quindi in questo caso questione, come osserva il Lejay, di sollevamento del fondo, ma di affondamenti recenti, forse ancora in azione: questi affondamenti finiranno col determinare degli spostamenti laterali.

Quattordici anni dopo, del 1938, il Lugeon, riferendosi anche all'opera di Schneegans, Gignoux, Moret, affermava che la tettonica delle Alpi Franco–Svizzere è spiegabile, facendo intervenire due fenomeni meccanici interdipendenti: l'azione delle forze tangenziali di spinta, dovute alla deriva continentale, lo sfaldamento in iscaglie a grande profondità di ciò che era il *peneplaine* interalpino, intagliato nell'edificio erciniano.

In quanto ai movimenti cattiani–miocenici, che si possono invocare per il viaggio del masso del Circeo, questi si spiegano asserendo in prima, che la fossa tirrenica, passata l'orogenesi alpina, era rimasta vuota dirimpetto alle coste del Lazio e della Campania, e ammettendo di poi, che è avvenuto un grande movimento epirogenetico di innalzamento, qua e là convertito in orogenesi attenuata, della zolla che ora è la parte mediana della penisola, per il quale movimento lo stesso miocene è stato portato a 2500 m. e più di altitudine. Fu tale innalzamento sufficiente a che si partissero, contemporaneamente dal culmine dell'inarcamento, sulla nuova geomonoclinale cattiana–miocenica degli scorrimenti verso la fossa tirrenica.

Quando sorge la piega di fondo, che diventerà falda, su di una geomonoclinale, e si abbatte verso una fossa, che può essere di affondamento verticale più facilmente che di geosinclinale, poichè da questo sarebbe poi assai difficile il risorgere di una catena geoanticlinale le esperienze fatte in proposito per dimostrare la possibilità di questa risurrezione (credo, che siano state alterate), non si può dire che la catena consti di una pila di sedimenti depositatisi in area geosinclinale, perchè in questa i sedimenti sono caso mai arrivati da uno dei fianchi. Se fossero arrivati, per avvicendamento, dalle due parti, la pila delle falde presenterebbe radici di doppia distribuzione, ma mi manca però un esempio che confermi questa affermazione.

Come conseguenza degli stessi scorrimenti, si produssero delle separazioni in blocchi, che ci fanno supporre l'esistenza di piani di disgiunzione o diaclasi, somiglianti a faglie, ma non tali, in una falda eocenica già coricata verso il Tirreno, e già foggiata per estesi tratti in facoide. E questi blocchi scivolarono sul fondo del mare cattiano–miocenico, i cui sedimenti ne ricevettero uno straordinario assodamento. È così che si avanzò verso la fossa

tirrennica il grande blocco della facoide lepinica, e che si partì dal davanti di questa, limitato da diaclasi e non da paraclasi (il Maxia dice il contrario), un *lembo precorritore*, il masso del Circeo.

Il Circeo è in tal modo il più bello e interessante lembo procorritore della Costa Tirrenica (un altro di tali lembi è il masso di Capri): ha viaggiato isolato, e questo isolamento è dovuto al fatto, che il careggiamento della serie mesozoica sul cattiano-miocene è consistito in un movimento di gravità, determinatosi appena che la pendenza del sopporto ha permesso lo scivolamento; ed è ammissibile che da una fronte sollecitata da tale movimento si siano staccati dei blocchi, che abbiano viaggiato prima o più rapidamente, e che siano andati anche più lontano del rimanente.

Per viemmeglio dimostrare che l'ipotesi dello scorrimento per gravità, sia per la falda ligure-toscana, sia per la facoide dei Lepini, non è campata in aria, aggiungerò come a poco a poco si è svolto questo concetto nella mia mente, nei ventitre anni trascorsi dalla pubblicazione della mia Nota sul Circeo.

Già sin d'allora l'Argand aveva sostenuto che i *Klippen* svizzeri erano degli ammassi in ricoprimento isolato, e che avevano viaggiato come tali, senza aver mai fatto parte di una copertura continua: l'imponente Dent du Midi, ad esempio, per l'Argand era da considerarsi un frammento dell'alta montagna giunto sino al confine della regione prealpina. Anni dopo osservavo, che lo scivolamento della falda ligure-toscana era avvenuto durante una fase parossismica dei movimenti orogenici alpini, e in maniera quasi superficiale, perchè, se tale falda aveva avuto fine, come si è detto, contro una falesia, questa non poteva presentare sottomare un'altezza tale da essere collegata direttamente con le profondità abissali; fu solo quando tale fossa risultò colmata, che il soprappiù della falda giunse a contrapporsi alla falesia.

E ancora nel 1940 (in un Appendice ad un'opera sulla storia di Genova), accennando in riassunto alle condizioni tettoniche della falda ligure-toscana, attorno alla cupola delle Apuane, asserivo che si era determinata nell'eocene una grande ondata di scorrimento, accompagnata dal rotolìo di parte del materiale spostato; e, come è già stato detto da altri, si può aggiungere, che per tale singolare movimento, la Cupola Apuana, già un po' accennata, veniva ad avere le condizioni di potere diventare una finestra, e così fu difatti.

Più di recente, nel 1943, il Lugeon, davanti al curioso appilamento delle falde ultraelvetiche delle Prealpi Interne, supponeva che degli scorrimenti, paralleli agli strati in originaria sovrapposizione, e inclinati in successione normale, fossero avvenuti con la partenza delle differenti falde; che quindi solo la gravità potesse spiegare come le falde ultraelvetiche si osservino formate di terreni tanto più antichi quanto più ogni falda è elevata. A queste falde di scorrimento il Lugeon dava il nome di *diverticoli*, i quali nel loro appilamento non presentano fianchi rovesciati, ma sono scaglie o lame, che io dico facoidi, in seguito piegate dall'orogenesi alpina.

Non è però ancora precisato nei suoi particolari, per l'area italiana, l'assetto che deve derivare da simili viaggi: si sono solo osservate delle

disposizioni di strati e di masse di rocce eruttive, invero molto irregolari e scontinue, dopo aver parlato di grandi frane che avrebbero eliminato la struttura a falde. Per ciò che ho visto nell'Appennino Ligure Orientale, in corrispondenza della falda ligure–toscana, posso dire, che, esiste un complesso caotico, come quello che deriverebbe da una frana vera e propria, solo in qualche tratto limitato, ad esempio nei dintorni di Rovegno. All'incontro, la lama allungata per alcuni chilometri di rocce ofiolitiche, senza notevoli spostamenti trasversali, che sta al confine occidentale della falda, di contro al massiccio delle « pietre verdi », fra le valli del Chiaravagna e della Polcevera; le linee di sobbalzo dei dintorni di Sopralacroce, continuate per più chilometri senza interruzione, benchè accompagnate da brecce, e separanti svariate masse di serpentina e di diabase; la eccezionale piega di ritorno del Bargonasco, che è intera: sono tutte queste delle cosistenze, alle quali molte se ne potrebbero aggiungere, che debbono aver subìto una traslazione graduale e uniforme, operata da una falda continua, e ben spiegata anche nel suo scivolamento.

Attorno al massiccio rigido dell'Argentera o del Mercantour esiste una larga zona di mesozoico, che, come è noto, presenta un complicatissimo sistema di pieghe carreggiate, di estrusioni, di contatti anormali, che va dalla Roia alla Provenza; e della Provenza è stato detto che ha una architettura geologica tale da mettere in dubbio qualsiasi spiegazione. È dubbio difatti, che si possano invocare delle spinte tangenziali da per loro, poichè si tratta di parautoctono basato sullo zoccolo periferico del massiccio rigido: tutto si semplifica se si invocano accavallamenti ed altri movimenti avvenuti per gravità sul supporto rigido, in massima dall'interno del supporto verso la periferia, e in più volte, ad esempio nel senoniano e nel luteziano.

Si annoti anche questo, che nella tettonica sperimentale si ottengono pieghe coricate, pieghe acute a raggio strettissimo e simili, ossia pieghe di tipo alpino, se si hanno, oltrechè alle pressioni laterali, delle resistenze sovraincombenti; se queste resistenze mancano, a seconda della composizione e l'assetto che si dà al materiale in esperimento, si producono insiemi caotici, oppure pieghe ampiamente ondulate, come quelle del Giura. Siccome la falda ligure toscana ha scivolato superficialmente sul fondo marino per spinta laterale, e mancanza di equilibrio statico, presenta un piegamento irregolare, disarmonico, con abbattimenti di ritorno verso l'origine della spinta, e in senso contrario allo scivolamento, come la ora citata piega del Bargonasco ne è, nell'area ligure, il più interessante esempio.

Il ragionamento teoretico, l'esperimento strumentale, la pratica del rilevamento concordano nell'indicare, che i movimenti di gravità sono episodi nella storia geologica dell'Appennino (e ciò probabilmente sarà anche della catena Alpina e di altre), e non il motivo orogenico prevalente. Nell'Appennino Ligure, ad esempio, se si può asserire che è scivolata come una frana grandiosa la falda ligure–toscana, ciò non si può affermare delle altre zone, siano in falda siano radicate, perchè l'episodio dello spostamento per gravità non è a sè, ma è una fase di tutti gli altri scorrimenti precorritori, parossismici e finali dell'orogenesi appenninica.

Antropologia. — *Sulla morfologia della «facies anterior corporis maxillae» nei paleantropi di Saccopastore e del monte Circeo* (*). Nota (**) preliminare del Corrisp. S. SERGI.

Le conoscenze sulla morfologia della faccia degli ominidi appartenenti a tipi estinti (protoantropi e paleantropi) sono ancora molto scarse ed incomplete, perchè rarissimi sono i casi in cui la faccia è conservata completamente, mentre più di frequente o è mancante o è ridotta a frammenti insufficienti per una adeguata determinazione delle sue caratteristiche. La morfologia della faccia in confronto di quella del cranio cerebrale, il quale con maggior frequenza si trova meglio conservato, è sotto certi riguardi più importante, perchè per la maggiore complessità e variabilità permette di apprezzare condizioni strutturali ed architetturali di valore sistematico.

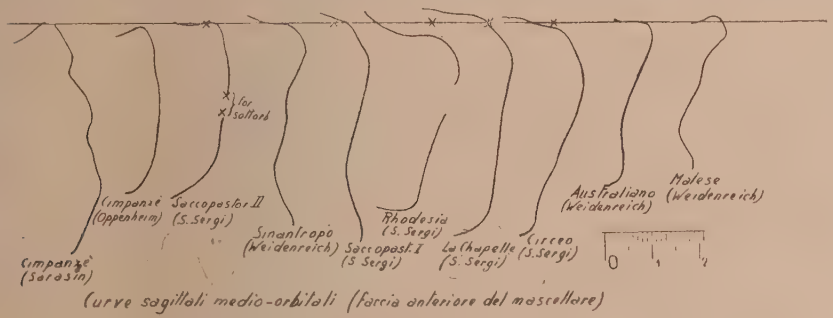


Fig. 1.

L'esame della faccia dei crani dei paleantropi di Saccopastore e del monte Circeo, nei quali essa si trova in uno stato di conservazione soddisfacente, mi ha permesso di rilevare complessi morfologici di particolare interesse che li distinguono profondamente. Su uno di questi, che riguarda un problema particolare dell'architettura facciale umana intendo di portare l'attenzione riassumendo sommariamente per ora in via preliminare i fatti constatati.

Esaminerò la faccia anteriore del corpo del mascellare rilevando le sue caratteristiche secondo i tre profili, *a*) laterale, *b*) orizzontale e *c*) frontale, ortogonali tra loro, seguendo il principio che soltanto così si può avere una rappresentazione integrale adeguata della forma (1).

(*) Dall'Istituto di Antropologia della Università di Roma.

(**) Presentata nella seduta del 14 febbraio 1948.

(1) S. SERGI, *La topografia dell'osso zigomatico nell'uomo in relazione ai problemi dell'architettura del cranio e della faccia.* «Rend. Cl. Sc. F. M. N. Acc. d'Italia», ser. VII, vol. IV, 1942.

Nella norma laterale la faccia anteriore del corpo del mascellare appare come rigonfia nel cranio del paleantropo del monte Circeo. Nella sezione sagittale medio-orbitale di questo cranio, che interessa il processo alveolare, il rigonfiamento si inizia subito al di sotto del margine orbitario, che risulta arrotondato senza limiti netti tra il pavimento dell'orbita e la faccia anteriore del mascellare (fig. 1). La condizione morfologica che si manifesta con tale rigonfiamento io chiamo *oncognatia* (= gonfiore della mascella). La parte rigonfia si volge obliquamente indietro ed in basso quando si orienta il cranio sul piano orbito-auricolare. Così pure nel neandertaliano di La Chapelle. Il cranio del paleantropo della Rhodesia ha un comportamento simile a quello del monte Circeo. Nel primo paleantropo di Saccopastore, il rigonfiamento è molto meno accentuato e si estende soltanto in alto,

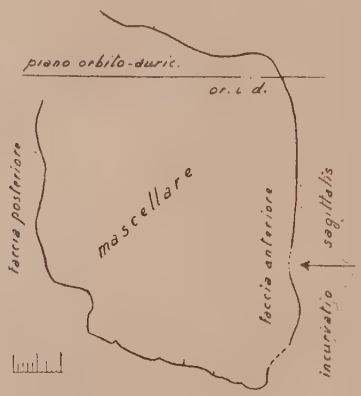


Fig. 2.

perchè in basso è seguìto da un'ampia depressione limitata inferiormente dal rilievo del processo alveolare, così che l'intera curva assume una forma sigmoidea. La depressione individua un solco a direzione trasversale e corrisponde ad una incurvatura della parete del mascellare a direzione sagittale che io chiamo *incurvatio sagittalis*. Nel secondo paleantropo di Saccopastore una sezione di un piano sagittale che interessa il processo alveolare e che passa per il primo premolare presenta una curva simile a quella di Saccopastore I (fig. 2). In una sezione più laterale nella quale rimane escluso il processo alveolare, la parete mascellare risulta per tutta l'estensione leggermente rigonfia, oncognatica (cfr. fig. 1 con fig. 2).

La oncognatia quindi può interessare per tutta la sua estensione la faccia del mascellare fino al processo alveolare (*oncognatia totale*) o solamente la porzione superiore (*oncognatia superiore*). La parte rigonfia si può volgere obliquamente indietro ed in basso (opistognatia laterale del corpo del mascellare) come in Circeo e in La Chapelle ed anche in Rhodesia, oppure

tende alla verticalità (ortognatia laterale) come in Saccopastore I e II. Nell'uomo attuale la parete mascellare osservata nella norma laterale appare più o meno fortemente incavata (*incurvatio sagittalis*), subito al di sotto del margine orbitario che si proietta al di sopra separandola distintamente dal pavimento dell'orbita. L'incavo corrisponde alla fossa canina come è comunemente conosciuta dai trattati di anatomia umana. Il distacco con il tipo oncognatico è caratteristico. In Sinantropo nel craniogramma sagittale medio-orbitale della ricostruzione data da Weidenreich (fig. 1) si rileva che la parete mascellare è infossata, l'infossamento è suddiviso in due incavi secondari. Nel complesso una fossa che più si accosta e ricorda quella dei fanerantropi. Il Sinantropo non è oncognato, un lieve accenno di rigonfiamento tutto al più appare nella porzione soprastante al foro sottorbitario. In Cimpanzè la faccia del mascellare è rigonfia e tende alla verticalità rispetto al piano orbito-auricolare in una sezione corrispondente al piano sagittale medio-orbitale, se questo cade lateralmente al processo alveolare (fig. 1

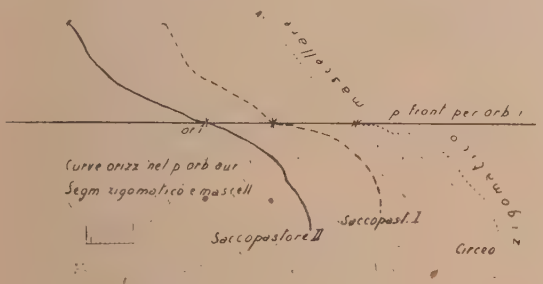


Fig. 3.

Oppenheim), o si proietta in basso più in avanti, se lo stesso piano interessa medialmente anche il processo alveolare (fig. 1 Sarasin dove appaiono inflessioni secondarie corrispondenti ai fori sottorbitari).

Nel profilo orizzontale il comportamento morfologico del mascellare nel cranio del Circeo è differente da quello dei crani di Saccopastore I e II (figg. 10 e 12 della tavola). Nel Circeo il profilo orizzontale della faccia osservato dalla base, è caratterizzato dalla forte inclinazione in avanti verso il piano mediano delle due facce dei mascellari, sicchè queste convergendo si proiettano in modo da costituire insieme come un cuneo. La faccia a cuneo (*sfenoprosopia*) è il genere di proopia che caratterizza nel profilo orizzontale i neandertaliani tipici come La Chapelle. Le ossa zigomatiche seguono indietro compresse alquanto lateralmente. Questa condizione morfologica viene bene analizzata nei craniogrammi orizzontali con l'esame dei segmenti mascellari ai diversi livelli a partire dal margine orbitario inferiore (fig. 3). Essi sono rettilinei, per cui la faccia vista dalla horma basale appare a lati pianeggianti e proiettata innanzi a guisa di un muso (Tav., fig. 10). Non così si comportano i crani di Saccopastore I e II, nei quali il profilo orizzontale della faccia appare in corrispondenza della sua porzione mascellare incurvato

a concavità antero-laterale per tutta la sua altezza (fig. 3 e Tav., fig. 12), sicchè il mascellare risulta percorso da un solco che lo divide in due sezioni, una mediale ed una laterale. La prima sezione corrisponde alla parte del mascellare che si continua con il processo frontale del medesimo e confina con l'apertura piriforme, la seconda sezione, lateralmente al foro sottorbitario, corrisponde alla parte del mascellare che comprende il processo zigomatico ed a cui fa seguito lo zigomatico. L'andamento del segmento di questa seconda sezione ai diversi livelli orizzontali si conforma a quello di ciascuna delle curve dello zigomatico del corrispondente livello. Le due sezioni della faccia del mascellare appaiono come ripiegate l'una rispetto all'altra. Questo solco di ripiegamento principale, che io ho denominato *incurvatio horizontalis* corrisponde al solco mascellare di Weidenreich (fig. 4). Il solco individua una condizione meccanica a cui soggiace la sottile parete anteriore della cavità del seno mascellare di fronte alle forze che si esercitano su di essa in direzione perpendicolare a quella del solco. La zona di piegamento è cioè

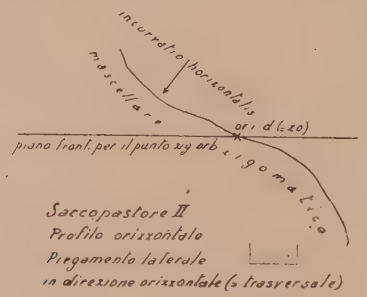


Fig. 4.

una zona di minore resistenza che si manifesta con la particolare introflessione della parete. Mentre alla sezione mediale del mascellare nella quale si trova l'alveolo del canino corrispondono linee di azione che dal canino raggiungono, attraverso il processo frontale del mascellare, il frontale, nella sezione laterale corrisponde la linea d'azione che dai premolari e molari, attraverso il processo zigomatico del mascellare, raggiunge lo zigomatico. In Sinantropo Weidenreich descrive un solco, *sulcus maxillaris*, che immediatamente sotto il forame infraorbitario decorre in basso verso l'interstizio tra primo e secondo premolare. Esso alla sua origine appare come un profondo infossamento tra il grande rilievo dello *jugum* del canino ed il rilievo del processo zigomatico. *The development* – dice Weidenreich – *of such a sulcus maxillaris which replaces the fossa canina of modern man is a novelty. Yet I do not consider its formation in Sinanthropus an accidental one, because the form which the fossa canina can assume in chimpanzee resembles the sulcus of Sinanthropus rather closely. It may be superfluous to stress the fact that the sulcus is certainly not caused by the nerves and vessels which the foramen infraorbitale admits to the malar region though the sulcus takes*

its origin there, but must be considered a kind of fold between the two prominences, the canine jugum, on the one side, and the zygomatic process on the other. Lo stesso si può dire per Saccopastore II, dove la posizione del solco è del tutto uguale a quella del Sinantropo, cioè decorre dal forame infraorbitario allo interstizio tra lo *jugum* del primo premolare e quello del secondo premolare. È da aggiungere però che, secondo la mia opinione, il solco mascellare, che si riscontra in Cimpanzè non è l'equivalente della fossa canina nel senso più generale della parola, come sembra voglia dire Weidenreich. Secondo le mie osservazioni il solco mascellare (*incurvatio horizontalis*) è una condizione che contribuisce alla formazione della fossa quando si associa alla presenza del solco trasverso sopralveolare determinato dalla *incurvatio sagittalis* la quale si manifesta in modo definito nei craniogrammi sagittali del mascellare.

Fig. 5.

Nell'uomo attuale esiste abitualmente la *incurvatio horizontalis* più o meno accentuata, che si accompagna con la *incurvatio sagittalis* e con la quale viene a costituire la tipica fossa canina.

Nel profilo frontale il corpo del mascellare, lungo un piano frontale che limita la faccia anteriore da quella posteriore (o infratemporale), in Saccopastore II è incurvato come nei fanerantropi, questo incurvamento io chiamo *incurvatio inframalaris lateralis* (fig. 5), invece nel Circeo il limite tra le due facce è quasi rettilineo come nei neandertaliani tipici (La Chapelle) e si incurva solo brevemente in fuori presso la sutura maxillo-malare. Le differenze del profilo frontale che qui descrivo sono indicate dalla forma delle freccie tracciate nelle figure riportate nella tavola che accompagna il testo (disegni figg. 1-8, foto figg. 9, 11). In Saccopastore il punto zigo-mascellare inferiore, limite inferiore della sutura maxillo-malare è come nei fanerantropi più abbassato che nel Circeo, ed in questo a sua volta

più abbassato che in Cimpanzè, come risulta dall'analisi di posizione dello zigomatico [2]. Questa estrema ipozighia dello zigomatico in zigo-mascellare inferiore che si accompagna al ripiegamento laterale dello zigomatico, corrisponde alla *zygoproptosi* di McCown e Keith [3] che caratterizza gli uomini attuali. Un incurvamento particolare del mascellare si trova in Sinantropo dove il pilastro malare, come Weidenreich chiama il processo zigomatico del mascellare, nel volgersi lateralmente si protende sotto lo zigomatico non solo in fuori, ma si incurva in basso delimitando una incisura che Weidenreich chiama *incisura malaris*. Nel cranio di Saccopastore II non esiste questo incavo, ma le due ossa si incontrano a formare una prominenza laterale inferiore che ha la sua massima salienza nel punto zigo–mascellare inferiore. Nel cranio del monte Circeo appare un lievissimo incipiente accenno della *incisura malaris*. A seguito dei fatti rilevati da Weidenreich in Sinantropo non si può affermare che il ripiegamento laterale del mascellare, la *incurvatio inframalaris mihi*, e quindi la *zygoproptosi*, costituisca una condizione più recente di quella che si rileva nei neandertaliani tipici che non presentano il ripiegamento del mascellare, ed in cui lo zigomatico è più innalzato. Delle due modalità oggi risulta più antica la prima che si trova nel Sinantropo e nel cranio di Steinheim nel quale la *incurvatio* è sorprendentemente simile a quella di Saccopastore II come si rileva dai craniogrammi frontali sovrapposti dei due crani, ed è quella che si incontra negli uomini attuali, o più si avvicina a quella degli uomini attuali. Saccopastore II è più prossimo anch'esso alle forme attuali e si allontana dal Circeo, ma si differenzia dal Sinantropo giacchè non ha come questo la incisura malare, ma invece una protuberanza maxillo–malare laddove si incontrano le due ossa, e da un tipo e dall'altro si distingue per la grande estensione dello zigomatico al di sotto dell'arco zigomatico da cui la enorme altezza della superficie sottorbitaria della faccia. Saccopastore II è un tipo a sè stante già solamente riferendoci a queste modalità. Come saggio dimostrativo delle forme attuali ho riportato nella tavola le figure del cranio di un sumatrano (fig. 4), di un cranio di romano moderno (fig. 5) e del cranio di Dante (fig. 6). Dal loro confronto con le forme dei diversi ominidi fossili, Sinantropo (fig. 1) Rhodesia (fig. 2), Saccopastore II (fig. 3), La Chapelle (fig. 7), Circeo (fig. 8), si documenta quanto si è detto. L'analisi particolare comparativa sarà trattata in una Memoria a parte.

Le modalità morfologiche fin qui rilevate separatamente con l'esame dei singoli profili debbono essere considerate nella loro reciproca relazione ed interdipendenza.

Nell'uomo attuale la faccia anteriore del corpo del mascellare presenta, di regola, una depressione più o meno pronunziata che costituisce la così detta fossa canina, e, lateralmente ai limiti con la faccia posteriore, si incurva al di sotto dello zigomatico. La depressione della fossa canina si mette

(2) S. SERGI, *Il cranio del secondo paleantropo di Saccopastore*. V. nota in fine.
(3) V. Nota in fine.

in evidenza nelle sezioni sagittali con la *incurvatio sagittalis*, nelle sezioni orizzontali con la *incurvatio horizontalis*, cioè la fossa appare come risultante di un duplice ripiegamento della parete del mascellare, uno in direzione sagittale ed uno in direzione orizzontale. L'incurvamento laterale (*incurvatio inframalaris*) appare poi come risultante di un piegamento laterale della parete in direzione frontale. L'insieme dei piegamenti nelle tre direzioni costituisce una caratteristica abituale dei fanerantropi.

L'incurvamento laterale negli uomini attuali si presenta con alcune varianti secondo il grado di ripiegamento del processo zigomatico del mascellare, il quale può volgersi lateralmente in basso a delimitare una curva più o meno accentuata, che nei casi estremi viene a corrispondere alla incisura malare di Weidenreich, al tipo *concavo* di Fenner (cit. di Weidenreich) il quale distingue poi come tipo *normale* quello nel quale il margine inferiore forma un arco meno accentuato. Tanto l'uno che l'altro tipo si ritrovano tra gli europei come in altri gruppi etnici viventi. (Vedi figure della tavola).

Nel neonato esiste un profondo solco obliquo trasversale che si estende subito sotto il margine orbitario a partire medialmente dalla regione del forame sottorbitario. Il solco si vede nelle figg. 13-16 della tavola, in cui è disegnata la faccia di un neonato romano moderno nel profilo frontale e nel profilo obliquo sinistro: a ciascun disegno (figg. 14 e 16) si accompagna, sovrapposto, lo schema corrispondente (figg. 13 e 15) con l'indicazione dell'andamento del solco, il quale raggiunge lateralmente il processo zigomatico del mascellare volgendosi indietro subito al di sotto della sutura zigomatico-mascellare. Così che mentre medialmente il solco individua un incurvamento a direzione sagittale, lateralmente viene a continuarsi in un incurvamento a direzione frontale, che corrisponde alla *incurvatio inframalaris*. La fossa canina è fino da ora già rappresentata dalla porzione mediale del predetto solco. In questo momento il corpo del mascellare è ridottissimo in altezza, la parte orbitaria si continua ripiegandosi sulla sottostante parte alveolare, giacchè non esiste il seno mascellare, ed il solco di piegamento lo divide in due parti. La parte alveolare nella quale sono contenuti i germi dentali è molto prominente. La fossa si estende e si completa più tardi con il costituirsi del piegamento in direzione orizzontale (*incurvatio horizontalis*) per lo sviluppo del seno del mascellare e contemporaneamente dei denti, mentre si viene ad interrompere la sua continuità con l'*incurvatio inframalaris*. L'interruzione si determina per l'innalzarsi del pilastro laterale del mascellare che dal processo alveolare risale attraverso il processo zigomatico del mascellare fino all'osso zigomatico.

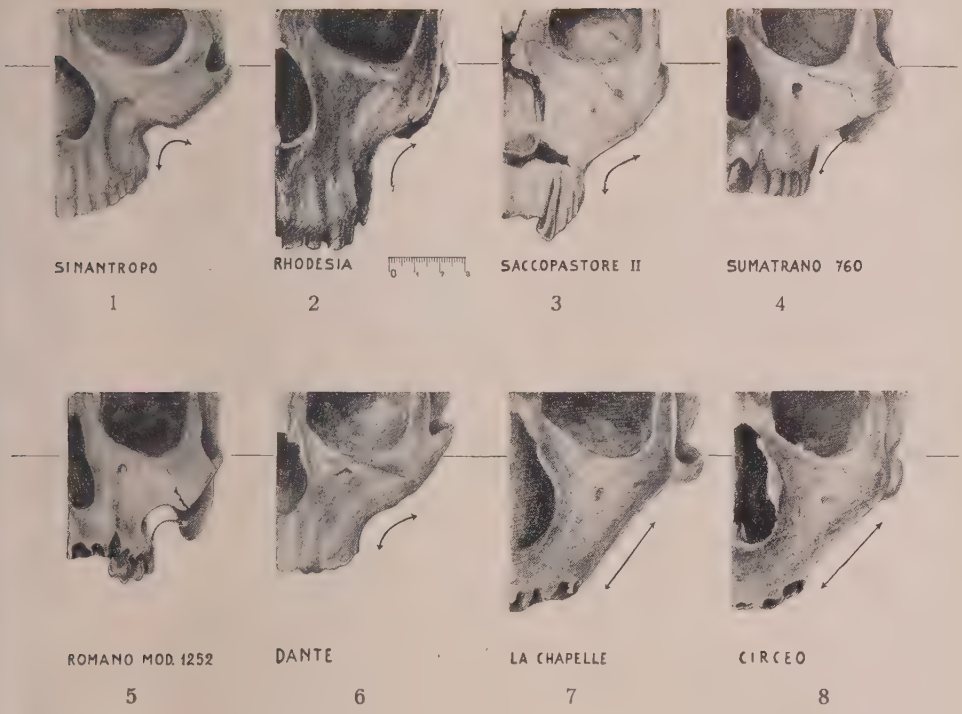
Nel Sinantropo, protoantropo asiatico del più antico pleistocene, si trovano condizioni dell'uomo attuale; la fossa canina è individuata non soltanto dalla *incurvatio horizontalis* per la presenza del solco mascellare descritto da Weidenreich, ma anche dalla *incurvatio sagittalis*, come io rilevo dal suo craniogramma, il che non accade nello Cimpanzè, in cui questa ultima non si trova. Nel paleantropo di Steinheim, detto preneandertaliano

da Weinert, paleantropo il più antico della serie europea che rimonta almeno al terzo glaciale (Riss), se non è da retrodatare ancora di più, esistono tutte le tre curve caratteristiche dell'uomo di oggi. Nei paleantropi europei dell'ultimo glaciale (Würm), ultimi della serie paleantropica, con cui questa si estingue e che rappresentano, secondo le mie osservazioni, soltanto i tipici neandertaliani, cui appartengono l'uomo di La Chapelle e quello del monte Circeo, non si trovano i tre piegamenti del mascellare, la cui parete appare distesa in tutte le tre direzioni considerate, ed anzi iperestesa in quella sagittale (oncognatia). Nei paleantropi di Saccopastore dell'ultimo interglaciale (Riss–Würm) e che precedono quelli di La Chapelle e del monte Circeo, la morfologia del mascellare è più conforme a quella degli uomini attuali, per quanto si riferisce alla *incurvatio inframalaris* ed alla *incurvatio horizontalis*, e se ne allontana incompletamente per una parziale oncognatia del profilo laterale alla quale però si associa una *incurvatio sagittalis*. Il paleantropo africano della Rhodesia, mentre per il profilo orizzontale e per quello frontale si accorda con l'uomo di Saccopastore e con l'umanità attuale, per il profilo laterale si collega con l'uomo del Circeo e di La Chapelle.

In definitiva l'origine della fossa canina già si trova nelle forme più antiche e primitive dell'umanità insieme con la *incurvatio inframalaris* e si incontra nelle forme più antiche dei paleantropi in grado più o meno completo. Invece nelle forme tipiche neandertaliane il mascellare ha una forma *ad estensione* che si separa da tutte quelle precedenti, che io chiamerei *a flessione*, e che le caratterizza. L'umanità attuale possiede caratteristiche della umanità più antica. Tra l'una e l'altra si interpone un tipo, il neandertaliano propriamente detto che ha una facies distinta. Con questa constatazione si giunge alla conclusione, che, come per altri caratteri già da me esaminati, anche per questo il paleantropo neandertaliano si discosta e costituisce un tipo terminale, differenziato, che si estingue senza lasciare discendenza. Esso però si riannoda geneticamente con i paleantropi europei che lo hanno preceduto con i quali ha in comune alcuni caratteri, mentre a loro volta i paleantropi europei più antichi se ne discostano per altri caratteri, come quelli esaminati, e questi si trovano sulla via degli uomini attuali.

Riferimenti bibliografici.

L'esame analitico dei fatti morfologici, rilevati in questa Nota, corredato da un'ampia dimostrazione iconografica, è in corso di pubblicazione nella Memoria dal titolo: S. Sergi, *Il cranio del secondo paleantropo di Saccopastore* in « Palaeontographia italica », vol. XII, N. ser., Pisa. Per le questioni fondamentali trattate mi riferisco principalmente alle due pubblicazioni recenti: Th. McCown e A. Keith, *The stone age of Mount Carmel. The fossil human remains from the levalloiso-mousterian*, vol. II, Oxford, 1939; Franz Weidenreich, *The skull of Sinanthropus pekinensis. A comparative study on a primitive hominid skull.* « Palaeontologia Sinica », 1944.



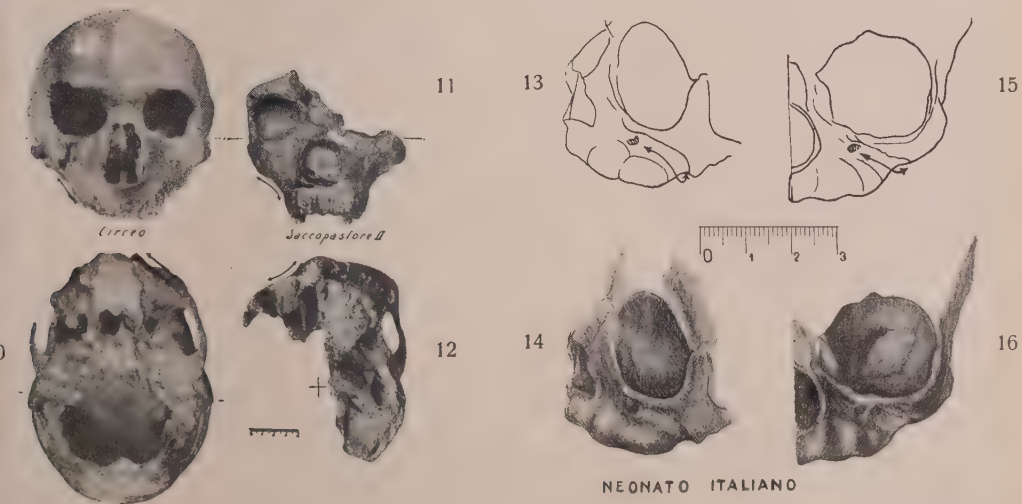


Fig. 1 a 8 - Diverse modalità del profilo frontale del mascellare (spiegazione nel testo).

Fig. 9 a 12 - Differenze del profilo frontale (9 e 11) e del profilo orizzontale (10 e 12) in Circeo e Saccopastore II.

Fig. 13 a 16 - Solco del mascellare in un neonato (spiegazione nel testo).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Analisi tensoriale). — *Attorno a un «teorema della divergenza» per tensori qualunque negli Spazi di Riemann.* Nota di L. CASTOLDI, presentata (*) dal Socio L. BERZOLARI.

1. Recentemente, occupandomi di talune ricerche di Calcolo tensoriale (1), ho avuto occasione di riconoscere l'utilità di stabilire, per tensori qualunque in una generica varietà di Riemann, un *teorema della divergenza* analogo a quello notissimo valido per vettori dell'ordinario S_3.

Poichè non mi consta (2) che, nella sua forma generale, il Teorema in questione sia stato mai rilevato, credo non privo di qualche interesse fornirne una dimostrazione in una forma che ritengo particolarmente semplice, poichè fondata sul medesimo procedimento con cui si suole, negli elementi, definire e illustrare fisicamente il concetto stesso di divergenza di un vettore.

2. Sia V_n una varietà riemanniana con *metrica* definita dalla forma differenziale quadratica

$$(1) \qquad ds^2 = a_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

e σ una V_{n-1} immersa in essa e rappresentata dalle equazioni parametriche

$$(2) \qquad x^i = x^i(u^1, \cdots, u^{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

La metrica (1) in V_n subordina, come è noto, attraverso le (2), una analoga metrica in σ, con coefficienti $b_{\alpha\beta}$ del relativo tensore fondamentale definiti da

$$(3) \qquad b_{\alpha\beta} = a_{ij}\, x^i_\alpha\, x^j_\beta \quad , \quad \text{ove è } x^r_\varepsilon = \frac{\partial x^r}{\partial u^\varepsilon}\,.$$

e $n-1$ la caratteristica della matrice funzionale $\| x^i_\varepsilon \|$.

Supposta definita positiva la forma differenziale quadratica (1) e quindi la corrispondente subordinata caratterizzante la metrica in σ, risultano certo positivi i rispettivi discriminanti $a = \det |\, a_{ik} \,|$ e $b = \det |\, b_{\alpha\beta} \,|$.

Sia ora $\mathbf{T}^{(p)}$, di componenti controvarianti $T^{i_1 \cdots i_p}$, un tensore qualunque di ordine p in V_n e χ_i il vettore unitario normale a σ, pure in V_n.

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1947.

(1) L. CASTOLDI, *Estensione a tensori qualunque negli Spazi di Riemann di alcuni teoremi fondamentali dell'Analisi vettoriale*, in corso di pubblicazione nelle «Memorie della Società dei XL».

(2) Limitatamente al caso di tensori emisimmetrici (*vettori generalizzati*), il Teorema in questione è stato stabilito dal PALATINI, *Concetto di vettore generalizzato ecc.* «Rend. del Sem. Mat. di Padova», nn. 3-4 (1933). Per tensori qualunque in varietà euclidee, lo stesso Teorema è riferito da SCHOUTEN-STRUIK in *Neuere Methoden der Differential geometrie*, vol. I, § 11.

Con ovvia generalizzazione di concetti elementari definiremo « flusso del tensore $\mathbf{T}^{(p)}$ » (relativo all'indice di k^{mo} posto), attraverso l'elemento $d\sigma$ di estensione $\sqrt{b}\,du^1, \cdots, du^{n-1}$ della V_{n-1} data, il tensore di ordine $p-1$, che designeremo con $d^{(n-1)}_{[k]}\,\Phi^{(p-1)}$, di componenti

$$(4) \qquad T^{i_1 \cdots i_{k-1} l i_{k+1} \cdots i_p}\,\chi_l \sqrt{b}\,du^1 \cdots du^{n-1}.$$

Quanto al versore normale χ_l è qui opportuno scriverne esplicitamente le componenti quali si esprimono attraverso le equazioni (2) di σ e i tensori ε [3] relativi a V_n e a σ stessa:

$$(5) \qquad \chi_l = \frac{1}{(n-1)!}\,\varepsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}}\,\varepsilon_{l i_1 \cdots i_{n-1}}\,x^{i_1}_{\alpha_1}\,x^{i_2}_{\alpha_2} \cdots x^{i_{n-1}}_{\alpha_{n-1}},$$

dove $i_1, \cdots, i_{n-1}$ è una combinazione qualunque degli indici $1, 2, \cdots, n$. Sostituendo (5) in (4) si ottiene l'espressione generale delle componenti del flusso sopra definito.

Allo scopo di semplificare e rendere più perspicuo il procedimento è tuttavia opportuno effettuare, a questo punto, una scelta particolare del sistema di coordinate di riferimento: e precisamente, in modo che la varietà σ si identifichi con una delle ipersuperficie coordinate $x^1 =$ costante, per esempio, $x^1 = \bar{x}^1$; lasciando, del resto, del tutto arbitraria la scelta in V_n delle rimanenti coordinate $x^2, \cdots, x^n$, le quali, peraltro, su σ, possono ora assumersi come parametri in luogo dei precedenti $u^1, \cdots, u^{n-1}$. Con queste convenzioni, si ha, su σ;

$$x^{i_r}_{\alpha_s} = \begin{cases} 0, & \text{se } i_r \text{ è } 1 \text{ o se } i_r \text{ e } \alpha_s \text{ sono diversi} \\ 1, & \text{se è } i_r = \alpha_s = 2, 3, \cdots, n, \end{cases}$$

mentre le componenti (5) del versore normale diventano

$$(5') \qquad \chi_1 = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad ; \quad \chi_\varrho = 0 \quad \text{per} \quad \varrho = 2, 3, \cdots, n.$$

Sostituendo in (4) si trovano allora, per le componenti del flusso cercato, le espressioni

$$(6) \qquad d^{(n-1)}_{[k]}\,\Phi^{i_1 \cdots i_{k-1} i_{k+1} \cdots i_p} = T^{i_1 \cdots i_{k-1} 1 i_{k+1} \cdots i_p} \sqrt{a}\,dx^2 \cdots dx^n$$

le quali, è opportuno ricordarlo, costituiscono con riferimento a un particolare sistema di coordinate, le componenti di un tensore di ordine $p-1$, infinitesimo di ordine $n-1$ e legato all'estensione e alla giacitura in V_n della *faccetta* $d\sigma$.

Premesso ciò consideriamo l'ipersuperficie coordinata $x^1 = \bar{x}^1 + dx^1 =$ $=$ costante, con $dx^1 > 0$, e su essa l'elemento $d\sigma'$ determinato dalle inter-

(3) Per la definizione dei tensori ε si confronti, per esempio: T. LEVI CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, p. 180. L'espressione (5) del versore normale ad una V_{n-1} in V e, più in generale, l'espressione dell'$(n-m)$-vettore normale ad una V_m in V_n trovasi in A. PALATINI, loco citato nella nota (2), formula (17).

sezioni colle linee coordinate (x^1) passanti per il contorno di $d\sigma$. Veniamo in tal modo a ottenere in $d\sigma$ e $d\sigma'$ due facce opposte del parallelepipedo elementare in V_n avente le rimanenti $p-1$ coppie di facce opposte rispettivamente su coppie di ipersuperficie coordinate $x^2 = \text{costante}$, $x^3 = \text{costante}$, $\ldots$, $x^p = \text{costante}$. Il confronto tra il flusso di $\mathbf{T}^{(p)}$ attraverso $d\sigma'$ e quello precedentemente calcolato attraverso $d\sigma$, quale confronto tra le determinazioni di due tensori in punti diversi di V_n non può farsi se non dopo aver definito che cosa si intenda per flusso attraverso $d\sigma'$ *equipollente* a un dato flusso attraverso $d\sigma$; e, come è noto, l'unico criterio di equipollenza avente carattere intrinseco a V_n è quello espresso dall'annullarsi del differenziale covariante del flusso considerato, relativamente al passaggio da $d\sigma$ a $d\sigma'$. In altre parole, il *divario* tra i due flussi in questione va ritenuto espresso in ogni caso dal differenziale covariante del flusso stesso, concepito, quest'ultimo, quale funzione del posto, nel passaggio da $d\sigma$ a $d\sigma'$. Riferendoci all'espressione (6) e osservando che nel passaggio indicato, risulta variata la sola coordinata x^1, indicando inoltre con ∇ il simbolo della differenziazione covariante, otteniamo:

$$\nabla d^{(n-1)}_{[k]} \boldsymbol{\Phi}^{(p-1)} = \nabla_1 \left[\mathrm{T}^{i_1 \cdots i_{k-1}\, 1\, i_{k+1} \cdots i_p} \sqrt{a}\, dx^2, \cdots, dx^n \right] dx^1 =$$

$$= \left[\frac{\partial \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_{k-1}\, 1\, i_{k+1} \cdots i_p}}{\partial x^1} \sqrt{a} + \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_{k-1}\, 1\, i_{k+1} \cdots i_p} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x^1} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{a} \sum_{l=1}^{p}{}' \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_{l-1}\, \varrho\, i_{l+1} \cdots i_{k-1}\, 1\, i_{k+1} \cdots i_p} \left\{ \begin{matrix} i_l \\ \varrho\ 1 \end{matrix} \right\} \right] dx^1 dx^2, \cdots, dx^n =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \left(\sqrt{a}\, \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_{k-1}\, 1\, i_{k+1} \cdots i_p} \right)}{\partial x^1} + \sum_{l=1}^{p}{}' \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_{l-1}\, \varrho\, i_{l+1} \cdots i_{k-1}\, 1\, i_{k+1} \cdots i_p} \left\{ \begin{matrix} i_l \\ \varrho\ 1 \end{matrix} \right\} \right] dS,$$

dove $d\mathrm{S}$ è l'estensione del considerato parallelepipedo elementare e gli apici ai simboli di sommatoria indicano che va escluso il valore $l = k$.

È questo il flusso complessivamente *uscente* da $d\mathrm{S}$ attraverso le due facce opposte $d\sigma$ e $d\sigma'$. Come tale, esso ha il carattere di un tensore di ordine $p-1$ infinitesimo di ordine n e legato, oltrechè alla faccetta $d\sigma$, alla direzione di trasporto da $d\sigma$ a $d\sigma'$ e alla particolare definizione della faccetta $d\sigma'$.

Ripetendo le medesime considerazioni per tutte le rimanenti $p-1$ coppie di facce opposte, e sommando i risultati, otteniamo, come flusso uscente totale dallo stesso parallelepipedo, il tensore di ordine $p-1$:

$$(7) \qquad d^{(n)}_{[k]} \boldsymbol{\Phi}^{(p-1)} = \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \left(\sqrt{a}\, \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_{k-1}\, j\, i_{k+1} \cdots i_p} \right)}{\partial x^j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{p}{}' \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_{l-1}\, \varrho\, i_{l+1} \cdots i_{k-1}\, j\, i_{k+1} \cdots i_p} \left\{ \begin{matrix} i_l \\ \varrho\ j \end{matrix} \right\} \right] dS,$$

indipendente, come risulterà tosto, dal modo di costruzione del precedente parallelepipedo elementare, ma solo dipendente dal suo volume $d\mathrm{S}$.

Se definiamo, per analogia col caso elementare, la divergenza di un tensore quale limite del rapporto tra il suo flusso uscente attraverso una iper-

superficie chiusa e il volume da essa contenuto, al tendere a zero di questo ultimo, abbiamo finalmente

$$(8)\qquad \operatorname{div}_{[k]} \mathbf{T}^{(p)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \left(\sqrt{a}\, \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_{k-1}\, j\, i_{k+1} \cdots i_p} \right)}{\partial x^j} + \\ + \sum_{l=1}^{p}{}' \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_{l-1}\, \varrho\, i_{l+1} \cdots i_{k-1}\, j\, i_{k+1} \cdots i_p} \begin{Bmatrix} i_l \\ \varrho\ j \end{Bmatrix} = \nabla_j \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_{k-1}\, j\, i_{k+1} \cdots i_p},$$

formula che, data la natura tensoriale del suo secondo membro, dimostra ad un tempo il carattere intrinseco della nozione di divergenza, come ora introdotta, e la validità dell'affermazione poc'anzi fatta, relativamente alla (7).

Sia ora S una regione finita di V_n e σ il suo contorno. Un procedimento di suddivisione di S in parti infinitesime, l'applicazione a ciascuna di esse della formula (7), indi l'integrazione a tutto il campo S, conducono immediatamente al risultato

$$(9)\qquad \int_S \operatorname{div}_{[k]} \mathbf{T}^{(p)}\, dS = \int_\sigma (\mathbf{T}^{(p)}, \boldsymbol{\alpha})\, d\sigma,$$

che è l'espressione del cercato teorema della divergenza.

Osservazione. – Da quanto precede risulta che è possibile formare p divergenze di un tensore $\mathbf{T}^{(p)}$ di V_n, una per ogni possibile scelta del posto dell'indice i_k che vien saturato dall'indice di derivazione; e che per ciascuna di esse è lecito scrivere una corrispondente formula (9). Naturalmente, tali divergenze coincidono tutte se $\mathbf{T}^{(p)}$ è simmetrico, e differiscono tra loro al più per il segno se $\mathbf{T}^{(p)}$ è emisimmetrico.

Nel caso generale potrà spesso tornare opportuno assumere senz'altro come *divergenza* del tensore dato quella formata rispetto all'indice dell'ultimo posto, assumere cioè $\operatorname{div} \mathbf{T}^{(p)} = \operatorname{div}_{[p]} \mathbf{T}^{(p)}$.

Analisi tensoriale. — *Applicazioni dei teoremi generalizzati della divergenza e di Stockes al calcolo delle derivate sostanziali di integrali multipli negli Spazi di Riemann.* Nota di L. Castoldi, presentata (*) dal Socio L. Berzolari.

1. Abbiamo recentemente stabilito (1) una generalizzazione a tensori qualunque $\mathbf{X}^{(p)}$ in una generica varietà riemanniana V_n dei noti teoremi vettoriali della divergenza e di Stockes, pervenendo a formule che qui richiamiamo:

(*) Nella seduta del 13 marzo 1948.

(1) L. Castoldi, *Estensione a tensori qualunque negli spazi di Riemann di alcuni teoremi fondamentali dell'Analisi vettoriale.* (In corso di pubblicazione nelle «Memorie della Società dei XL»). Rinviamo a questo lavoro per l'esplicazione dettagliata del significato delle notazioni adottate nella presente Nota.

$$(1) \qquad \int_S \mathbf{Div}_{[k]}^{(p-1)} \mathbf{X}^{(p)} \, dS = \int_\sigma (\mathbf{X}^{(p)}, \chi)_{[k]} \, d\sigma;$$

$$(2) \qquad \int_S (\mathbf{Rot}_{V_n} \mathbf{X}^{(p)}, \chi^{(n-m)}) \, dS = -\int_\sigma (\mathbf{X}^{(p)}, \tau^{(m-1)}) \, d\sigma,$$

nella prima delle quali (*teorema della divergenza*), S è una qualunque regione connessa di V_n racchiusa dal contorno $(n-1)$ dimensionale σ di normale esterna χ, mentre nella seconda (*teorema di Stockes*), S e σ sono rispettivamente una regione connessa di V_m in V_n e il suo contorno $(m-1)$-dimensionale, $\chi^{(n-m)}$ lo spazio vettoriale puntualmente normale a V_m in V_n, e $\tau^{(m-1)}$ lo spazio vettoriale tangente a V_m. In entrambe è denotato con $\mathbf{X}^{(p)}$ un tensore di ordine p.

Nel presente lavoro ci proponiamo di applicare i teoremi richiamati a stabilire alcune espressioni notevoli di derivate sostanziali di integrali multipli in varietà riemanniane, le quali, nel caso elementare, si riducono a note formule di utile impiego nella Fisica matematica.

2. Consideriamo, a tale scopo, un moto fluido in V_n e denotiamo con S una regione *sostanziale*, connessa, di una V_m *sostanziale*, racchiusa da un contorno $(m-1)$-dimensionale σ. Indicheremo, ove occorra, con $V_m^{(t)}$ ed $S^{(t)}$ le configurazioni di V_m e della sua regione S all'istante generico t e con $V_m^{(t+dt)}$, $S^{(t+dt)}$ le rispettive configurazioni in un istante posteriore infinitamente vicino. Per effetto del moto fluido considerato, la accennata sostanziale V_m descriverà, generalmente, una V_{m+1}, in V_n, non essendo, peraltro, escluso un moto di scorrimento di V_m su se stessa, quale si verifica, per esempio, nel caso stazionario, allorchè V_m sia luogo di ∞^{m-1} linee di flusso in V_n (varietà di Bernoulli). Prescindendo, per ora, da quest'ultima circostanza particolarissima, la cui trattazione riuscirà, del resto, compresa nei risultati generali cui perverremo alla fine, denotiamo con v il campo vettoriale delle velocità delle particelle di S e con Γ lo «*strato*» di V_{m+1} descritto da S nell'intervallo infinitesimo di tempo da t a $t+dt$. Il contorno di Γ è ovviamente costituito da $S^{(t+dt)}$, da $S^{(t)}$ e da una *superficie laterale*, che denoteremo con Σ, generata dal moto di σ nel considerato intervallo di tempo.

Designato con χ il vettore unitario normale in V_{m+1}, a $S^{(t)}$, diretto nel verso del moto, cioè tale che riesca positivo il prodotto interno (χ, v), e con χ' l'analogo vettore nei punti di $S^{(t+dt)}$, saranno χ' e $-\chi$ i vettori unitari normali al contorno di Γ e rivolti verso l'esterno, sulle sue basi $S^{(t+dt)}$ ed $S^{(t)}$. Quanto al vettore normale a Σ e diretto all'esterno di Γ, esso è dato ovviamente da

$$\{\tau^{(m-1)}, v\}_{V_{m+1}} \; : \; \mathrm{mod}\,\{\tau^{(m-1)}, v\}_{V_{m+1}}$$

dove $\tau^{(m-1)}$ è l'$(m-1)$-vettore unitario tangente a σ, orientato in quel verso per cui, con n normale esterna di σ in V_m, è $\{n, \tau^{(m-1)}\}_{V_{m+1}} = \chi$.

3. Sia ora $\mathbf{X}^{(p)}$ un tensore qualunque di ordine p definito in V_n e vogliasi calcolare la derivata sostanziale dell'integrale esteso ad S in V_m:

$$\mathfrak{J} = \int_S (\mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\chi})_{[k]}\, dS. \tag{3}$$

Si ha ovviamente

$$d\mathfrak{J} = \partial_t \mathfrak{J} + \partial_s \mathfrak{J}, \tag{4}$$

dove $\partial_t \mathfrak{J}$ è il differenziale parziale di $\mathfrak{J}$, quale risulta dal supporre S fissa in V_n e dal tener solo conto della variazione locale nel tempo di $\mathbf{X}^{(p)}$, mentre $\partial_s \mathfrak{J}$ è il differenziale parziale di $\mathfrak{J}$ risultante dal moto di S. Rendendo espliciti i due termini a secondo membro di (4), otteniamo:

$$\frac{d}{dt}\int_S (\mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\chi})_{[k]}\, dS = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{X}^{(p)}}{\partial t}, \boldsymbol{\chi}\right)_{[k]} dS +$$

$$+ \frac{1}{dt}\left[\int_{S^{(t+dt)}} (\mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\chi}')_{[k]}\, dS^{(t+dt)} - \int_{S^{(t)}} (\mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\chi})_{[k]}\, dS^{(t)}\right],$$

ossia

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{X}^{(p)}}{\partial t}, \boldsymbol{\chi}\right)_{[k]} dS + \frac{1}{dt}\int_\Sigma (\mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\chi})_{[k]}\, d\Sigma - \tag{5}$$

$$- \int_\sigma (\boldsymbol{\chi}^{(p)}, \{\boldsymbol{\tau}^{(m-1)}, \boldsymbol{v}\}_{V_{m+1}})_{[k]}\, d\sigma.$$

L'ultimo integrando si può trasformare osservando che è

$$(\mathbf{X}^{(p)}, \{\boldsymbol{\tau}^{(m-1)}, \boldsymbol{v}\}_{V_{m+1}})_{[k]} \equiv X_{i_1\cdots i_k\cdots i_p}\, \varepsilon^{i_k j_1\cdots j_{m-1} i_m}\, \tau_{j_1\cdots j_{m-1}}\, v_{i_m} =$$

$$= (-1)^{m-1}\, \varepsilon^{j_1\cdots j_{m-1} i_k i_m}\, X_{i_1\cdots i_k\cdots i_p}\, v_{i_m}\, \tau_{j_1\cdots j_{m-1}} \equiv \tag{6}$$

$$\equiv (-1)^{m-1} (\{\mathbf{X}^{(p)}_{(i_k)}, \boldsymbol{v}\}_{V_{m+1}}, \boldsymbol{\tau}^{(m-1)}),$$

dove l'indice (i_k) denota che il prodotto vettore è fatto con solo riguardo a tale indice, tra tutti quelli di $\mathbf{X}^{(p)}$.

Applicando allora al secondo termine a destra di (5) il teorema della divergenza, e al terzo, trasformato mediante (6), il teorema di Stockes, e inoltre osservando che è $d\Gamma = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\chi})\, dS$, otteniamo:

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \int_S \left(\left[\frac{\partial \mathbf{X}^{(p)}}{\partial t} + \mathrm{Div}_{[k]}\, \mathbf{X}^{(p)} \cdot \boldsymbol{v} + (-1)^m\, \mathrm{Rot}_{V_{m+1}}\{\mathbf{X}^{(p)}_{(i_p)}, \boldsymbol{v}\}\right], \boldsymbol{\chi}\right) dS. \tag{7}$$

Se, in particolare, V_n è l'ordinario S_3 euclideo, $\mathbf{X}^{(p)}$ un vettore semplice $\boldsymbol{u}$, V_m un'ordinaria superficie V_2, se, inoltre, come più spesso si suole in tali circostanze, scriviamo $\boldsymbol{n}$ e σ in luogo di $\boldsymbol{\chi}$ e di S, la precedente diventa:

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})\, d\sigma = \int_\sigma \left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} + \mathrm{rot}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}\right], \boldsymbol{n}\right) d\sigma, \tag{8}$$

formula di uso frequente nella Fisica matematica.

Tornando alla (7) e riferendoci ad un rilievo fatto in principio, osserviamo che essa continua a valere anche nel caso particolare che il moto considerato mantenga costantemente V_m sovrapposta a se stessa: soltanto, allora, per l'ortogonalità di $\boldsymbol{v}$ e di $\boldsymbol{\chi}$, si annulla in essa il secondo termine a destra.

4. Consideriamo ora, in luogo di (3), tutte le rimanenti posizioni rimanendo invariate, l'integrale

$$\mathfrak{L} = \int_S (\mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\tau}^{(m)})\, dS, \tag{9}$$

dove $\boldsymbol{\tau}^{(m)}$ è l'm–vettore tangente a V_m nei punti di S. Per il calcolo della derivata sostanziale di $\mathfrak{L}$, partiamo ancora dalla (4). Otteniamo così:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \int_{S(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{X}^{(p)}}{\partial t}, \boldsymbol{\tau}^{(m)} \right) dS + \int_{S(t+dt)} (\mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\tau}^{(m)})\, dS^{(t+dt)} -$$

$$- \int_{S(t)} (\mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\tau}^{(m)})\, dS^{(t)} = \int_{S(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{X}^{(p)}}{\partial t}, \boldsymbol{\tau}^{(m)} \right) dS +$$

$$+ \int_{\Sigma} (\mathbf{X}^{(p)}, \boldsymbol{\tau}^{(m)})\, d\Sigma - \int_{\sigma} (\mathbf{X}^{(p)}, \operatorname{Sup}\{ \boldsymbol{\tau}^{(m-1)}, \boldsymbol{v} \})\, d\sigma. \tag{10}$$

Limitiamoci, per semplicità, al caso $p = m$, che è, del resto, il più frequente nelle applicazioni. Si ha allora

$$(\mathbf{X}^{(m)}, \operatorname{Sup}\{ \boldsymbol{\tau}^{(m-1)}, \boldsymbol{v} \}) \equiv \frac{1}{m!\,(n-m)!\,(m-1)!} X^{i_1 \cdots i_m} \mathcal{E}^{r_1 \cdots r_{n-m} j_1 \cdots j_{m-1} j_m} \times$$

$$\times \mathcal{E}_{i_1 \cdots i_m r_1 \cdots r_{n-m}} \tau_{j_1 \cdots j_{m-1}} v_{j_m} = (-1)^{m(n-m)} (\operatorname{Sup} \mathbf{X}^{(m)}, \{ \boldsymbol{\tau}^{(m-1)}, \boldsymbol{v} \}).$$

Posto ora, per brevità $\operatorname{Sup} \mathbf{X}^{(m)} = \mathbf{Y}^{(n-m)}$, la precedente diventa:

$$(-1)^{(n-m)m} \frac{1}{(n-m)!\,(m-1)!} Y_{i_1 \cdots i_{n-m}} \mathcal{E}^{i_1 \cdots i_{n-m} j_1 \cdots j_{m-1} j_m} \tau_{j_1 \cdots j_{m-1}} v_{j_m} =$$

$$= (-1)^{(n-m)} \frac{1}{(n-m)!\,(m-1)!} \mathcal{E}^{j_1 \cdots j_{m-1} i_1 \cdots i_{n-m} j_m} Y_{i_1 \cdots i_{n-m}} \tau_{j_1 \cdots j_{m-1}} v_{j_m} =$$

$$= (-1)^{(n-m)} (\{ \mathbf{Y}^{(n-m)}, \boldsymbol{v} \}, \boldsymbol{\tau}^{(m-1)}).$$

Con ciò l'ultimo termine del secondo membro di (10) diventa

$$- (-1)^{(n-m)} \int_{\sigma} (\{ \mathbf{Y}^{(n-m)}, \boldsymbol{v} \}, \boldsymbol{\tau}^{(m-1)})\, d\sigma,$$

ossia, in virtù del teorema (2) di Stockes:

$$(11)\qquad \int_S \mathbf{Rot}\,(\mathbf{X}^{(m)}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{\chi}^{(n-m)})\, dS =$$

$$= (-1)^{m(n-m)} \int_S \{\,\mathbf{Grad}\,(\mathbf{X}^{(m)}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{\chi}^{(n-m)}\}\, dS =$$

$$= (-1)^{m(n-m)} \int_S (\mathbf{Grad}\,(\mathbf{X}^{(m)}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{\tau}^{(m)})\, dS$$

con $\boldsymbol{\tau}^{(m)}$ m—vettore unitario tangente a V_m.

Sostituendo (11) in luogo dell'ultimo termine di (10) e trasformando il penultimo mediante il teorema di Stockes, otteniamo infine:

$$(12)\qquad \frac{d}{dt}\int_S (\mathbf{X}^{(m)}, \boldsymbol{\tau}^{(m)})\, dS = \int_S \left[\left(\frac{\partial \mathbf{X}^{(m)}}{\partial t} - (-1)^{m(n-m-1)}\{\,\mathbf{Rot}\,\mathbf{X}^{(m)}, \boldsymbol{v}\,\} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (-1)^{m(n-m)}\,\mathbf{Grad}\,(\mathbf{X}^{(m)}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{\tau}^{(m)}\right], \boldsymbol{\tau}^{m}\right) dS.$$

Nel caso che V_n si riduca all'ordinario S_3 euclideo e V_m ad una curva l di S_3, di cui S è un assegnato arco sostanziale $\widehat{AB}$, posto $\mathbf{X}^{(m)} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\tau}^{(m)} = \boldsymbol{t}$ e $dS = ds$, la precedente diviene:

$$(13)\qquad \frac{d}{dt}\int_A^B (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})\, ds = \int_A^B \left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} + \mathrm{grad}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\right], \boldsymbol{t}\right) ds,$$

formula, come la (8), di uso frequente nella Fisica matematica.

Matematica. — *Sul flusso di una funzione armonica* (*). Nota di G. Fichera, presentata (**) dal Socio M. Picone.

Sia D un dominio dello spazio a r dimensioni limitato esternamente dalla ipersuperficie chiusa Σ_1 ed internamente dalla Σ_2. Indicata con Σ una ipersuperficie chiusa contenuta in D e che racchiude la Σ_2, dicesi *flusso* di una funzione u armonica in D, relativo a Σ_2, il valore del seguente integrale

$$\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma$$

che, com'è noto, non dipende da Σ.

Il prof. Picone, in una sua ricerca in corso sul problema della torsione elastica di un cilindro cavo, ha dimostrato che se D è un dominio piano e

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 13 marzo 1948.

se $u(P)$ è continua in D e armonica nell'interno e se gl'intervalli dei valori che $u(P)$ assume rispettivamente sulle curve Σ_1 e Σ_2 sono separati, il flusso della u è diverso da zero.

Scopo di questa Nota è di estendere questo teorema al caso di r qualunque. Se per conseguire tale estensione si volesse adottare un procedimento analogo a quello usato dal prof. Picone per $r = 2$ si dovrebbero superare notevoli difficoltà su questioni di topologia delle varietà a più dimensioni, e pertanto ci varremo di un diverso metodo che ci condurrà anche a stabilire una formola esprimente il flusso della funzione armonica u, noti che siano i suoi valori su Σ_1 e Σ_2 e il vettore autosoluzione di un ben determinato sistema di equazioni integrali.

Supponiamo in un primo momento che le due ipersuperficie Σ_1 e Σ_2, costituenti la frontiera del dominio D dello spazio $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$, $(r > 2)$ siano tali che in ogni punto M di Σ_i $(i = 1, 2)$ esista l'iperpiano tangente π ed, assunto questo come iperpiano coordinato di equazione $x_r = 0$ e la normale a Σ_i in M come asse x_r, esista una porzione di ipersuperficie di Σ_i contenente M proiettantesi su π in un dominio circolare Γ di centro M ed avente equazione $x_r = f(x_1, x_2, \cdots, x_{r-1})$, essendo f continua in Γ assieme alle sue derivate parziali prime e seconde.

Sia $u(P)$ una funzione continua in D e verificante in D $\mathfrak{F}$D [1] l'equazione $\Delta_2 u = 0$. Cominciamo col dimostrare che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè $u(P)$ abbia nullo il flusso relativo a Σ_2 è che esistano due funzioni $\varphi_1(Q)$ e $\varphi_2(Q)$ definite rispettivamente su Σ_1 e Σ_2 tali che si abbia in D $-$ $\mathfrak{F}$D

$$u(P) = \int_{\Sigma_1} \varphi_1(Q_1) \frac{\partial}{\partial n_{Q_1}} \frac{1}{\overline{PQ_1}^{r-2}} d\sigma(Q_1) + \int_{\Sigma_2} \varphi_2(Q_2) \frac{\partial}{\partial n_{Q_2}} \frac{1}{\overline{PQ_2}^{r-2}} d\sigma(Q_2) \text{ [2]}.$$

Si ha infatti, detta n_P la normale nel punto P a Σ

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n_P} d\sigma = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Sigma} d\sigma(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \int_{\Sigma_i} \varphi_i(Q_i) \frac{\partial}{\partial n_{Q_i}} \frac{1}{\overline{PQ_i}^{r-2}} d\sigma(Q_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_{\Sigma_i} \varphi_i(Q_i) d\sigma(Q_i) \frac{\partial}{\partial n_{Q_i}} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{\overline{PQ_i}^{r-2}} d\sigma(P).$$

Ma poichè Q_1 è esterno al dominio limitato da Σ e Q_2 è invece interno, si ha, detta $2k_r$ la misura ipersuperficiale dell'ipersfera di raggio uno:

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{\overline{PQ_1}^{r-2}} d\sigma(P) = 0 \quad , \quad \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{\overline{PQ_2}^{r-2}} d\sigma(P) = (r-2)\, 2k_r$$

(1) Indico con $\mathfrak{F}$D la frontiera del dominio D.

(2) Sulla normale n_{Q_i} $(i = 1, 2)$ a Σ_i nel punto Q_i supponiamo positivo il verso che va dall'esterno all'interno di D.

e quindi:

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n_P}\, d\sigma = 0, \tag{2}$$

epperò la condizione è sufficiente.

Indichiamo con $U_1(M)$ e $U_2(M)$ i valori che la funzione $u(P)$ assume nei punti M_1 ed M_2 rispettivamente su Σ_1 e su Σ_2. Per dimostrare che la condizione è necessaria occorre far vedere che, se è verificata la (2), il seguente sistema di equazioni integrali di Fredholm ammette soluzione per il valore del parametro $\lambda = 1$:

$$\left\{\begin{aligned} U_1(M_1) &= (r-2)\,k_r\,\varphi_1(M_1) + \lambda \int_{\Sigma_1} \varphi_1(Q_1)\,\frac{\partial}{\partial n_{Q_1}}\,\frac{1}{\overline{M_1 Q_1}^{r-2}}\,d\sigma(Q_1) + \\ &\quad + \lambda \int_{\Sigma_2} \varphi_2(Q_2)\,\frac{\partial}{\partial n_{Q_2}}\,\frac{1}{\overline{M_1 Q_2}^{r-2}}\,d\sigma(Q_2), \\ U_2(M_2) &= (r-2)\,k_r\,\varphi_2(M_2) + \lambda \int_{\Sigma_1} \varphi_1(Q_1)\,\frac{\partial}{\partial n_{Q_1}}\,\frac{1}{\overline{M_2 Q_1}^{r-2}}\,d\sigma(Q_1) + \\ &\quad + \lambda \int_{\Sigma_2} \varphi_2(Q_2)\,\frac{\partial}{\partial n_{Q_2}}\,\frac{1}{\overline{M_2 Q_2}^{r-2}}\,d\sigma(Q_2). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Il sistema omogeneo associato ha per $\lambda = 1$ l'autosoluzione costituita dal vettore $\{0, 1\}$. Dimostriamo che l'autovalore 1 ha rango 1. Si consideri il sistema omogeneo trasposto

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= (r-2)\,k_r\,\psi_1(M_1) + \lambda \int_{\Sigma_1} \psi_1(Q_1)\,\frac{\partial}{\partial n_{M_1}}\,\frac{1}{\overline{M_1 Q_1}^{r-2}}\,d\sigma(Q_1) + \\ &\quad + \lambda \int_{\Sigma_2} \psi_2(Q_2)\,\frac{\partial}{\partial n_{M_1}}\,\frac{1}{\overline{M_1 Q_2}^{r-2}}\,d\sigma(Q_2), \\ 0 &= (r-2)\,k_r\,\psi_2(M_2) + \lambda \int_{\Sigma_1} \psi_1(Q_1)\,\frac{\partial}{\partial n_{M_1}}\,\frac{1}{\overline{M_2 Q_1}^{r-2}}\,d\sigma(Q_1) + \\ &\quad + \lambda \int_{\Sigma_2} \psi_2(Q_2)\,\frac{\partial}{\partial n_{M_2}}\,\frac{1}{\overline{M_2 Q_2}^{r-2}}\,d\sigma(Q_2). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

e ammettiamo che $\{\psi_1, \psi_2\}$ e $\{\psi_1', \psi_2'\}$ siano due vettori linearmente indipendenti autosoluzioni, per $\lambda = 1$, di detto sistema. Si consideri la funzione

$$w(P) = \int_{\Sigma_1} [c_1\,\psi_1(Q_1) + c_2\,\psi_1'(Q_1)]\,\frac{1}{\overline{PQ_1}^{r-2}}\,d\sigma(Q_1) + \\ + \int_{\Sigma_2} [c_1\,\psi_2(Q_2) + c_2\,\psi_2'(Q_2)]\,\frac{1}{\overline{PQ_2}^{r-2}}\,d\sigma(Q_2).$$

Tale funzione, qualunque siano le costanti c_1 e c_2, è identicamente nulla all'esterno di Σ_1, poichè essendo ivi armonica è inoltre infinitesima all'infinito laddove ha nulla la sua derivata normale su Σ_1 (3). Essa è costante nel dominio limitato da Σ_2 dato che ha nulla la sua derivata normale su Σ_2 epperò possono scegliersi le costanti c_1 e c_2 non entrambe nulle ed in modo che $w(P)$ sia nulla in tale dominio. Ne segue che $w(P)$ è anche nulla in D, perchè è ivi armonica e si annulla tanto su Σ_1 che su Σ_2, e quindi $w(P)$ è nulla in tutto lo spazio ciò che implica

$$c_1 \psi_1 + c_2 \psi_1' \equiv 0 \qquad c_1 \psi_2 + c_2 \psi_2' \equiv 0$$

contrariamente a quanto si era ammesso.

Detto $\{\psi_1(Q_1), \psi_2(Q_2)\}$ il vettore autosoluzione del sistema (4) per $\lambda = 1$, condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (3) abbia per tal valore del parametro soluzione è che riesca

$$(5) \qquad \int_{\Sigma_1} U_1(Q_1)\,\psi_1(Q_1)\,d\sigma(Q_1) + \int_{\Sigma_2} U_2(Q_2)\,\psi_2(Q_2)\,d\sigma(Q_2) = 0.$$

Procedendo per assurdo supponiamo che essendo verificata la (2) non lo sia la (3). Osserviamo intanto che la funzione $\frac{1}{\overline{OP}^{r-2}}$, essendo O un punto scelto in modo arbitrario nel dominio limitato da Σ_2, non verifica la (5) perchè nel caso contrario dovrebbe esser rappresentata in D con potenziali di doppio strato, epperò avrebbe flusso nullo ciò che non è. Resta allora determinata la costante c non nulla tale che

$$\int_{\Sigma_1} \left[U_1(Q_1) - c\,\frac{1}{\overline{OQ_1}^{r-2}} \right] \psi_1(Q_1)\,d\sigma(Q_1) +$$

$$+ \int_{\Sigma_2} \left[U_2(Q_2) - c\,\frac{1}{\overline{OQ_2}^{r-2}} \right] \psi_2(Q_2)\,d\sigma(Q_2) = 0.$$

(3) Nel caso $r = 2$ alla funzione $\frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}}$ si deve sostituire la funzione $\log \overline{PQ}$. Anche in tal caso la funzione

$$w(P) = \int_{\Sigma_1} [c_1 \psi_1(Q_1) + c_1 \psi_1'(Q_1)] \log \overline{PQ}_1\,d\sigma(Q_1) + \int_{\Sigma_2} [c_1 \psi_2(Q_1) - c_1 \psi_2'(Q_1)] \log \overline{PQ}_2\,d\sigma(Q_2)$$

è infinitesima all'infinito. Si ha infatti detto O un punto interno a Σ_1

$$w(P) = w_0(P) + \log \overline{OP} \left\{ \int_{\Sigma_1} (c_1 \psi_1 + c_2 \psi_1')\,d\sigma + \int_{\Sigma_2} (c_1 \psi_2 + c_2 \psi_2')\,d\sigma \right\}$$

con $w_0(P)$ infinitesima all'infinito. D'altronde al coefficiente di $\log OP$ è nullo dato che il vettore $\{1, 1\}$ è autosoluzione del trasposto di (4) per il valore del parametro $\lambda = -1$.

La funzione armonica $\bar{u}(P)$ per la quale si ha

$$\bar{u}(Q_1) = U_1(Q_1) - c\,\frac{1}{\overline{OQ_1}^{r-2}} \qquad \text{per } Q_1 < \Sigma_1,$$

$$\bar{u}(Q_2) = U_2(Q_2) - c\,\frac{1}{\overline{OQ_2}^{r-2}} \qquad \text{per } Q_2 < \Sigma_2,$$

ha flusso nullo essendo rappresentabile con doppi strati e pertanto essendo

$$u(P) = \bar{u}(P) + \frac{c}{\overline{OP}^{r-2}}$$

ne verrebbe che $u(P)$ ha flusso diverso da zero contrariamente all'ipotesi. Resta così dimostrato che $u(P)$ verifica la (5) e quindi che sussiste la (1). Si è in pari tempo dimostrato che

Indicato con $\{\psi_1(Q_1), \psi_2(Q_2)\}$ *il vettore autosoluzione del sistema* (4) *per* $\lambda = 1$, *comunque si fissi* O *nell'interno di* Σ_2, *si ha*

$$(6)\qquad \int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = (r-2)\,2k_r\,\frac{\displaystyle\int_{\Sigma_1} U_1(Q_1)\psi_1(Q_1)\,d\sigma(Q_1) + \int_{\Sigma_2} U_2(Q_2)\psi_2(Q_2)\,d\sigma(Q_2)}{\displaystyle\int_{\Sigma_1} \frac{\psi_1(Q_1)}{\overline{OQ_1}^{r-2}}\,d\sigma(Q_1) + \int_{\Sigma_2} \frac{\psi_2(Q_2)}{\overline{OQ_2}^{r-2}}\,d\sigma(Q_2)} \quad (4)$$

Possiamo ora dimostrare che

Se gli intervalli dei valori assunti da $U_1(Q_1)$ *e* $U_2(Q_2)$ *sono separati la* $u(P)$ *ha flusso diverso da zero.*

La funzione

$$w(P) = \int_{\Sigma_1} \psi_1(Q_1)\,\frac{1}{\overline{PQ_1}^{r-2}}\,d\sigma(Q_1) + \int_{\Sigma_2} \psi_2(Q_2)\,\frac{1}{\overline{PQ_2}^{r-2}}\,d\sigma(Q_2)$$

è nulla all'esterno di Σ_1 ed è costante nell'interno di Σ_2. Noi supporremo che anzi valga 1 nell'interno di Σ_2. Basterà per questo moltiplicare il vettore $\{\psi_1, \psi_2\}$ per un'opportuna costante. Ne segue che la (1) fornisce la funzione armonica in D che si annulla sul contorno esterno e che vale 1 su quello interno. Fissato Q_1, su Σ_1 diciamo P e P′ due punti sulla normale a Σ_1, in Q_1, il primo interno a D e il secondo esterno. Si ha

(4) Siano Σ_1 e Σ_2 due ipersfere concentriche in O di raggio R_1 ed R_2. Si ha allora com'è ovvio constatare

$$\psi_1(Q_1) = 1 \quad , \quad \psi_2(Q_2) = -\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{r-1}.$$

Detta ω l'ipersfera unitaria con centro in O indicheremo con (ρ, P_ω) il punto P dello spazio avente distanza ρ da O e tale che la semiretta OP sega ω in P_ω. Si ha allora dalla (6)

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = \frac{r-2}{R_1^{2-r} - R_2^{2-r}} \int_{\omega} [u(R_1, Q\omega) - u(R_2, Q\omega)]\,d\omega.$$

Tale formola può direttamente ottenersi nella ulteriore ipotesi che la funzione $u(\rho, P_\omega)$ per ogni fissato P_ω su ω sia funzione di ρ assolutamente continua nell'intervallo (R_2, R_1).

$$\lim_{P' \to Q_1 \left(\text{su } n^-_{Q_1}\right)} \frac{\partial w(P')}{\partial n_{Q_1}} - \lim_{P' \to Q_1 \left(\text{su } n^+_{Q_1}\right)} \frac{\partial w(P)}{\partial n_{Q_1}} = \psi_1(Q_1).$$

D'altronde è

$$\lim_{P' \to Q_1 \left(\text{su } n_{Q_1}\right)} \frac{\partial w(P')}{\partial n_{Q_1}} = 0$$

mentre essendo $w(P)$ - considerata come funzione del punto P di $n^+_{Q_1}$ - minima in Q_1 riesce

$$\lim_{P \to Q_1 \left(\text{su } n^+_{Q_1}\right)} \frac{\partial w(P)}{\partial n_{Q_1}} \geqq 0$$

e pertanto è in Σ_1: $\psi_1(Q_1) \leqq 0$.

Con analoghe considerazioni si dimostra che è $\psi_2(Q_2) \geqq 0$. Aggiungendo eventualmente alla $u(P)$ una opportuna costante, con che non si altera il valore del suo flusso, possiamo ridurci al caso che gli intervalli dei valori di $U_1(Q_1)$ e $U_2(Q_2)$ siano costituiti l'uno da numeri tutti di un segno e l'altro di numeri di segno opposto. D'altra parte l'insieme Σ'_1 dei punti di Σ_1 nei quali si ha $\psi_1(Q_1) < 0$ deve avere misura positiva e così pure l'insieme Σ'_2 dove $\psi_2(Q_2) > 0$. Infatti poichè il vettore $\{1, 1\}$ è autosoluzione per $\lambda = -1$ del sistema omogeneo associato al sistema (3) cioè al trasporto di (4) deve aversi

$$\int_{\Sigma_1} \psi_1(Q_1)\, d\sigma + \int_{\Sigma_2} \psi_2(Q_2)\, d\sigma = 0$$

e se fosse $\psi_1(Q_1) = 0$ in Σ_1 ne verrebbe $\psi_2(Q_2) = 0$ in Σ_2 e viceversa. Ne segue che le funzioni $U_1\psi_1$ e $U_2\psi_2$ sono o entrambe positive o entrambe negative rispettivamente in Σ'_1 e in Σ'_2 e quindi non può sussistere la (5), cioè la $u(P)$ ha flusso non nullo.

Il teorema è stato dimostrato per un dominio D la cui frontiera verifichi le ipotesi di regolarità su specificate, ma può facilmente estendersi ad una classe di dominî assai generali. Sia infatti D un dominio la cui frontiera è costituita da due continui Σ_1 e Σ_2 senza punti in comune e tale che comunque si assegni $\rho > 0$ esista un dominio $T^{(\rho)}$ contenuto in D la cui frontiera è costituita da due ipersuperficie che godono delle suddette proprietà di regolarità, riuscendo inoltre la $\Sigma_1^{(\rho)}$ contenuta nell'involucro di raggio ρ [5] di Σ_1 e $\Sigma_2^{(\rho)}$ in quello di egual raggio di Σ_2. Allora se la $u(P)$ è continua in D e armonica in $D - \mathfrak{F}D$ e se gli intervalli dei valori che essa assume su Σ_1 e su Σ_2 sono separati il suo flusso relativo a Σ_2 è diverso da zero. Infatti, pur di prendere ρ convenientemente piccolo, tali riescono, per la uniforme continuità di $u(P)$ in D, gli intervalli dei valori che essa assume su $\Sigma_1^{(\rho)}$ e $\Sigma_2^{(\rho)}$, e quindi – per il teorema dimostrato – il flusso della u relativo alla $\Sigma_2^{(\rho)}$, cioè a Σ_2, è diverso da zero.

(5) Dicesi involucro di raggio ρ di un insieme E l'insieme di tutti i punti dello spazio che hanno da E distanza inferiore a ρ.

Matematica. — *Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné.* Nota di MIROSLAW KRZYŻAŃSKI, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

J'ai publié dans le XIX vol. (1945) des « Annales de la Soc. Polonaise de Methématique » (1) mes résultats, concernant l'équation linéaire du type parabolique, obtenues pendant la première moitié de la guerre. J'y traitais des solutions de cette équation, déterminées dans une couche illimitée. J'ai démontré, en particulier, qu'une telle solution est la limite des solutions de la même équation, déterminées dans les domaines bornés (à savoir, les parallélipipèdes).

J'ai remarqué dernièrement que la méthode appliquée dans la démonstration de ce théorème, s'étend aux équations du type elliptique, de sorte qu'on peut énoncer un théorème général, qui peut être appliqué ensuite à certaines formes spéciales de l'équation du type elliptique.

Pendant la guerre et aux dernières années parurent des nombreux travaux des Mathématiciens italiens, traitant des problèmes aux limites dans les domaines non bornés (2). Celui de M. L. Amerio contient un théorème d'existence rapproché du mien. L'auteur suppose que la solution du problème de Dirichlet, pour l'équation homogène, dans un domaine borné est donnée sous la forme d'une intégrale, contenant un noyau $H(P, Q)$ (3), continu lorsque $P \neq Q$ et effectue ensuite un passage à la limite selon le théorème d'Arzelà–Lebesgue sur l'intégration des suites de fonctions.

Dans le théorème de la Note présente je ne fais aucune hypothèse sur la forme sous laquelle est représentée la solution du problème de Dirichlet dans un domaine borné.

1. Soit

$$(1) \qquad \mathcal{E}[u] \equiv \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1948.

(1) Pp. 145–156.

(2) Voir p. ex: L. AMERIO, *Teoremi di esistenza per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico, nei dominî illimitati.* « Rendiconti della Reale Accad. d'Italia », ser. VII, vol. IV (1943), fasc. 8, pp. 1–12; D. CALIGO, *Sul problema di Dirichlet per l'iperstrato.* « Rend. dell'Accad. Nazion. dei Lincei », ser. VIII, vol. I (1946), pp. 534–539; C. BIRINDELLI, *Nuova trattazione di problemi al contorno.* « Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. II (1947) pp. 269–275.

(3) Dans les formules représentant la solution du problème de Dirichlet dans un domaine borné c'est, à un facteur constant près, la dérivée transversale de la fonction de Green généralisée, relative à l'équation (1) et à ce domaine. Voir M. GEVREY, *Détermination et emploie des fonctions de Green* . . . « Journal de Math. », IX, p. 60, (1930).

une équation linéaire du type elliptique, a_{ik}, b_j, c et f étant des fonctions continues des variables $x_j (j = 1, 2, \cdots, m)$, c'est à dire du point $P(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, dans un domaine fermé non borné D à m dimensions, dont la frontière sera designée par FD. La forme $\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \lambda_i \lambda_k$ est supposée définie positive.

On dit qu'une fonction u est une *solution régulière* de l'équation (1) dans le domaine D ou dans un domaine fermé $\Delta \subset D$, lorsqu'elle y est continue, admet les dérivées du second ordre continues à l'intérieur de D, resp. Δ et y satisfait à l'équation (1).

On appelle *la solution du problème de Dirichlet* généralisé dans un domaine fermé Δ (borné, ou non, contenu dans D, ou identique à D) avec les conditions aux limites $u = \varphi(P)$ sur la frontière FΔ de Δ une solution régulière de (1) dans Δ, se réduisant à une fonction continue, donnée $\varphi(P)$ sur FΔ.

THÉORÈME I. — *On suppose que*:

1° *il existe une fonction* $H(P, k)$ *du point* P *et du paramètre* k, *déterminée pour* $P \in D$ *et* $0 < k < k_0$, *admettant les dérivées partielles du second ordre par rapport aux* $x_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ *continues, jouissant, en outre, des propriétés suivantes*:

a) $H(P, k) > 0$ *pour* $P \in D$;

b) $\mathfrak{L}[H] < 0$ *et, en outre, à chaque valeur positive de* $k < k_0$ *correspond un nombre positif* $\delta(k)$, *tel que*: $\mathfrak{L}[H(P, k)] < -\delta(k) \cdot H(P, k)$ *lorsque* $P \in D$;

c) *lorsque* k_1 *et* k_2 *sont deux nombres positifs, tels que* $k_1 + k_2 < k_0$, *on a*: $\lim_{r(P) \to \infty} \frac{H(P, k_1)}{H(P, k_1 + k_2)} = 0$, $r(P)$ *désignant* $\left(\sum_{p=1}^{m} x_p^2 \right)^{1/2}$;

2° $\Phi(P)$ *est une fonction donnée, continue dans* D;

3° *il existe deux nombres positifs* M *et* $\bar{k} < k_0$, *tels que*:

$$|\Phi(P)| \leq M \cdot H(P, \bar{k}) \quad , \quad |f(P)| \leq M \cdot H(P, \bar{k})$$

pour $P \in D$;

4° $\{D_n\}$ *est une suite croissante de domaines fermés, bornés, détachés du domaine* D *par les surfaces fermées* S_n, *telles que* $\lim_{n \to \infty} d(S_n) = \infty$, $d(S_n)$ *désignant la distance de* S_n *de l'origine des coordonnées (les frontières* FD_n *des* D_n *se composent des parties de* FD *et de celles des* S_n);

5° *le problème de Dirichlet pour l'équation* (1) *est résoluble dans chaque domaine* D_n, *avec les conditions aux limites continues, arbitraires*;

6° $\{u_n\}$ *est une suite de solutions du problème de Dirichlet pour l'équation* (1) *dans les domaines* D_n, *avec les conditions aux limites*: $u_n = \Phi(P)$ *sur* FD_n.

Alors la suite $\{u_n\}$ *converge dans le domaine* D *vers une solution du problème de Dirichlet dans* D, *relatif à l'équation* (1), *avec les conditions aux limites*: $u = \Phi$ *sur* FD, *cette convergence étant uniforme dans tout domaine borné* $\Delta \subset D$. *En outre, dans le domaine* D *subsiste la limitation suivante*:

$$|u(P)| \leq M H(P, \bar{k}) [1 + \delta^{-1}(\bar{k})] \qquad \text{(voir 3° et 1° } b\text{)}.$$

Démonstration. – Je commence par démontrer la convergence de la suite $\{u_n\}$. Je pose:

$$v_n = u_n : \mathrm{H}(\mathrm{P}, \bar{k}) \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

La fonction v_n satisfait à l'intérieur du domaine D_n à l'équation:

$$(2) \qquad \mathcal{E}^*[v] \equiv \sum_{ik=1}^{m} a_{ik} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} b_j^* \frac{\partial v}{\partial x_j} + c^* v = f^*,$$

où $c^* = \frac{1}{\mathrm{H}} \mathcal{E}[\mathrm{H}] < 0$ (en vertu de 1° *b*) et $f^*(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}) : \mathrm{H}(\mathrm{P}, \bar{k})$. En vertu de 3°, $|f^*| \leq \mathrm{M}$.

J'introduis ensuite les fonctions:

$$z_n^{(1)} = v_n - \mathrm{M}[1 + \delta^{-1}(\bar{k})] \quad , \quad z_n^{(2)} = v_n + \mathrm{M}[1 + \delta^{-1}(\bar{k})], \quad (n = 1, 2, \cdots;$$

voir 1° *b*).

Ces fonctions satisfont à l'intérieur de D_n aux équations:

$$\mathcal{E}^*\left[z_n^{(r)}\right] = f^* + (-1)^r \cdot \mathrm{M}[1 + \delta^{-1}(\bar{k})]\, c^*, \quad (r = 1, 2 \; ; \; n = 1, 2, \cdots).$$

Or $c^* < -\delta(\bar{k})$, par suite: $\mathcal{E}^*\left[z_n^{(1)}\right] \geq \mathrm{M}\delta(\bar{k})$, et $\mathcal{E}^*\left[z_n^{(2)}\right] \leq -\mathrm{M}\delta(\bar{k})$, de sorte que $z_n^{(1)}$ ne peut pas atteindre à l'intérieur de D_n un maximum positif et $z_n^{(2)}$ n'y peut pas atteindre un minimum négatif[4]. Comme $|v_n| \leq \mathrm{M}$ sur FD_n, on a: $z_n^{(1)} \leq -\mathrm{M}\delta^{-1}(\bar{k}) < 0$ et $z_n^{(2)} \geq \mathrm{M}\delta^{-1}(\bar{k}) > 0$ sur FD_n et par suite: $z_n^{(1)} \leq 0$ et $z_n^{(2)} \geq 0$ dans D_n, c'est à dire, on a dans D_n:

$$(3) \qquad |v_n| \leq \mathrm{M}[1 + \delta^{-1}(\bar{k})].$$

Soit $p < q$, on a $|v_q| \leq \mathrm{M}[1 + \delta^{-1}(\bar{k})]$ dans D_q et en particulier sur FD_p.

La différence $v_p - v_q$ est à l'intérieur de D_p une solution de l'équation homogène:

$$(2)' \qquad \mathcal{E}^*[v] = 0$$

et l'on a sur FD_p l'inégalité:

$$(4) \qquad |v_p - v_q| \leq 2\,\mathrm{M}[1 + \delta^{-1}(\bar{k})]$$

(en vertu de (3)).

Soit:

$$w_{pq} = (u_p - u_q) : \mathrm{H}(\mathrm{P}, \bar{k} + k') = (v_p - v_q) \cdot \frac{\mathrm{H}(\mathrm{P}, \bar{k})}{\mathrm{H}(\mathrm{P}, \bar{k} + k')},$$

k' étant un nombre positif, tel que $\bar{k} + k' < k_0$.

D'après 1° *c*, 4° et (4), on peut choisir p assez grand pour que: $|w_{pq}| < \varepsilon$ sur S_p, ε étant un nombre positif, arbitrairement petit. On a, en outre: $w_{pq} = 0$ sur FD. Or la fonction w_{pq} est à l'intérieur de D_p une solution d'une

(4) Voir M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*. Napoli, p. 695 (1940).

équation homogène analogue à (2)', donc elle ne peut atteindre à l'intérieur de D_p ni un maximum positif, ni un minimum négatif, de sorte que: $|w_{pq}| < \varepsilon$ partout dans D_p.

Soit Δ un domaine fermé, borné, contenu dans D. Pour p assez grand, $\Delta \subset D_p$ (en vertu de 4°). Désignons par $\Omega(k)$ la borne supérieure de $H(P, k)$ pour $P \in \Delta$. On a:

$$|u_p - u_q| < \varepsilon \cdot \Omega(\bar{k} + k') \quad \text{pour} \quad P \in \Delta.$$

Il en résulte que la suite $\{u_n\}$ est uniformément convergente dans Δ. Or, Δ étant un domaine borné arbitraire, contenu dans D, cette suite est convergente partout dans D vers une fonction continue $u(P)$, se réduisant à $\Phi(P)$ sur FD.

Il reste à démontrer que la fonction u satisfait à l'équation (1) à l'intérieur de D.

Or soit p_0 un nombre entier, positif, arbitraire et U la solution du problème de Dirichlet dans D_{p_0}, relatif à l'équation (1) avec les conditions aux limites: $U = u$ sur FD_{p_0}. Pour $p > p_0$ assez grand on a:

$$|U - u_p| < \eta \quad \text{sur } FD_{p_0} \text{ et:} \tag{5}$$

$$|u - u_p| < \eta \quad \text{dans } D_{p_0}. \tag{6}$$

$\eta > 0$ étant petit à volonté.

Posons: $V(P) = U(P) : H(P, \bar{k})$ et soient $\Omega_{p_0}(\bar{k})$ et $\omega_{p_0}(\bar{k})$ les bornes, supérieure et inférieure, de $H(P, \bar{k})$ dans D_{p_0}.

En vertu de (5) on a:

$$|V - v_p| < \frac{\eta}{\omega_{p_0}} \quad \text{sur } FD_{p_0}. \tag{7}$$

Mais, $V - v_p$ étant une solution de l'équation (2)' à l'intérieur de D_{p_0}, elle n'y peut atteindre ni un maximum positif, ni un minimum négatif, de sorte que l'inégalité (7) subsiste partout dans D_{p_0}. On en conclut que:

$$|U - u_p| < \eta \cdot \frac{\Omega_{p_0}}{\omega_{p_0}} \quad \text{dans } D_{p_0}. \tag{8}$$

On déduit de (6) et (8) la limitation suivante:

$$|U - u| < \eta \left[\frac{\Omega_{p_0}}{\omega_{p_0}} + 1 \right]. \tag{9}$$

Or $\eta > 0$ étant petit à volonté, il résulte de (9) que $U \equiv u$ dans D_{p_0}, c'est à dire, u est à l'intérieur de D_{p_0} une solution régulière de (1). Mais, p_0 étant choisi d'une manière arbitraire, u est une solution régulière de (1) à l'intérieur de D. C'est donc une solution du problème de Dirichlet pour l'équation (1) dans D avec les conditions aux limites: $u(P) = \Phi(P)$ sur FD.

La suite v_n est aussi convergente dans D vers une fonction continue v, satisfaisant dans D à l'inégalité: $|v| \leq M[1 + \delta^{-1}(\bar{k})]$. Il en résulte que dans D subsiste la limitation:

$$u(P) \leq MH(P, \bar{k})[1 + \delta^{-1}(\bar{k})]. \tag{10}$$

2. Si les conditions 1° du théorème I sont vérifiées, l'unicité de la solution du problème de Dirichlet pour l'équation (1) dans le domaine D a lieu dans la classe (C) de fonctions $u(P)$, satisfaisant à la condition suivante: il existe deux nombres positifs M et $\bar{k} < k_0$ tels que:

$$(10)' \qquad |u(P)| \leq MH(P, \bar{k}).$$

Pour s'en assurer, il suffit de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME II. – *La seule solution du problème de Dirichlet relatif à l'équation homogène:*

$$(1)' \qquad \mathfrak{E}[u] = 0,$$

dans le domaine D, *s'annulant sur* FD *et appartenant à la classe* (C) *est* $u \equiv 0$ (5).

C'est une conséquence d'un théorème de M. Picone (6). En effet, soit $\{D_n\}$ une suite de domaines bornés, analogue à celle du théorème I; en choisissant k' de sorte que $\bar{k} + k' < k_0$ et en posant:

$$w(P) = u(P) : H(P, \bar{k} + k'),$$

on a pour n assez grand: $w(P) < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, arbitraire) sur la frontière FD_n du domaine D_n. Or l'inégalité dernière subsiste partout dans D_n, car $w(P)$ satisfait à l'intérieur de D_n à une équation analogue à (2)'. On en déduit que $w(P) \equiv 0$ et par suite $u(P) \equiv 0$ partout dans D.

Corollaire. – Soit $\varphi(P)$ une fonction continue sur FD. Si la fonction $\Phi(P)$ du théorème I se réduit à $\varphi(P)$ sur FD, satisfait à 3° et d'ailleurs est choisie d'une manière arbitraire, la fonction $u = \lim_{n \to \infty} u_n$ est une solution du problème de Dirichlet pour (1) dans D avec les conditions aux limites: $u = \varphi(P)$ sur FD. Or d'après le théorème II *cette limite est indépendante du choix de la fonction* $\Phi(P)$, à condition qu'elle se reduise à $\varphi(P)$ sur FD.

Remarque. – Les théorèmes qui viennent d'être enoncés s'appliquent aux équations normaux du *type parabolique* ($a_{im} = 0$ pour $i = 1, 2, \cdots, m$ dans (1), $b_m < 0$), avec une seule restriction concernant les domaines D et D_n. À savoir, les frontières FD, resp. FD_n se composent cette fois des deux plans caractéristiques $x_m = c_1$, $x_m = c_2$ ($c_1 < c_2$), ou des parties situées sur ces plans et des autres surfaces, ne contenant pas des parties, situées sur les plans caractéristiques. Les conditions aux limites ne concernent pas la partie de FD, resp. FD_n, située sur le plan caractéristique $x_m = c_2$.

Les théorèmes que j'ai démontré dans le travail, cité dans l'introduction, se déduisent aisément des théorèmes de la Note présente, conformés à l'équation du type parabolique, lorsqu'on adapte la forme de la fonction $H(P, k)$, employée dans le travail cité.

(5) Lorsque D est l'espace entière à m dimensions, il n'y a point de conditions aux limites; les frontières FD_n des domaines D_n sont les surfaces S_n elles mêmes. Les théorèmes I et II sont encore valables en tant que le problème de Dirichlet se réduise à la recherche d'une solution quelconque de l'équation (1) régulière dans l'espace entière.

(6) M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, pp. 701–703.

3. Appliquons maintenant les théorèmes, qui viennent d'être démontrés, à certaines formes particulières de l'équation (1).

On suppose dans la suite que les coefficients a_{ik} et b_j sont continus et bornés dans le domaine D (7). Je désigne par A_{ik} la borne supérieure de $|a_{ik}|$ dans D $(i, k = 1, 2, \cdots, m)$, par B_j celle de $|b_j|$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$. Soit ensuite: $A_m = \max_{i \leq m} A_{im}$, $\bar{A} = \max_{j \leq m} A_{jj}$, $B = \max_{j \leq m} B_j$, $B' = \max_{j \leq m-1} B_j$.

Je désigne ensuite par $\mathfrak{A}$ le plus petit des nombres $\mathfrak{A}$ tels, que $\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \lambda_i \lambda_k \leq \mathfrak{A} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2$ partout dans D et pour toutes les valeurs des λ_j. On a évidemment: $\mathfrak{A} \geq \bar{A}$. D'une manière analogue on fait correspondre le nombre $\mathfrak{A}'$ à la forme $\sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik} \lambda_i \lambda_k$.

Observons encore que si $|\lambda_j| \leq 1$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$, on a:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{jj} + \sum_{i,k=1}^{k+i} a_{ik} \lambda_i \lambda_k \leq m \mathfrak{A}.$$

En effet:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{jj} + \sum_{i,k=1}^{k+i} a_{ik} \lambda_i \lambda_k = \sum_{j=1}^{m} a_{jj} (1 - \lambda_j^2) + \sum_{i,k=1}^{m} a_{jk} \lambda_i \lambda_k \leq \bar{A} \sum_{j=1}^{m} (1 - \lambda_j^2) +$$

$$+ \mathfrak{A} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2 = m \bar{A} + (\mathfrak{A} - \bar{A}) \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2 \leq m \mathfrak{A}.$$

Dans la suite nous examinerons les cas suivants:

1° Soit $c < -\gamma < 0$ partout dans D, γ étant un nombre positif. Le domaine D peut être un domaine fermé, non borné quelconque (en particulier – l'espace à m dimensions entière), à condition qu'il existe une suite $\{D_n\}$ telle que les hypothèses 4° et 5° du théorème I soient verifiées.

Posons:

$$H(P, k) = \prod_{p=1}^{m} ch\, k x_p.$$

Observons que $H > 0$ et plus précisément:

$$\frac{1}{2^m} \exp. k \sum_{p=1}^{m} |x_p| < H < \exp. k \sum_{p=1}^{m} |x_p|.$$

Comme, en outre:

$$ch(\alpha + \beta) = ch\alpha\, ch\beta + sh\alpha\, sh\beta,$$

on a: $ch(\alpha + \beta) \geq ch\alpha\, ch\beta$ pour $\alpha \cdot \beta \geq 0$; par suite:

$$H(P, k_1 + k_2) \geq H(P, k_1) \cdot H(P, k_2)$$

et la condition 1° c de l'énoncé du théorème I est vérifiée.

(7) On suppose continuellement l'existence d'une suite $\{D_n\}$, telle que les hypothèses 4° et 5° du théorème I scient verifiées.

D'autre part:

$$\frac{\mathcal{E}(H)}{H} = k^2\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jj} + \sum_{ij=1}^{i\neq i}{}^{m} a_{ij}\, th\, kx_i \cdot th\, kx_j\right) + k\sum_{j=1}^{m} b_j\, th\, kx_j + c.$$

Comme $|th\, kx_j| < 1$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$, on a:

$$\frac{\mathcal{E}(H)}{H} < m\mathfrak{A}k^2 + m\mathrm{B}k - \gamma. \tag{11}$$

L'équation (en k):

$$m\mathfrak{A}k^2 + m\mathrm{B}k - \gamma = 0 \tag{12}$$

a une racine positive k_0 et une racine négative. Pour $0 < k < k_0$ le premier membre de (12) a une valeur négative, soit $-\delta(k)$; on deduit de (11) l'inégalité:

$$\frac{\mathcal{E}(H)}{H} < -\delta(k) \quad \text{pour} \quad 0 < k < k_0,$$

de sorte que la condition 1° b est aussi vérifiée.

Nous conviendrons de dire [8], qu'une fonction F(P) appartient à la classe $E_1(K)$ dans le domaine D, lorsqu'il existe deux nombres positifs M et $\bar{k} < K$ tels que $|F(P)| < Me^{\bar{k}\sum_{p=1}^{m}|x_p|}$ dans D.

Si $c < -\gamma < 0$ et si les fonctions continues $\Phi(P)$ et $f(P)$ appartiennent à la classe $E_1(k_0)$, il existe une solution, et une seule, du problème de Dirichlet pour (1) dans le domaine D avec les conditions aux limites: $u(P) = \Phi(P)$ sur FD, appartenant à la classe $E_1(k_0)$.

En particulier, la seule fonction continue, appartenant à la classe $E_1(k_0)$, satisfaisant à (1)′ à l'intérieur de D et s'annulant sur FD est $u \equiv 0$.

La seule solution, regulière dans l'espace entière, de l'équation (1)′, appartenant à la classe $E_1(k_0)$, est $u \equiv 0$.

Exemple. – Considérons l'équation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda^2 u = 0 \qquad (\lambda \neq 0, \text{ constant}). \tag{13}$$

L'équation (12) devient:

$$2k^2 - \lambda^2 = 0,$$

donc:

$$k_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

La fonction:

$$u = ch\frac{\lambda x}{\sqrt{2}}\, sh\frac{\lambda y}{\sqrt{2}} \qquad (y \geq 0)$$

est une solution de l'équation (13), s'annulant pour $y = 0$; or cette fonction n'appartient pas à la classe $E_1(k_0)$.

(8) Une classification analogue a été introduite dans mon travail, cité dans l'introduction.

2° $c \leqq 0$, $b_m \geqq 0$, $a_{mm} > \alpha > 0$, α étant un nombre constant; le domaine D est une couche: $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$, $0 \leqq x_m \leqq h$.

Posons:

$$H(P, k) = \cos \frac{\pi x_m}{2L} \prod_{p=1}^{m-1} ch\, k x_p .$$

$L > h$ étant une constante. On s'assure, comme dans le cas 1°, que les hypothèses 1° a et 1° c du théorème I sont vérifiées.

Cette fois:

$$\frac{\mathcal{E}(H)}{H} = k^2 \left(\sum_{j=1}^{m-1} a_{jj} + \sum_{ij=1}^{m-1}{}^{j+i} a_{ij}\, th\, k x_i\, th\, k x \right) +$$
$$+ k \left(\sum_{j=1}^{m-1} b_j\, th\, k x_j - \frac{\pi}{L}\, tg\, \frac{\pi x_m}{2L} \sum_{j=1}^{m-1} a_{mj}\, th\, k x_j \right) -$$
$$- b_m \frac{\pi}{2L}\, tg \frac{\pi x_m}{2L} - a_{mm} \frac{\pi^2}{4L^2} + c .$$

Soit:

$$T = tg \frac{\pi h}{2L} .$$

En reprenant les calculs du n-ro précédent, on obtient l'inégalité:

$$\frac{\mathcal{E}(H)}{H} < (m-1)\mathfrak{A}' k^2 + (m-1)\left[B' + \frac{\pi}{L} T A_m \right] k - \frac{\pi^2}{4L^2} \alpha .$$

Soit $\tau(k)$ le second membre de la dernière inégalité. On choisit cette fois pour k_0 la racine positive de l'équation $\tau(k) = 0$. Le nombre k_0 dépend de la hauteur h de la couche et des coefficients de l'équation (1).

Le problème de Dirichlet est résoluble, si $f(P)$ et $\Phi(P)$ appartiennent à la classe $E_1(k_0)$ en tant que les fonctions des $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ et la solution obtenue est unique dans la classe $E_1(k_0)$ (relativement aux variables $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$).

3° $c \leqq 0$, $b_m < -\beta < 0$, β étant un nombre constant, positif, le domaine D étant une couche analogue à celle du cas 2°, ou la demi-espace $x_m \geqq 0$ [9]. Je pose:

$$H(P, k, \lambda) = e^{\lambda k x_m} \prod_{p=1}^{m-1} ch\, k x_p ,$$

λ étant un nouveau paramètre. On s'assure aisément que les hypothèses 1° a et 1° c du théorème I sont verifiées.

En reprenant les calculs analogues à ceux relatifs aux cas précédents, on établit l'inégalité:

$$(14) \qquad \frac{\mathcal{E}[H]}{H} < \{(m-1)\mathfrak{A}' + A_m [2(m-1)\lambda + \lambda^2]\} k^2 - [\lambda\beta - (m-1)B'] k .$$

Soit: $\mathfrak{F}(\lambda) = (m-1)\mathfrak{A}' + A_m [2(m-1)\lambda + \lambda^2]$; $\mathfrak{L}(\lambda) = \lambda\beta - (m-1)B'$.

(9) On peut d'ailleurs ramener l'équation (1) à une telle forme par une substitution $u = u_1 , e^{\nu x_m}$, ν étant une constante convenablement choisie, lorsque $b_m < -\beta < 0$, $|c| < C$ (C — constante) et $\beta^2 - 4 A_m C \geq 0$.

Si $\lambda > (m-1)\frac{B'}{\beta}$, on a: $\mathfrak{L}(\lambda) > 0$.

Soit $K(\lambda) = \mathfrak{L}(\lambda) : \mathfrak{F}(\lambda)$; désignons par λ_0 la valeur de λ qui rend maximum $K(\lambda)$, par $K_0 = K(\lambda_0)$ la valeur correspondante de $K(\lambda)$.

Supposons que: $(m-1)\frac{B'}{\beta} < \lambda \leq \lambda_0$. Alors, pour $0 < k < K(\lambda)$, le second membre de (14) a une valeur négative, soit $-\delta(k, \lambda)$. En vertu de (14) on a: $\frac{\mathfrak{H}(H)}{H} < -\delta(k, \lambda)$.

Il en résulte que si $\Phi(P)$ et $f(P)$ sont de la classe $E_1(K(\lambda))$ en tant que les fonctions de x_j $(j \leq m-1)$ et de la classe $E(\lambda \cdot K(\lambda))$ en tant que les fonctions des x_m, il existe une solution $u(P)$ du problème de Dirichlet relatif à l'équation (1) avec les conditions aux limites: $u = \Phi(P)$ sur FD. Il existe en outre deux nombres positifs M et $\bar{k} < K(\lambda)$, tels que:

$$|u(P)| < M \exp.\left[\bar{k}\sum_{j=1}^{m-1}|x_j| + \lambda \bar{k} x_m\right](1 + \delta^{-1}(\bar{k})).$$

En particulier on peut choisir $\lambda = \lambda_0$ et on déduit alors du théorème II l'unicité de la solution du problème de Dirichlet pour (1) dans la classe $E_1(K_0)$.

Il est à remarquer que si $a_{mm} = \alpha > 0$, α étant un paramètre variable d'une manière indépendante du point P et $a_{im} = 0$ $(i \leq m-1)$, on a $A_m = \alpha$ et K_0 peut devenir supérieur à un nombre arbitraire, à condition que α soit suffisamment petit.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Mauro Picone qui m'a voulu bien faire connaître les résultats des fecondes recherches en matière de la théorie des équations aux dérivées partielles, executées dernièrement en Italie et à Monsieur le Professeur Tadeusz Ważewski de m'avoir signalé plusieurs remarques importants au sujét du présent travail.

Fisica (Fisica matematica). — *Su alcuni potenziali di strato e su qualche loro applicazione.* Nota di C. Cattaneo, presentata (*) dal Socio A. Signorini.

Svolgo in questa Nota brevi considerazioni su alcuni potenziali newtoniani di strato che possono utilmente intervenire nella risoluzione di particolari problemi armonici interessanti la Fisica matematica. Tralascio ogni dimostrazione su cui mi soffermerò esaurientemente in altra sede.

1. Calcolo di alcuni potenziali di strato nei punti dello strato potenziante. – Nello spazio $Oxyz$ indichiamo con σ il cerchio del piano $z = 0$ con centro O e raggio a, e chiamiamo τ la rimanente parte del piano

(*) Nella seduta del 10 aprile 1948.

stesso. Consideriamo poi la successione indefinita di potenziali di strato semplice

$$(1)\qquad V_s(x,y,z) = \int_\sigma \left(1 - \frac{\xi^2+\eta^2}{a^2}\right)^{s/2} \frac{1}{r}\, d\sigma \qquad (s = -1, 1, 3, 5, 7, \cdots)$$

$(r = \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2\}^{1/2})$ e contrassegniamo con $V_s(x,y)$ le funzioni cui essi si riducono per $z = 0$ e $\rho < a$ $(\rho = \{x^2+y^2\}^{1/2})$, cioè nei punti dell'area σ. Come è classicamente noto, la V_{-1} è una semplice costante,

$$(2)\qquad V_{-1} = \pi^2 a,$$

e la V_1 un polinomio quadratico in ρ,

$$(3)\qquad V_1 = \frac{\pi^2 a}{2} - \frac{\pi^2}{4a}\rho^2.$$

Sulla base delle uguaglianze (2), (3) e delle formule di trasformazione di Green

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\sigma f(\xi,\eta)\frac{1}{r}\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{1}{r}\,d\sigma + \int_l f\cos nx\,\frac{1}{r}\,dl \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\sigma f(\xi,\eta)\frac{1}{r}\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{1}{r}\,d\sigma + \int_l f\cos ny\,dl, \end{cases}$$

ovunque valide, malgrado la singolarità della funzione $\frac{1}{r}$, qualunque sia l'area σ del piano xy, di contorno regolare l, se $f(x,y)$ è ivi continua, con derivate prime integrabili in σ e continue in ogni suo punto interno, si può dimostrare, con procedimento induttivo, che la generica V_s si riduce su σ a un polinomio di grado $\frac{s+1}{2}$ in ρ^2

$$(5)\qquad V_s = \sum_0^{\frac{s+1}{2}} {}_h\, a_{sh}\,\rho^{2h}.$$

I coefficienti a_{sh} si calcolano con le seguenti relazioni ricorrenti

$$(6)\qquad \begin{cases} a_{s0} = \dfrac{s}{s+1}\,a_{s-2,0} \\ a_{sh} = \dfrac{-s^2 a_{s-2,h-1} + s(s-2)\,a_{s-4,h-1}}{4h^2 a^2} \\ a_{s,\frac{s+1}{2}} = \dfrac{-s^2 a_{s-2,\frac{s-1}{2}}}{(s+1)^2 a^2} \end{cases}$$

$$\left(s = 3, 5, 7, \cdots;\ h = 1, 2, 3, \cdots, \frac{s-1}{2}\right).$$

I potenziali $V_s(x,y,z)$ costituiscono altrettante funzioni armoniche, regolari in tutto lo spazio, privato dei punti dell'area σ, le quali si comportano

all'infinito come le funzioni $\frac{2\pi a^2}{(s+1)\sqrt{x^2+y^2}}$. Di essi si può usufruire per risolvere taluni problemi armonici misti relativi al semispazio.

2. Un problema misto. – Sia assegnato un generico polinomio in x, y a simmetria polare attorno ad O; ciò che vale quanto dire un generico polinomio di grado n in ρ^2

$$P_n(\rho^2) = \sum_0^n{}_h c_h \rho^{2h}.$$

Ci si proponga poi di determinare una funzione $\varphi(x, y, z)$ armonica e regolare nel semispazio $z \geqq 0$, nulla all'infinito, la quale su σ si identifichi col polinomio dato mentre si annulli su τ la sua derivata normale. Una tal funzione può senz'altro esprimersi mediante una combinazione lineare delle V_s

$$\varphi(x, y, z) = \sum A_s V_s \tag{7}$$

la sommatoria essendo estesa a tutti i valori dispari di s, da -1 a $2n-1$. La determinazione dei coefficienti A_s si effettua senza ambiguità identificando su σ il secondo membro di (7) coll'assegnato polinomio $P_n(\rho^2)$

$$\sum A_s \bar{V}_s = \sum_0^n{}_h c_h \rho^{2h},$$

ciò che comporta, tra le $n+1$ incognite A_s, un sistema lineare di $n+1$ equazioni a determinante non nullo.

3. Un problema più generale. – Da ciascuna delle V_s, con operazioni di derivazione, eventualmente multiple, ed opportune trasformazioni mediante le (4), possono dedursi altri potenziali, relativi ad altrettante, svariatissime, distribuzioni di massa, diffusa sull'area circolare σ, di ciascuno dei quali si sa calcolare in termini espliciti, la determinazione sull'area potenziante. Ognuno di questi potenziali è funzione armonica in tutto lo spazio (privato dell'area σ), nulla all'infinito, con derivata normale nulla sulla porzione τ del piano $z = 0$, la quale su σ si riduce a un polinomio in xy (generalmente non simmetrico attorno ad O).

Con opportuna combinazione di siffatti potenziali si può costruire una funzione $\varphi(x, y, z)$ armonica nel semispazio $z \geqq 0$, nulla all'infinito, con derivata normale nulla sulla regione τ del piano limite, la quale su σ si riduca a un arbitrario polinomio in xy: $P_n(x, y)$. Precisamente, se n è il grado del polinomio assegnato, si considerino le $n+1$ derivate n–me del potenziale V_{2n-1}, le n derivate $(n-1)$–me della V_{2n-3}, e così via fino alle due derivate prime della V_1, e alla V_{-1} stessa. La soluzione del problema proposto può esprimersi come combinazione lineare delle $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ funzioni ora indicate che si riconosce essere sempre tra loro linearmente indipendenti. La determinazione dei coefficienti di combinazione si fa ancora, senza ambiguità, imponendo l'identità su σ della combinazione medesima coll'assegnato polinomio $P_n(x, y)$.

La possibilità di approssimare mediante polinomi di grado sufficientemente elevato ogni funzione regolare che sia definita in σ, dà ai procedimenti ora indicati un interesse concreto.

4. ULTERIORI APPLICAZIONI. UN PROBLEMA DI IDRODINAMICA. — Segnalo infine la possibilità di risolvere mediante le V_s e le funzioni armoniche che da esse possono ricavarsi, altri problemi come quello di costruire una funzione armonica nel semispazio $\zeta \geqq 0$, nulla su τ e all'infinito, e tale che la sua derivata normale si riduca su σ a un dato polinomio in x, y dotato o no di simmetria circolare attorno ad O. Di questo secondo tipo di problemi mi limito a considerare un esempio concreto tratto dall'idrodinamica la cui soluzione, pur potendo desumersi per via di limite da un classico lavoro di Clebsch, si lascia rapidamente determinare per via diretta coll'intervento dei potenziali V_s.

Proponiamoci di studiare i piccoli movimenti, entro un liquido incomprimibile indefinito di densità uniforme k, di un disco rigido circolare, di raggio a, massa M e momento d'inerzia diametrale $\mathfrak{A}$, il quale sia soggetto a una sollecitazione elastica di richiamo verso una posizione di equilibrio. Supporremo che il disco possa effettuare solo piccoli movimenti di traslazione in direzione perpendicolare al suo piano di equilibrio e di rotazione attorno a un suo diametro qualsiasi. Assunto il centro del disco nella sua posizione di equilibrio come origine O di un sistema di coordinate x, y, ζ e il piano di riposo come piano $\zeta = 0$, l'equazione

$$\zeta = \gamma + \alpha x + \beta y$$

del piano del disco nella sua generica posizione individua completamente la posizione del disco stesso e γ, parametro di traslazione, α, β, parametri di rotazione, possono assumersi come sue coordinate lagrangiane. Al generico atto di moto del disco, caratterizzato dai valori $\dot\gamma, \dot\alpha, \dot\beta$ delle sue velocità lagrangiane, è subordinato un atto di moto (irrotazionale) del liquido. Il suo potenziale di velocità $\varphi(x, y, \zeta \mid t)$, armonico, è caratterizzato dalle seguenti condizioni ai limiti

$$(8)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = 0 & \left(r = \sqrt{x^2+y^2+\zeta^2}\right) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \dot\gamma + \dot\alpha x + \dot\beta y & (\zeta = 0\,,\ \rho < a); \end{cases}$$

(va tenuto presente che, a causa della infinitesimalità delle oscillazioni, il disco può pensarsi occupare sempre la sua posizione di riposo).

Si riconosce che, a meno di una costante additiva, una funzione armonica soddisfacente alle condizioni (8) è la seguente

$$(9)\qquad \varphi(x, y, \zeta \mid t) = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{ \frac{a\dot\gamma}{\pi^2} V_1 - \frac{2a^3\dot\alpha}{9\pi^2}\frac{\partial V_3}{\partial x} - \frac{2a^3\dot\beta}{9\pi^2}\frac{\partial V_3}{\partial y} \right\};$$

(nel secondo membro la variabile t figura implicitamente in $\dot\gamma, \dot\alpha, \dot\beta$).

Dalla φ si ricava facilmente l'energia cinetica del liquido, esprimibile mediante l'integrale superficiale

$$(10) \qquad \mathcal{T}_1 = \frac{1}{2} k \int_\sigma \varphi \frac{d\varphi}{dn} d\sigma = \frac{1}{2} \mathcal{A}' (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} M' \dot{\gamma}^2$$

(l'integrazione è estesa alle due faccie del disco di cui n rappresenta la normale orientata verso il disco stesso). Nella (10) si è posto

$$(11) \qquad \mathcal{A}' = \frac{16}{45} k a^5 , \qquad M' = \frac{8}{3} k a^3 .$$

La $\mathcal{T}_1$, aggiunta alla forza viva propria del disco

$$\mathcal{T}_2 = \frac{1}{2} \mathcal{A} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} M \dot{\gamma}^2 ,$$

dà l'energia cinetica del sistema complessivo disco–liquido la cui conoscenza, unita a quella del potenziale della sollecitazione attiva, permette l'immediata impostazione del problema vibratorio. In conformità ai ben noti risultati generali del Kirchhoff si riconosce che la presenza del liquido nelle condizioni supposte equivale, per il moto del disco, a un aumento della sua inerzia, sia traslatoria, sia rotatoria, che si riflette in un aumento, immediatamente calcolabile, dei suoi periodi principali di oscillazione sotto l'assegnata sollecitazione elastica.

Meccanica. — *Precessioni regolari di un solido pesante asimmetrico.* Nota di G. Grioli, presentata (*) dal Socio A. Signorini.

Sia S un qualunque solido pesante *asimmetrico:* voglio dire, un qualunque solido pesante per il quale *non sia rotondo* l'ellissoide d'inerzia E_G relativo al baricentro G.

Indico poi con f una qualunque delle due rette baricentrali ortogonali ai piani delle sezioni circolari (1) di E_G, con Q uno dei punti in cui f interseca E_G, con n la normale in Q a E_G, con $\varkappa$ l'angolo acuto formato da f con n.

In questa Nota dimostro che se si fissa S, con vincolo privo di attrito, per un qualunque punto O $\neq$ G della f, tra i moti che vengono a essere possibili per S dipendentemente dalle sue condizioni iniziali, *esistono* ∞^2 *precessioni regolari.*

Per ognuna di esse l'asse di figura è f, l'asse di precessione forma con la verticale l'angolo $\varkappa$ ed è ortogonale ad f, il periodo di precessione è uguale a quello di rotazione propria.

(*) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) È quasi superfluo ricordare che tali rette sono situate in quelle dei piani centrali che contiene gli assi di massimo e minimo momento d'inerzia e sono simmetriche rispetto ad essi.

Altrove [2] ho dimostrato che sono queste le uniche precessioni regolari possibili per S, quando, s'intende, esso sia fissato con vincolo privo di attrito per un unico suo punto.

Era già noto [3] che in tali condizioni non potevano aversi precessioni regolari con asse di precessione verticale [4]: forse è questo il motivo per cui anche nei grandi trattati di Meccanica o non si parla della possibilità di precessioni regolari o, addirittura, la si nega [5].

§ 1. *Completa caratterizzazione delle precessioni regolari del solido pesante asimmetrico.* – Siano $\boldsymbol{\chi}$ il versore dell'asse di precessione, p, orientato verso l'alto e $\boldsymbol{k}$ quello della retta f orientata come OG.

Riferisco S simultaneamente alla terna fissa $T^* \equiv O\, \boldsymbol{c}\, \boldsymbol{c}'\, \boldsymbol{\chi}$ avente il piano di $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{\chi}$ verticale e $\boldsymbol{c}$ orientato verso il basso e ad una terna solidale $T \equiv O\, \boldsymbol{i}\, \boldsymbol{j}\, \boldsymbol{k}$.

Nelle precessioni regolari effettivamente possibili per S l'angolo di precessione, ψ, l'angolo di rotazione propria, φ, e quello di nutazione, θ, di T rispetto a T^* soddisfano alle condizioni

$$(1) \qquad \psi \equiv \varphi + \text{cost} \quad ; \quad \dot{\psi} \equiv \dot{\varphi} \equiv \text{cost} \neq 0 \quad ; \quad \theta \equiv \frac{\pi}{2} .$$

Intendendo per $\mathfrak{M}$ la massa di S e per g il modulo dell'accelerazione di gravità, pongo.

$$(2) \qquad \alpha = \mathfrak{M} g \, |\, OG \,| > 0.$$

Per caratterizzare completamente le precessioni regolari del solido pesante asimmetrico, basta aggiungere alle particolarità già enunciate che $\dot{\varphi}$ e $\psi^* \equiv \psi - \varphi$ sono espressi da

$$(3) \qquad \dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{\alpha \cos \varkappa}{C}} \quad ; \quad \operatorname{tg} \psi^* = \frac{A'}{B'} ,$$

ove C, A', B' hanno il consueto significato ad essi attribuito nella dinamica dei solidi, con riferimento alla T, mentre ψ^* è univocamente determinato [6] [tra 0 e 2π] dalla (3, 2) insieme alle condizioni

$$(4) \qquad A' \operatorname{sen} \psi^* \leq 0 \quad , \quad B' \cos \psi^* \leq 0 .$$

L'arbitrarietà della scelta [nel piano normale ad f] della coppia solidale $O\, \boldsymbol{i}\, \boldsymbol{j}$ sostanzialmente equivale ad una scelta arbitraria rispetto ad una

(2) La Memoria completa è in corso di stampa negli «Annali di Matematica».

(3) Cfr. ad esempio E. ROUTH, *Advanced rigid Dynamics*, n. 214.

(4) In contrapposto si potrebbe dimostrare che nel caso di solidi simmetrici [giroscopi] possono aversi solo precessioni regolari con asse di precessione verticale. Cioè: *l'esistenza di precessioni regolari con asse di precessione verticale è caratteristica dei giroscopi.*

(5) V. ad esempio, *Handbuch der Physik*, vol. V [Springer, 1927], p. 427.

(6) A' e B' non possono annullarsi simultaneamente dato che S non è un giroscopio [vedi nota (6)].

prefissata terna solidale [avente come terzo asse la f] dell'angolo di rotazione propria iniziale.

Se a ciò si aggiunge il fatto che p è vincolato unicamente dalla condizione di formare l'angolo $\varkappa$ con la verticale, si conclude che si tratta, per un dato O, di ∞^2 precessioni regolari.

In ognuna di esse i moti di precessione e di rotazione propria sono ambedue levogiri o ambedue destrogiri rispetto ai già convenuti orientamenti di p ed f a seconda della determinazione attribuita a $\dot{\varphi}$ in base a (3 , 1).

§ 2. *Possibilità delle precessioni regolari già descritte.* – Per dimostrare che le precessioni indicate nel paragrafo precedente sono effettivamente possibili per S, la via più semplice mi sembra quella di constatare che le equazioni di Eulero, espresse in termini degli angoli di Eulero, riescono soddisfatte.

Comincio, a tal fine, con l'osservare che f essendo ortogonale ai piani delle sezioni circolari di E_G lo è pure a quelli delle sezioni circolari dell'ellissoide d'inerzia relativo a O . Con riferimento a tale punto si deduce in conseguenza (7).

$$A = B \quad , \quad C' = 0. \tag{5}$$

A causa di (5) le equazioni di Eulero si scrivono

$$\begin{cases} A\dot{p} - B'\dot{r} - (A - C)\,qr + A'(r^2 - q^2) - B'pq = M_1 , \\ A\dot{q} - A'\dot{r} - (C - A)\,pr + B'(p^2 - r^2) + A'pq = M_2 , \\ C\dot{r} - A'\dot{q} - B'\dot{p} + (B'q - A'p)\,r = M_3 , \end{cases} \tag{6}$$

ove è chiaro il significato dei simboli.

D'altronde in base alle notazioni scelte e alla (1 , 2) non può che essere

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\chi})$$

da cui, tenuto conto di (1 , 2), (1 , 3) segue (8)

$$\begin{cases} p = \dot{\varphi}\,\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad q = \dot{\varphi}\,\cos\varphi \quad , \quad r = \dot{\varphi} , \\ \dot{p} = \dot{\varphi}^2\cos\varphi \quad , \quad \dot{q} = -\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \dot{r} = 0 . \end{cases} \tag{7}$$

Data la particolare scelta degli assi fissi, il versore della verticale discendente, $\boldsymbol{\mu}$, è espresso da

$$\boldsymbol{\mu} = \operatorname{sen}\varkappa\,\boldsymbol{c} - \cos\varkappa\,\boldsymbol{\chi} , \tag{8}$$

mentre $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{\chi}$ a causa di (1 , 3) sono legati ai versori della terna solidale dalle relazioni:

(7) Le (5) mostrano che A' e B' si annullano contemporaneamente solo se S degenera in un giroscopio.

(8) In base alle (7) non sarebbe difficile constatare che il momento delle quantità di moto di S non può essere costantemente ortogonale ad OG. Nelle soluzioni di Hess non vi sono quindi precessioni regolari.

$$(9)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{c} = \cos\psi\,(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j}) + \operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{k}\,, \\ \boldsymbol{\chi} = \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}\,. \end{cases}$$

Da (8), (9), segue subito per il momento $\alpha\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\mu}$ del peso rispetto ad O:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \alpha\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\mu} = \alpha\{&[\cos\psi \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varkappa + \cos\varphi\cos\varkappa]\,\boldsymbol{i} + \\ &+ [\cos\psi\cos\varphi\operatorname{sen}\varkappa - \operatorname{sen}\varphi\cos\varkappa]\,\boldsymbol{j}\}\,. \end{aligned}$$

Tenendo presente la (1, 1), da (10) si deducono per le M_i, $(i=1,2,3)$, le espressioni

$$(11)\qquad \begin{cases} M_1 = \alpha\left\{\cos\varphi\cos\varkappa - \dfrac{\operatorname{sen}\varkappa}{2}\,[(1-\cos 2\varphi)\operatorname{sen}\psi^* - \operatorname{sen}2\varphi\cos\psi^*]\right\}, \\ M_2 = -\alpha\left\{\operatorname{sen}\varphi\cos\varkappa - \dfrac{\operatorname{sen}\varkappa}{2}\,[(1+\cos 2\varphi)\cos\psi^* - \operatorname{sen}2\varphi\operatorname{sen}\psi^*]\right\}, \\ M_3 = 0\,. \end{cases}$$

Basta allora introdurre le (7), (11), nelle (6) per constatare che la terza equazione di Eulero si riduce ad un'identità mentre le prime due divengono

$$\begin{cases} (C\dot\varphi^2 - \alpha\cos\varkappa)\cos\varphi + (A'\dot\varphi^2 + \alpha\operatorname{sen}\psi^*\operatorname{sen}\varkappa)\dfrac{1-\cos 2\varphi}{2} - \\ \qquad - (B'\dot\varphi^2 + \alpha\cos\psi^*\operatorname{sen}\varkappa)\dfrac{\operatorname{sen}2\varphi}{2} = 0\,, \\ (C\dot\varphi^2 - \alpha\cos\varkappa)\operatorname{sen}\varphi - (A'\dot\varphi^2 + \alpha\operatorname{sen}\psi^*\operatorname{sen}\varkappa)\dfrac{\operatorname{sen}2\varphi}{2} + \\ \qquad + (B'\dot\varphi^2 + \alpha\cos\psi^*\operatorname{sen}\varkappa)\dfrac{1+\cos 2\varphi}{2} = 0 \end{cases}$$

ed è chiaro cle le condizioni necessarie e sufficienti perchè esse siano verificate ad ogni istante sono

$$(12)\qquad \begin{cases} C\dot\varphi^2 - \alpha\cos\varkappa = 0\,, \\ A'\dot\varphi^2 + \alpha\operatorname{sen}\psi^*\operatorname{sen}\varkappa = 0\,, \\ B'\dot\varphi^2 + \alpha\cos\psi^*\operatorname{sen}\varkappa = 0 \end{cases}$$

Basta allora tener presente la formula [9]

$$\cos\varkappa = \frac{C}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C^2}} > 0\,,$$

per constatare che le (12) sono compatibili e riescono soddisfatte allora e soltanto allora che $\dot\varphi$ e ψ^* sono espresse da (3, 1), (3, 2) subordinatamente alle (4).

(9) Vedi A. SIGNORINI, *Meccanica razionale con elementi di Statica grafica*», vol. I [Roma, Perrella, 1947], p. 258 e 322: non è inutile ricordare che $\varkappa$ non varia al variare di O su f.

Meccanica. — *Sugli effetti statici dei fenomeni viscosi.* Nota II di F. Levi, presentata (*) dal Corrisp. G. Colonnetti.

In una Nota recente (1) noi abbiamo osservato che lo studio sistematico degli effetti statici dei fenomeni viscosi poteva fondarsi su tre concetti fondamentali: il principio di sovrapposizione degli effetti fra carichi e distorsioni e fra distorsioni e distorsioni; l'invarianza dello stato di tensione dovuto ai carichi; l'invarianza dello stato di deformazione dovuto ad una distorsione.

Mostriamo ora come, alla luce di questi concetti, la dimostrazione di alcune proprietà fondamentali dei solidi elastico–viscosi assuma una forma particolarmente semplice e chiara.

Riprendiamo ad esempio in esame lo studio degli effetti statici del ritiro in regime viscoso in un solido in cui ci si possa limitare a prendere in considerazione le deformazioni in senso longitudinale (2).

Nel nostro solido elastico viscoso soggetto a ritiro, durante un intervallo di tempo infinitesimo dt a partire da un istante qualsiasi, la deformazione in senso longitudinale nell'elemento generico consta di due frazioni; una frazione elastica:

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}\,dt$$

una frazione impressa, dovuta a ritiro ed effetto viscoso:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_R}{dt}\,dt + \sigma\frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt}\,dt\,.$$

Con le solite ipotesi circa le leggi di variazione nel tempo del ritiro e della viscosità specifica, la variazione totale della deformazione sarà:

$$d\varepsilon_T = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}\,dt + \alpha\theta e^{-\theta t}\,dt + \sigma\gamma\theta e^{-\theta t}\,dt\,.$$

Ma noi possiamo valutare anche altrimenti questa deformazione osservando: *a*) che, per il principio di sovrapposizione, noi possiamo studiare separatamente l'effetto statico di ciascuna distorsione; *b*) che, per quanto si è detto, la distorsione viscosa non dà luogo a deformazione.

La deformazione totale è dunque identica a quella cui darebbe luogo l'effetto del ritiro che si manifesta nell'elemento durante l'intervallo dt con-

(*) Nella seduta del 13 marzo 1948.

(1) *Sugli effetti statici dei fenomeni viscosi* (Nota I).

(2) Cfr. *Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa* (Nota II). «Rend. dell'Accademia Nazionale dei Lincei», vol. IV, fasc. 2, 1948. Di questa Nota abbiamo conservato invariate le notazioni.

siderato, in regime elastico. Anche qui la deformazione può venire scissa in due frazioni: una frazione impressa già calcolata: $\alpha\theta e^{-\theta t}\,dt$; una frazione elastica della quale non è difficile dare una semplicissima espressione.

Sia infatti σ_0 la tensione che un ritiro di ampiezza unitaria determinerebbe in regime elastico nel punto considerato. La deformazione elastica corrispondente risulta eguale a: σ_0/E. Poichè, durante l'intervallo dt, si produce un ritiro $\alpha\theta e^{-\theta t}\,dt$, la deformazione elastica corrispondente vale:

$$\frac{\sigma_0}{E}\,\alpha\theta e^{-\theta t}\,dt.$$

Eguagliamo allora le due espressioni della deformazione totale viene:

$$\frac{1}{E}\,d\sigma + \sigma\gamma\theta e^{-\theta t}\,dt + \alpha\theta e^{-\theta t}\,dt = \alpha\theta e^{-\theta t}\,dt + \frac{\sigma_0}{E}\,\alpha\theta e^{-\theta t}\,dt.$$

Se ne deduce l'equazione differenziale del problema nella seguente forma a variabili separate:

$$\frac{d\sigma}{\sigma_0\,\alpha - E\gamma\sigma} = \theta e^{-\theta t}\,dt.$$

Integrando, e tenendo conto che per $t = 0$ si deve avere $\sigma = 0$, si ottiene.

$$\sigma = \frac{\sigma_0\,\alpha}{E\gamma}\left[1 - e^{-E\gamma\left(1 - e^{-\theta t}\right)}\right].$$

Indichiamo allora con σ_0' la tensione che un ritiro eguale a quello che si verifica all'istante t determinerebbe in regime elastico nel punto considerato. Si ha ovviamente:

$$\sigma_0' = \sigma_0\,\bar{\varepsilon}_R(t).$$

Ricaviamo σ_0 da questa relazione e sostituiamo nella espressione di σ. Viene:

$$\sigma = \frac{\sigma_0'\,\alpha}{E\bar{\varepsilon}_R(t)}\left[1 - e^{-E\gamma\left(1 - e^{-\theta t}\right)}\right]$$

e dunque:

a)
$$\frac{\sigma}{\sigma_0'} = \frac{1}{E\gamma\left(1 - e^{-\theta t}\right)}\left[1 - e^{-E\gamma\left(1 - e^{-\theta t}\right)}\right].$$

Ritroviamo il risultato già noto: l'effetto statico in ogni punto prodotto dal ritiro al tempo t si può calcolare ammettendo che il modulo elastico si trovi ridotto, per effetto della viscosità, nel rapporto rappresentato dal secondo membro di questa espressione.

A tempo indefinito, il rapporto di riduzione assume il valore:

b)
$$\frac{1}{E\gamma}\left[1 - e^{-E\gamma}\right].$$

Le espressioni *a*) e *b*), che noi avevamo stabilite solo nel caso dei solidi semplicemente connessi, risultano così estese a solidi di qualsiasi forma.

Il procedimento testè riportato ci ha dunque consentito di evitare di introdurre nel calcolo il coefficiente:

$$R' = \frac{\int_v \sigma_0 \, dV}{\int_v \sigma_0^2 \, dV}$$

la cui valutazione sembrava dover offrire qualche difficoltà nel caso di solidi comunque connessi.

Con un procedimento altrettanto semplice si può studiare l'effetto statico del cedimento viscoso di un vincolo.

Supponiamo che una struttura iperstatica, del tipo a cui ci siamo sempre riferiti in tutti questi studi, comporti un vincolo il quale subisce un cedimento η funzione del tempo. Noi ammetteremo essenzialmente che il cedimento si mantenga sempre simile a se stesso (nel piano, esso sarà dunque sempre riducibile ad una rotazione intorno a un punto fisso del piano), e che la sua ampiezza sia indipendente dal valore della reazione sviluppata dal vincolo corrispondente.

Indichiamo anche qui con σ_0 il valore della tensione che un cedimento del vincolo considerato di ampiezza unitaria determina in un punto generico del solido, in regime elastico. La deformazione elastica corrispondente assumerà il valore $\frac{\sigma_0}{E}$.

Poniamo allora:

$$\eta = \varphi(t).$$

Durante l'intervallo di tempo dt, il cedimento subisce un incremento:

$$\frac{d\varphi}{dt} \, dt$$

al quale corrisponde necessariamente una deformazione:

$$\frac{\sigma_0}{E} \frac{d\varphi}{dt} \, dt.$$

A tanto si deve ridurre la deformazione totale poichè l'effetto viscoso non produce deformazione.

Ma codesta deformazione totale noi possiamo valutarla anche altrimenti, come somma di una deformazione elastica:

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \, dt$$

e di una deformazione impressa di origine viscosa:

$$\sigma \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt} \, dt.$$

Donde l'equazione differenziale del problema, ottenuta eguagliando le due espressioni della deformazione totale:

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \sigma\frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt} - \frac{\sigma_0}{E}\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Il ragionamento si estende facilmente al caso di n vincoli cedevoli, i cui cedimenti rimangano simili a se stessi. Sia infatti:

$$\eta_i = \varphi_i(t).$$

La legge di variazione del cedimento nel vincolo generico. Un ragionamento identico a quello testè svolto, conduce alla seguente equazione differenziale:

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \sigma\frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt} - \frac{1}{E}\Sigma_n\,\sigma_0\frac{d\varphi_i}{dt} = 0.$$

Questa equazione, apparentemente semplice, può tuttavia richiedere talvolta dei calcoli laboriosi quando i vari cedimenti e il fenomeno viscoso nell'interno del solido non abbiano inizio sincronicamente. Nel qual caso potrà convenire di studiare separamente l'effetto dei vari cedimenti.

Meccanica. — *Sui paradossi di D'Alembert e di Brillouin nella dinamica dei fluidi* (*). Nota di M. MANARINI, presentata (**) dal Corrisp. F. ZAGAR.

A complemento di risultati del Cisotti e del Boggio, applicando formule vettoriali del Boggio, opportunamente estese, ho verificato l'esistenza del paradosso di D'Alembert per un corpo di forma qualsiasi che si muova di moto elicoidale uniforme in un fluido perfetto, comprimibile, estendentesi indefinitamente in tutte le direzioni, nel caso che esistano superficie di discontinuità non limitate, allorquando siano soddisfatte opportune condizioni di annullamento in media all'infinito. Dopo queste premesse ho esteso al caso che il corpo si muova nel fluido con moto elicoidale uniforme il paradosso che M. Brillouin ha stabilito nel caso delle due dimensioni per un corpo che si muova nel fluido con moto rettilineo uniforme e che poi il Duhem, conservando la stessa ipotesi per il moto del corpo, ha esteso al caso delle tre dimensioni. Ho stabilito cioè che, anche nel caso accennato, per un fluido incomprimibile, nell'ipotesi che eventualmente esistano nel fluido superficie di discontinuità non estendentesi all'infinito e che la pressione e la velocità assoluta delle particelle del fluido si comportino in media all'infinito in modo opportuno, esistono regioni del fluido a pressione negativa.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.
(**) Nella seduta del 13 marzo 1948.

1. FORMULE PRELIMINARI. - Si ha la seguente formula del Boggio [1] di dimostrazione immediata:

$$(1) \qquad \iiint_{(S)} \frac{d\boldsymbol{a}}{dP}\,\boldsymbol{b}\,dS = -\iint_{(\sigma)} (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{a}\,d\sigma - \iiint_{(S)} \boldsymbol{a}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{b}\,dS\,;$$

in essa $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono vettori funzioni regolari del punto P del dominio (S) di contorno (σ), $\boldsymbol{n}$ è il versore normale a (σ) nel punto in cui si considera l'elemento $d\sigma$, orientato verso l'interno di (σ). Se $\boldsymbol{a}$ è costante oppure se $\boldsymbol{b}$ è solenoidale, si hanno due formule di trasformazione di un integrale di volume in un integrale di superficie; e nel primo caso si tratta del ben noto teorema della divergenza. Aggiungiamo che se in (S) vi è una superficie di discontinuità (Σ) per $\boldsymbol{a}$ e per $\boldsymbol{b}$ (che potremo sempre supporre chiusa o composta di superficie chiuse) la (1) prende la forma:

$$(2) \qquad \iiint_{(S)} \frac{d\boldsymbol{a}}{dP}\,\boldsymbol{b}\,dS = -\iint_{(\sigma)} (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{a}\,d\sigma - \iint_{(\Sigma)} [(\boldsymbol{b}\times\mathbf{N})\,\boldsymbol{a}]_\Sigma - \iiint_{(S)} \boldsymbol{a}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{b}\,dS\,,$$

dove $\mathbf{N}$ indica il versore normale a (Σ) nel punto in cui si considera l'elemento $d\Sigma$, orientato verso l'interno di (Σ) e $[(\boldsymbol{b}\times\mathbf{N})\,\boldsymbol{a}]_\Sigma$ indica la discontinuità di $(\boldsymbol{b}\times\mathbf{N})\,\boldsymbol{a}$ nel passaggio dalla faccia esterna alla faccia interna di (Σ). Se nella (2), al posto del vettore $\boldsymbol{a}$ si pone il vettore $\boldsymbol{a}\wedge(P-O)$, dove O è un punto fisso qualsiasi, risulta

$$(3) \qquad \iiint_{(S)} \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dP}\,\boldsymbol{b}\right)\wedge(P-O)\,dS = -\iint_{(\sigma)} (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{a}\wedge(P-O)\,d\sigma -$$

$$-\iint_{(\Sigma)} [(\boldsymbol{b}\times\mathbf{N})\,\boldsymbol{a}\wedge(P-O)]_\Sigma\,d\Sigma - \iiint_{(S)} \boldsymbol{a}\wedge(P-O)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{b}\,dS - \iiint_{(S)} \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\,dS\,.$$

Conveniamo ora di indicare con (S) il dominio, illimitatamente esteso in tutte le direzioni, costituito dai punti di (σ) e dai punti esterni a (σ) e supponiamo che $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ siano funzioni dei punti di questo dominio. Affinchè le formule precedenti continuino a valere per un dominio siffatto, evidentemente, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ dovranno avere un particolare comportamento all'infinito. Orbene, in assenza di superficie di discontinuità (Σ) per $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, condizione sufficiente affinchè valga la (1) è che, indicando con r la distanza di P da un punto fisso, la funzione scalare positiva abr^2 tenda allo zero in media all'infinito quando r tende all'infinito [2] e affinchè valga la (3), nella quale mancherà il secondo

(1) T. BOGGIO, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito.* « Atti Ist. Veneto di Scienze, Lettere, Arti », t. LXIX, pp. 883–891 (1909).

(2) Diremo che una funzione $f(P)$, scalare o vettoriale, tende allo zero in media all'infinito quando è

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{(\sigma')} \mathrm{mod}\, f\,d\sigma' = 0\,,$$

integrale al secondo membro, condizione sufficiente è che tenda allo zero in media all'infinito la funzione abr^3. Cosicchè, valendo quest'ultima condizione, in assenza delle superficie di discontinuità (Σ) varranno entrambe le formule considerate.

Qualora esista una superficie di discontinuità (Σ) per a e b che non si estenda all'infinito, le condizioni sufficienti precedenti continuano a valere per la validità rispettivamente della (2) e della (3).

2. PARADOSSO DI D'ALEMBERT. – Consideriamo un corpo rigido (C) di forma qualsiasi, che si muova di moto elicoidale uniforme, di velocità di traslazione $\mathbf{V}_0$ e di velocità di rotazione ω, in un fluido comprimibile, inizialmente in quiete, che si estenda all'infinito in tutte le direzioni e che sia privo di forze di massa. Supponiamo che il moto indotto del fluido, a regime raggiunto, abbia rispetto al corpo carattere stazionario; e supponiamo inoltre che entro la massa del fluido esistano delle superficie di discontinuità (Σ). Per quel che riguarda la velocità assoluta v delle particelle del fluido, detta discontinuità deve riferirsi soltanto alla componente tangenziale della velocità stessa, non potendo la superficie (Σ) essere attraversata dalle particelle del fluido; per modo che la (Σ) si comporterà come una parete e dovrà quindi essere lambita dal fluido lungo le sue due facce. Ne segue che le masse di fluido separate da (Σ) non possono mescolarsi. Inoltre, in base all'equazione del moto, la pressione p del fluido non potrà subire discontinuità attraverso (Σ); e così pure si deve escludere che possa presentare discontinuità attraverso (Σ) la densità ρ del fluido [3].

Supponiamo poi che la superficie di discontinuità (Σ) non si estenda all'infinito. Risulta allora che il paradosso di D'Alembert dimostrato dal Cisotti in assenza di superficie di discontinuità [4], persiste ancora. Anzi, in conseguenza del fatto che come si è ricordato, (Σ) non può essere superficie di discontinuità per la componente normale della velocità delle particelle del fluido relativamente al corpo mobile, si può vedere che, grazie alle (2) e (3), nell'ipotesi che siano soddisfatte opportune condizioni di annullamento in media all'infinito, conseguono i risultati relativi al caso del moto ovunque continuo [5].

Se $\mathbf{W}$ è la velocità di un punto P solidale col corpo (C) ed O è un punto fisso dell'asse elicoidale del moto del corpo, si ha:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O}). \tag{4}$$

dove (σ') è una sfera di raggio r e di centro un punto fisso qualsiasi. Per le funzioni scalari questa nozione fu usata da P. NOAILLON (cfr. *Fonction armonique dont le gradient s'annule à l'infinie*. « Comptes Rendus de l'Ac. de Sc. », Paris, t. 176, pp. 879-882 (1923). Fu poi usata da altri Autori: E. JOUGUET, M. ROY, B. FINZI.

(3) L. LECORNU, *Cours de Mécanique*. Gauthier-Villars, t. II, pp. 463 e 506 (1915).

(4) U. CISOTTI, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito*. « Atti Ist. Veneto di Scienze, Lettere e Arti », vol. LXIX, pp. 427-445 (1909).

(5) T. BOGGIO, loc. cit.

Supposto raggiunto il regime stazionario del moto del fluido rispetto al corpo, l'equazione di tale moto è:

$$(5) \qquad \frac{d\boldsymbol{v}}{d\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}-\mathbf{W})+\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p\ ^{(6)},$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità assoluta delle particelle del fluido. L'equazione di continuità, a sua volta, diventa della forma

$$(6) \qquad \operatorname{div}\{\rho(\boldsymbol{v}-\mathbf{W})\}=0.$$

Inoltre si dovrà avere:

$$(7) \qquad (\boldsymbol{v}-\mathbf{W})\times\boldsymbol{n}=0 \qquad \text{sopra } (\sigma)$$

$$(8) \qquad \begin{cases}(\boldsymbol{v}_1-\mathbf{W})\times\mathbf{N}=0\\(\boldsymbol{v}_2-\mathbf{W})\times\mathbf{N}=0\end{cases} \qquad \text{sulle facce (1) e (2) di } (\Sigma).$$

In queste $\boldsymbol{n}$ è il versore normale a (σ), che supporremo orientato verso il fluido; $\mathbf{N}$ è il versore normale a (Σ).

Il risultante $\mathbf{R}$ ed il momento risultante $\mathbf{M}$, rispetto ad un punto O solidale col corpo, del sistema delle pressioni $-p\,\boldsymbol{n}\,d\sigma$ distribuite sugli elementi $d\sigma$ della superficie del corpo, sono dati da

$$(9) \qquad \mathbf{R}=-\iint_{(\sigma)}p\boldsymbol{n}\,d\sigma \quad , \quad \mathbf{M}=-\iint_{(\sigma)}(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge p\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

Essendo r la distanza di O da un generico punto P del fluido e p_0 una costante positiva, supposto che $(p-p_0)r^2$ tenda allo zero in media all'infinito il teorema del gradiente dà subito:

$$\mathbf{R}=\iiint_{(S)}\operatorname{grad}p\,dS,$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio occupato dalla massa fluida. Tenendo presente l'equazione del moto (5) e la (2), nell'ipotesi che $\rho v r^3$ tenda allo zero in media all'infinito, si ottiene:

$$\mathbf{R}=\iint_{(\sigma)}\{\rho(\boldsymbol{v}-\mathbf{W})\times\boldsymbol{n}\}\,\boldsymbol{v}\,d\sigma+\iint_{(\Sigma)}[\{\rho(\boldsymbol{v}-\mathbf{W})\times\mathbf{N}\}\,\boldsymbol{v}]_\Sigma\,d\Sigma+$$
$$+\iiint_{(S)}\boldsymbol{v}\operatorname{div}\{\rho(\boldsymbol{v}-\mathbf{W})\}\,dS-\boldsymbol{\omega}\wedge\iiint_{(S)}\rho\boldsymbol{v}\,dS;$$

e per le (6), (7), (8) rimane:

$$(10) \qquad \mathbf{R}=-\boldsymbol{\omega}\wedge\iiint_{(S)}\rho\boldsymbol{v}\,dS,$$

dove l'integrale è la quantità di moto assoluta, finita, della massa fluida.

(6) T. Boggio, loc. cit.; A. Guglielmi, *Sul moto vorticoso dei liquidi*. «Atti Ist. Veneto di Scienze, Lettere e Arti», vol. LXXXI, Appendice, p. 312 (1922).

Per il momento risultante **M**, dato dalla seconda delle (9), applicando il teorema del rotazionale e supponendo che $(p - p_0) r^3$ tenda allo zero in media all'infinito, otteniamo:

$$\mathbf{M} = -\iiint_{(S)} \operatorname{grad} p \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O})\, dS.$$

Tenendo presente la (5) e la (3), nell'ipotesi che $\rho v r^4$ tenda allo zero in media all'infinito, risulta

$$\mathbf{M} = -\iint_{(\sigma)} \{\rho(\boldsymbol{v} - \mathbf{W}) \times \boldsymbol{n}\} \boldsymbol{v} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O})\, d\sigma - \iint_{(\Sigma)} [\{\rho(\boldsymbol{v} - \mathbf{W}) \times \mathbf{N}\} \boldsymbol{v} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O})]_{\Sigma}\, d\Sigma -$$

$$- \iiint_{(S)} \{\boldsymbol{v} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \cdot \operatorname{div} \rho (\boldsymbol{v} - \mathbf{W})\}\, dS -$$

$$- \iiint_{(S)} \boldsymbol{v} \wedge \rho (\boldsymbol{v} - \mathbf{W})\, dS + \iiint_{(S)} (\boldsymbol{\omega} \wedge \rho \boldsymbol{v}) \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O})\, dS.$$

Tenendo conto della (4) e delle (6), (7) e (8), otteniamo:

$$(11) \qquad \mathbf{M} = -\mathbf{V}_0 \wedge \iiint_{(S)} \rho \boldsymbol{v}\, dS - \boldsymbol{\omega} \wedge \iiint_{(S)} (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \wedge \rho \boldsymbol{v}\, dS.$$

Le (10) e (11) coincidono appunto con le formule stabilite dal Boggio [7] in assenza della superficie di discontinuità (Σ).

Si vede poi che, affinchè esse sussistano simultaneamente, è sufficiente che $(p - p_0) r^3$ e $\rho v r^4$ tendano allo zero in media all'infinito; e in queste condizioni l'azione del fluido sul corpo si riduce certamente ad una pura azione deviatrice (resistenza diretta nulla).

3. PARADOSSO DI BRILLOUIN. – Da quanto precede risulta che per sfuggire al paradosso di D'Alembert, nel caso del moto elicoidale uniforme, è necessario che, nelle ipotesi fatte, la superficie di discontinuità (Σ) si estenda all'infinito. A parte la resistenza del fluido al movimento del corpo, vediamo di stabilire che, anche in presenza di eventuali superficie (Σ) di discontinuità non estendentesi all'infinito, qualora all'infinito siano soddisfatte opportune condizioni, si presentano nel fluido regioni a pressione negativa che fisicamente non possono esistere nelle condizioni del problema.

Sempre supponendo il carattere di stazionarietà del movimento nel fluido rispetto al corpo, riprendiamo l'equazione (5). Moltiplicando per l'elemento di spazio dS' ed integrando, estendendo l'integrazione ad un dominio qualunque (S') del fluido che non abbia punti in comune col solido (C), si ha:

$$\iiint_{(S')} \operatorname{grad} p\, dS' + \iiint_{(S')} \frac{d\boldsymbol{v}}{d\mathrm{P}} \rho (\boldsymbol{v} - \mathbf{W})\, dS' + \boldsymbol{\omega} \wedge \iiint_{(S')} \rho \boldsymbol{v}\, dS' = 0.$$

(7) T. BOGGIO, loc. cit.

Applicando il teorema del gradiente all'integrale del primo membro, trasformando il secondo integrale al secondo membro mediante la (2) e tenendo conto delle (4) e (6), si ottiene:

$$\iint_{(\sigma')} p\boldsymbol{n}'\,d\sigma' + \iint_{(\sigma')} \rho\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}')\,\boldsymbol{v}\,d\sigma' - \iint_{(\sigma')} \rho\,(\mathbf{V}_0\times\boldsymbol{n}')\,\boldsymbol{v}\,d\sigma' - \iint_{(\sigma')} \{\rho\,\boldsymbol{\omega}\wedge(\mathrm{P}-\mathrm{O})\times\boldsymbol{n}'\}\,\boldsymbol{v}\,d\sigma' = 0$$

dove (σ') è il contorno di (S'), $\boldsymbol{n}'$ è il versore normale a (σ') nel punto in cui si considera l'elemento $d\sigma'$, orientato verso l'interno; e ciò anche in presenza di eventuali superficie (Σ) di discontinuità in (S') o attraversate da (σ').

Aggiungendo al primo membro della precedente uguaglianza l'espressione $\rho\mathbf{V}_0 \iint_{(\sigma')} (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}')\,d\sigma'$ (che è nulla per il fatto che è div $\boldsymbol{v} = 0$) dopo aver moltiplicato scalarmente per il versore $\boldsymbol{k}$ parallelo a $\mathbf{V}_0$ e nello stesso verso di $\mathbf{V}_0$, si ottiene:

$$(12)\qquad \iint_{(\sigma')} p\,\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{k}\,d\sigma' + \rho\iint_{(\sigma')} (\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{n}')\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{k})\,d\sigma' + \rho\iint_{(\sigma')} (\boldsymbol{v}\times\mathbf{V}_0)\wedge\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{k}\,d\sigma' - \rho\iint_{(\sigma')} \boldsymbol{\omega}\wedge(\mathrm{P}-\mathrm{O})\times\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{k}\,d\sigma' = 0.$$

Prendiamo come dominio (S') un emisfero di raggio r, limitato da un cerchio contenuto in un piano α perpendicolare all'asse elicoidale e posto, rispetto a questo piano, dalla parte dove non vi è il corpo (C). Del contorno (σ') di tale emisfero indichiamo con (σ_1') il cerchio massimo e con (σ_2') la rimanente semisfera. Nei punti di (σ_1') si ha: $\boldsymbol{n}' = \varepsilon\boldsymbol{k}$ con $\varepsilon = \pm 1$. Sarà $\varepsilon = +1$ se il piano del cerchio massimo è davanti il solido, $\varepsilon = -1$ se il piano è dietro. Applicando la (12), scindendo (σ') nelle due parti (σ_1') e (σ_2'), si ottiene:

$$(13)\qquad \varepsilon\iint_{(\sigma_1')} \{p + \rho\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{k})^2\}\,d\sigma_1' + \iint_{(\sigma_2')} p\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{k}\,d\sigma_2' + \rho\iint_{(\sigma_2')} (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}')\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{k})\,d\sigma_2' + \rho\iint_{(\sigma_2')} (\boldsymbol{v}\wedge\mathbf{V}_0)\wedge\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{k}\,d\sigma_2' + \rho\iint_{(\sigma_2')} \{\boldsymbol{\omega}\wedge(\mathrm{P}-\mathrm{O})\times\boldsymbol{n}'\}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{k}\,d\sigma_2' = 0.$$

Supponiamo che pr^2 sia nullo in media all'infinito nella direzione dell'asse del moto; con la qual cosa intendiamo che per le semisfere (σ_2') limitate da circonferenze massime su piani perpendicolari alla direzione del moto si abbia:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi r^2} \iint_{(\sigma_2')} pr^2\,d\sigma_2' = 0.$$

Inoltre supponiamo ancora che vr^3 sia pure nulla in media all'infinito nella direzione dell'asse del moto. Allora, mantenendo fisso il piano α che limita la semisfera (σ_2') che entra nella (13) e, sopra questo piano, mantenendo fisso il centro della circonferenza massima contorno di (σ_2'), se facciamo tendere r all'infinito, nel primo membro della (13) si annullano i tre integrali estesi a (σ_2') mentre l'integrale esteso al cerchio massimo (σ_1'), tenderà verso l'integrale della stessa funzione integranda $p + \rho(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{k})^2$, esteso a tutto il piano α; sicchè, al limite, si avrà:

$$\iint_{(\alpha)} \{ p + \rho (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{k})^2 \} \, d\alpha = 0 .$$

Ne consegue che la pressione p deve essere necessariamente negativa in certe regioni del piano α mentre, nelle condizioni poste per il problema, tali pressioni negative non sono fisicamente realizzabili. Così si vede che, nelle condizioni del problema, persiste il paradosso che M. Brillouin [8] ha stabilito nel caso del moto piano del fluido con in seno ad esso un corpo che si muova di moto traslatorio rettilineo uniforme e che il Duhem [9] ha esteso al moto generico del fluido, sempre per il caso del moto rettilineo uniforme del corpo che si muove in seno ad esso. La dimostrazione fatta in questa Nota richiede che p e v si comportino all'infinito nel modo detto, dalla parte dei piani normali all'asse elicoidale del moto del corpo (C) dove non vi è il corpo stesso. Il paradosso di Brillouin non si può rimuovere se non ammettendo che pr^2 o vr^3 non siano nulli in media all'infinito nella direzione dell'asse del moto; il che accade, ad esempio, quando la scia si estende all'infinito.

Chimica (Chimica fisica). — *Cinetica della deidrogenazione del cicloesanolo su ossido di rame* [*]. Nota di N. AGLIARDI e R. ROBITSCHEK, presentata [**] dal Corrisp. G. NATTA.

La reazione di deidrogenazione catalitica del cicloesanolo con formazione di cicloesanone è stata oggetto di numerose pubblicazioni di carattere scientifico e di molti brevetti industriali [1,...,13]. Tra i vari catalizzatori

(8) M. BRILLOUIN, *Les surfaces de gliessements d'Helmholtz et la résistence des fluides*. « Ann. de Chim. et de Phys. », t. XXIII, pp. 145–230 (1911).

(9) P. DUHEM, *Sur le paradoxe hydrodynamique de M. Brillouin*. « Comptes Rendus Acc. Sc. de Paris », t. 159, pp. 790–792 (1914).

(*) Lavoro eseguito presso il Centro di Chimica Industriale del C. N. R. e l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 13 marzo 1948.

(1) W. G. PALMER, F. H. CONSTABLE, « Proc. Royal Soc. », London, Ser. *A* *107*, 255.

(2) R. DUNBAR, M. ARNOLD, « J. Org. Chem. », *3*, 242, (1938); *10*, 501 (1945).

(3) H. ADKINS, C. KOMMES, E. STRUSS, « Journ. Amer. Chem. Soc. », *55*, 2992 (1933).

(Per le note (4),..., (13) ved. pagina seguente).

proposti i più comuni ed i più attivi sono certamente i metalli, sebbene qualche brevetto rivendichi buone rese anche su ossidi. Come per la maggior parte degli altri alcooli anche in questo caso il rame, sia puro che in lega con altri metalli, ha un'attività deidrogenante nettamente superiore a quella degli altri metalli comuni. Tuttavia nel caso particolare della deidrogenazione del cicloesanolo si ottengono rese elevate in cicloesanone, superiori anche al 90 percento, solo entro intervalli di temperatura e tempi di contatto abbastanza ristretti.

Tra i vari autori citati ci risulta che solo W. G. Palmer e F. H. Constable [1] abbiano esaminato questa reazione dal punto di vista cinetico, senza però approfondirne il meccanismo. Essi hanno più che altro confrontato la velocità di deidrogenazione su rame di alcuni alcooli primari e secondari, ivi compreso il cicloesanolo. A conclusione dei loro lavori gli autori citati hanno proposto, per alcuni alcooli alifatici, due espressioni matematiche che soddisfano abbastanza bene ai dati sperimentali, anche quando il catalizzatore diminuisca di attività per effetto di veleni.

Ci è quindi sembrato interessante lo studio cinetico di questa reazione, sebbene la presenza di reazioni secondarie, come la formazione di cicloesene, di cicloexilidencicloesanone e la piroscissione, non permettano di valutare quantitativamente la reazione fondamentale di deidrogenazione a cicloesanone. Alle temperature da noi esaminate la piroscissione in particolare diventa trascurabile, sopratutto se non si prendono in considerazione le prove fatte con il catalizzatore appena ridotto, che dimostra, se pur per breve tempo, un'attività elevatissima anche in questo senso.

TECNICA SPERIMENTALE. – Per queste prove ci siamo serviti dell'apparecchiatura rappresentata in figura 1. Il cicloesanolo (bidistillato sotto vuoto, p. f. 22° C) viene evaporato con velocità costante nell'evaporatore adiabatico E, riscaldato elettricamente e mantenuto isotermo dalla camicia esterna A, nella quale si trova pure del cicloesanolo bollente. I vapori di cicloesanolo, preriscaldati e portati alla temperatura di reazione dalla spirale di vetro S, passano attraverso al catalizzatore C mantenuto alla temperatura voluta dal forno F. I prodotti di reazione vengono raffreddati ed in parte condensati nel refrigerante R; la fase liquida viene raccolta e misurata nel tubo T, graduato per tratto di 10 cm^3, mentre l'idrogeno che contemporaneamente

(4) K. TAMURA, B. SENUMA, « J. Soc. Chem. Ind. Japan. », *37*, 212 B (1934).
(5) L. FAUCOUNAN, « C. R. », *203*, 406 (1936).
(6) J. TUR, S. ANISSIMOW, M. PLATONOW, « Chem. J. Ser. A–J. allg. Chem. URSS », *7* (69), 2895 (1937).
(7) M. MASSINA, « Chem. J. Ser. A–J. Allg. Chem. URSS »; *7* (69), 2128 (1937).
(8) C. HUND, H. GREENGARD, A. ROE, « Journ, Amer. Chem. Soc.», *61*, 3359 (1939).
(9) Brev. Franc. 696658.
(10) Brev. U.S.A. 1827317.
(11) Brev. U.S.A. 2218457.
(12) Brev. U.S.A. 2303550.
(13) Brev. U.S.A. 2338445.

si sviluppa viene raccolto a pressione costante in D, misurando con un cilindro graduato l'acqua spostata.

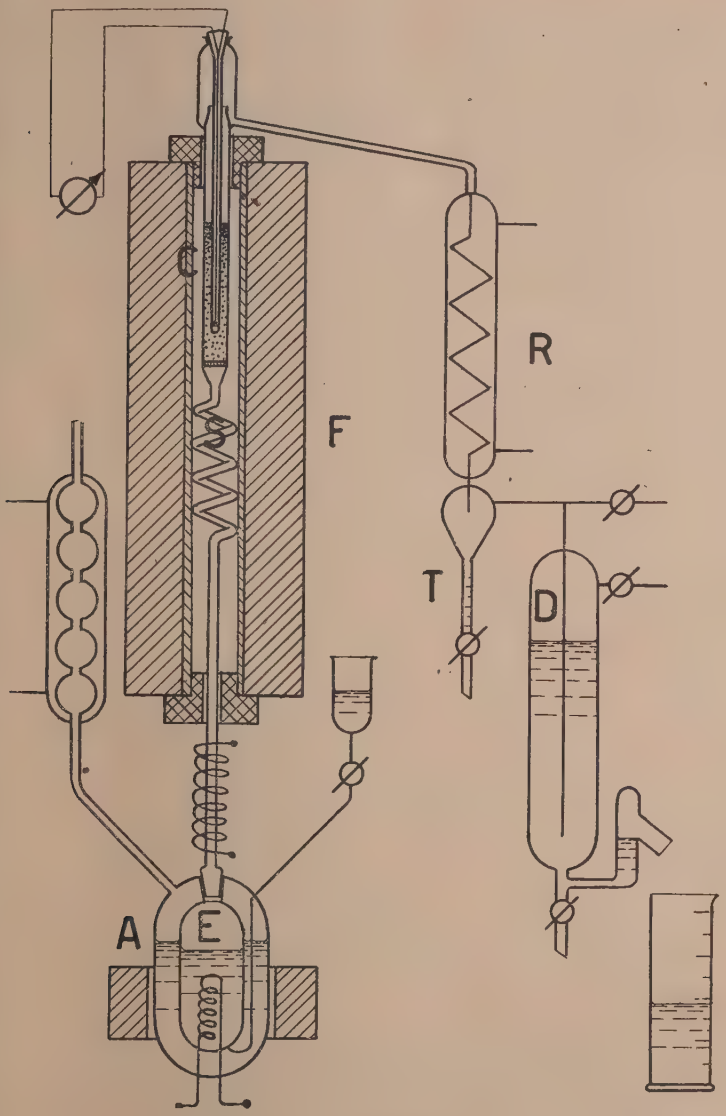


Fig. 1. – Apparecchio per la deidrogenazione del cicloesanolo.

Il catalizzatore è stato preparato da ossido di rame tecnico parzialmente sintetizzato, granulato tra 16 e 36 maglie al cm², che venne sottoposto a ripetuti trattamenti di riduzione con idrogeno e riossidazione con aria. Si ottiene così, con un'ultima riduzione, un rame estremamente attivo: dopo qualche ora di funzionamento la sua attività si stabilizza a valori più bassi di quelli

iniziali e rimane poi soddisfacentemente costante per lunghissimi periodi. Si usarono 43 cm³ di tale catalizzatore (volume apparente). Il tubo di catalisi aveva un diametro interno di 20 mm.

Le prove sono state condotte a temperature diverse, comprese tra 220° C e 299° C, raggruppate intorno ai cinque valori indicati in fig. 2. Le prove non sono tutte alla stessa temperatura perchè, pur mantenendo il forno a temperatura rigorosamente costante, la forte endotermicità della reazione [14] crea degli squilibri termici tra catalizzatore e forno. Ne risultano così delle

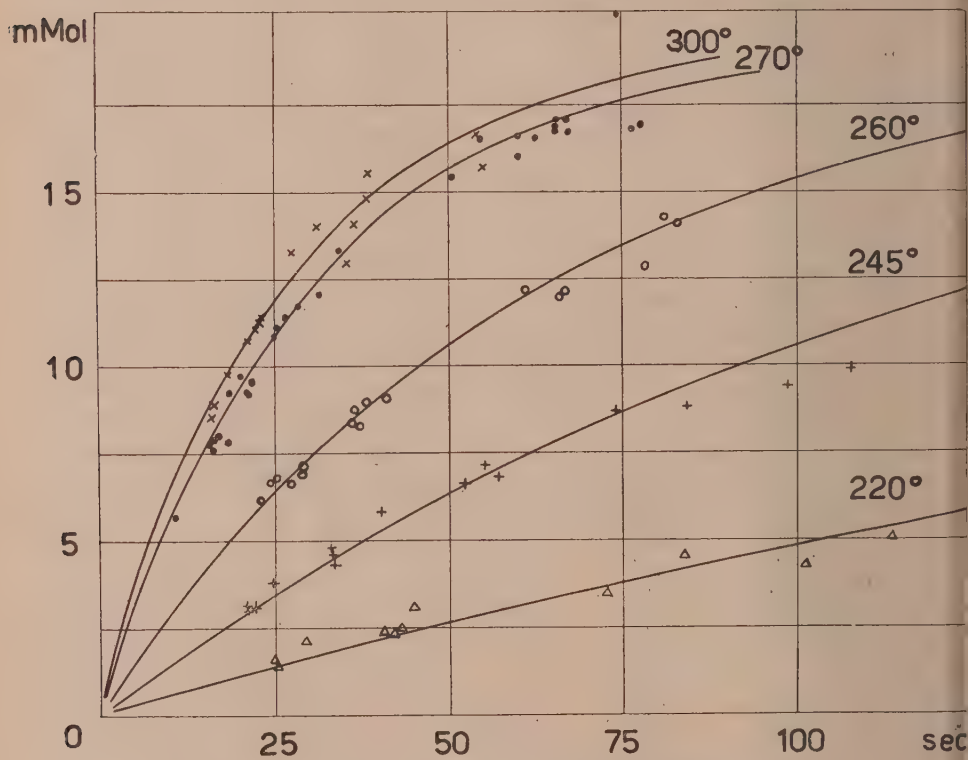


Fig. 2. – Rese in cicloesanone in funzione del tempo di contatto.

differenze di temperatura che dipendono dalla velocità di passaggio del vapore di cicloesanolo e dall'entità della reazione esaminata. Abbiamo però constatato la assoluta costanza della temperatura per tutta la durata di ogni singola prova, che veniva effettuata solo in condizioni di regime. Le misure ripetute più volte sia a temperatura crescente che decrescente, hanno in ogni caso fornito dei risultati ben riproducibili.

I tempi di contatto, espressi come rapporto tra il volume del vapore (misurato alle condizioni di reazione) passato nell'unità di tempo ed il volume apparente del catalizzatore, variarono molto largamente tra 10,5 e 240 secondi.

(14) J. Conn, G. Kistiakowsky, « Journ, Amer. Chem. Soc. », *61*, 1868 (1939).

RISULTATI SPERIMENTALI. – Le misure vennero effettuate determinando alle diverse temperature di reazione il tempo necessario per raccogliere in T (fig. 1) 2,00 cm³ di prodotto condensato e misurando contemporaneamente il quantitativo di idrogeno raccolto in D. Poichè la densità del cicloesanone è praticamente la stessa di quella del cicloesanolo, i 2,00 cm³ di liquido corrispondono in ogni caso a 19.31 mMoli di cicloesanolo.

Nelle figure 2 e 3 sono raccolti risultati di oltre 150 prove; per chiarezza di disegno si sono omessi molti punti coincidenti o quasi. Nella figura 2 in

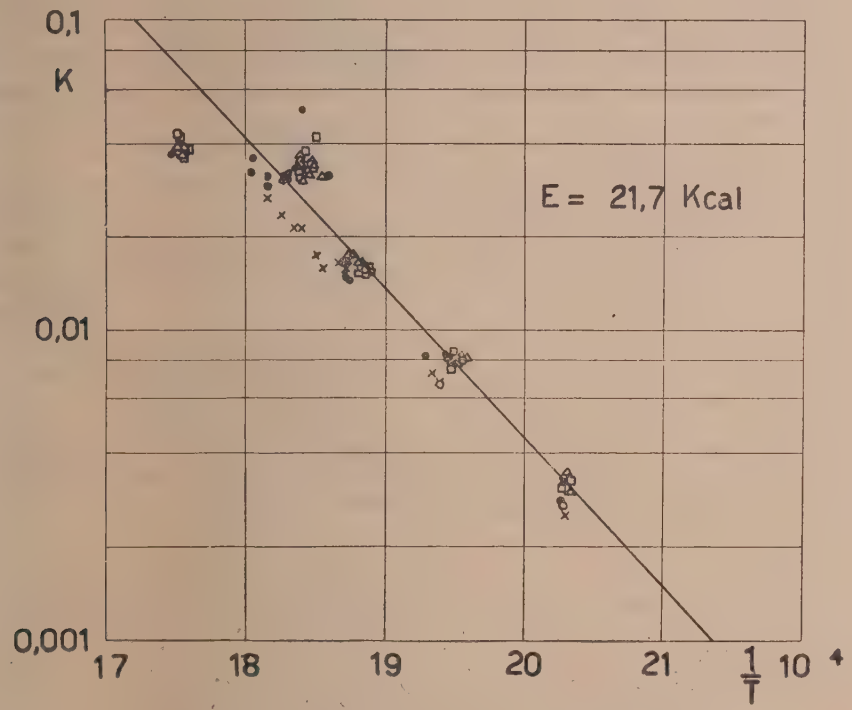


Fig. 3. – Costanti di velocità in funzione della temperatura.
N. B. – I diversi simboli si riferiscono a diversi tempi di contatto:
● tra 0 e 30 secondi; ○ tra 30 e 50 secondi; △ tra 50 e 75 secondi; □ tra 75 e 100 secondi; × oltre 100 secondi.

particolare si sono riportate le millimoli di cicloesanolo trasformato in funzione del tempo di contatto raggruppando le esperienze intorno alle temperature indicate a fianco delle curve. Gli scarti maggiori dai valori segnati si aggirano in pochi casi intorno a 5° C: di essi abbiamo sempre tenuto conto nel calcolo dei valori della costante di velocità riportati in figura 3.

Le curve, per tempi di contatto non troppo elevati (e questo sopratutto nel caso delle temperature maggiori) corrispondono esattamente allo schema di una reazione di primo ordine espressa dall'equazione $dx/dt = k_1 (a - x)$. Un migliore accordo, sopratutto per tempi di contatto maggiori, si dovrebbe

avere con l'equazione $dx/dt = k_1 (a - x) - k_1 Kx$ (nella quale K rappresenta la costante di equilibrio della reazione). Non ci risulta che detta costante di equilibrio sia nota nella letteratura, nè (sopratutto nel caso più interessante delle temperature più elevate) è possibile determinarla sperimentalmente perchè alla reazione di deidrogenazione a cicloesanone si associano le reazioni parallele secondarie già citate, le quali modificano pure sostanzialmente l'andamento cinetico della reazione principale.

Sul diagramma della figura 3 sono riportate le costanti di velocità k_1 per la reazione di deidrogenazione (in scala logaritmica sulle ordinate, in funzione dei valori reciproci delle temperature assolute). Le costanti di velocità sono state calcolate per i singoli punti mediante l'equazione di primo ordine già citata. D'accordo con l'ipotesi di Arrhenius i vari punti si dispongono bene su di una retta, dall'inclinazione della quale si è calcolata una energia di attivazione apparente media di 21,7 kcal.

I punti completamente al di fuori della retta si riferiscono tutti a prove eseguite con tempi di contatto molto elevati e non riportati in figura 2. Questo fatto e la constatazione che, anche a bassa temperatura, gli scostamenti dalla retta ideale sono tanto minori quanto più piccoli sono i tempi di contatto, ci fanno supporre che per piccole velocità dei vapori sul catalizzatore la reazione sia ostacolata dai prodotti di reazione che probabilmente, data la minor entità dei fenomeni di diffusione, vengono più difficilmente desorbiti e bloccano così una parte della superficie attiva del catalizzatore.

Lo scarto riscontrato nelle misure a temperatura più alta è molto probabilmente dovuto alla formazione di cicloesene, che, se pur non quantitativamente, abbiamo tuttavia sperimentalmente riscontrata.

Elettrochimica. — *Ricerche sulla sovratensione dell'idrogeno e dell'ossigeno sul platino.* Nota di G. Bianchi, presentata (*) dal Socio L. Lombardi.

Tra le numerose ricerche sull'influenza della temperatura, della densità di corrente, della composizione dell'elettrodo ecc. sulla sovratensione, poca attenzione è stata rivolta, dopo le ricerche di Tafel (1), alle variazioni che la sovratensione stessa subisce col passare del tempo. Mentre con alcuni metalli le variazioni della sovratensione col tempo si esauriscono in pochi minuti, con altri metalli le variazioni stesse durano anche molte ore portando i valori della sovratensione molto lontani da quelli iniziali. Generalmente la sovratensione aumenta inizialmente, raggiunge un massimo e poi decresce per le modificazioni che la superficie dell'elettrodo subisce a causa della scarica gassosa. I valori delle sovratensioni per i vari metalli riportati nella

(*) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) Tafel, « Zeitschr. Phys. Chem. », 50, 641 (1905).

letteratura più recente sono generalmente ottenuti misurando col metodo diretto la sovratensione dopo pochi minuti dall'inizio dell'elettrolisi. Si deve notare che i valori così ottenuti per i vari metalli non sono tra loro confrontabili corrispondendo a stadi diversi del fenomeno a seconda che l'elettrodo è costituito da un metallo sul quale la sovratensione si stabilizza rapidamente o da un metallo nel quale la sovratensione varia lentamente. Tra i vari metalli, il mercurio e il platino platinato raggiungono in pochi secondi il valore massimo della sovratensione, il piombo e il cadmio lo raggiungono dopo parecchi minuti, lo stagno e il bismuto dopo mezz'ora, il rame nichel e oro dopo più di un'ora e il platino liscio dopo molte ore: a parte il caso particolare del platino platinato, si rileva che i metalli, ai quali corrispondono i valori minori della sovratensione, sono quelli che presentano le variazioni più lente della sovratensione stessa.

In prosecuzione degli studi sulla diffusione dell'idrogeno catodico nel platino [2] ho eseguito la presente ricerca sulle variazioni che le sovratensioni dell'idrogeno e dell'ossigeno sul platino liscio subiscono col passare del tempo.

La disposizione sperimentale era costituita da due bicchieri contenenti la soluzione collegati tra loro da un sifone di vetro con le estremità chiuse da un batuffolo di lana di vetro. In un bicchiere era immerso uno degli elettrodi costituito da una bacchetta di carbone e nel secondo bicchiere era immerso l'altro elettrodo costituito da una lamina di platino saldata a un filo pure di platino che fungeva da catodo o da anodo secondo che si voleva misurare la sovratensione dell'idrogeno o dell'ossigeno: gli elettrodi erano collegati ad una batteria di accumulatori attraverso una resistenza regolabile e un amperometro tipo Weston. Nel bicchiere contenente la lamina di platino veniva fatto gorgogliare dell'idrogeno o dell'ossigeno (prodotti in un piccolo elettrolizzatore) a seconda che la lamina fungeva da catodo o da anodo: il potenziale catodico o anodico (dal quale si deduceva il valore della sovratensione) veniva misurato potenziometricamente con l'ausilio di una cella a calomelano satura il cui sifone terminava in un sottile tubicino capillare la cui estremità veniva posta vicinissima alla lamina di platino secondo le modalità sperimentali consigliate da Knobel–Caplan e Eiseman [3].

Le lamine di platino di vario spessore ricotte per 1 h a 950° C che, all'esame roentgenografico, sono risultate fortemente ricristallizzate [4], immediatamente prima della prova venivano di nuovo arroventate per qualche minuto per scacciare i gas disciolti nel platino. La superficie delle lamine era lucida quale si ottiene nella laminazione e nel seguito è specificato quando la superficie delle lamine era stata preparata diversamente o quando le lamine erano in uno stato diverso da quello descritto.

(2) G. Bianchi. In corso di pubblicazione sugli « Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei ».

(3) Knobel, Caplan–Eiseman, « Trans. Electrochem. Soc. », *43*, 55 (1923).

(4) Le roentgenografie sono del tipo di quelle pubblicate nello studio precedente già citato (2) al quale rimando anche per quanto riguarda la struttura delle lamine di platino crude di cui in seguito.

Il modo di operare era il seguente: riempiti i bicchieri e il sifone che li collegava di soluzione e montati gli elettrodi, si faceva gorgogliare l'idrogeno o l'ossigeno per circa un'ora nel bicchiere che conteneva la lamina di platino e si misurava il potenziale della lamina stessa fino a quando si era stabilizzato. Dopo di che si chiudeva il circuito della corrente elettrolizzante facendo passare una corrente prefissata e costante e, a partire dall'istante di chiusura, si misurava ad intervalli regolari il potenziale catodico o anodico della lamina di platino, dal quale si deduceva il valore della sovratensione tenendo conto del potenziale di equilibrio e della differenza di potenziale del semielemento a calomelano saturo. Le figure riportate in seguito rappresentano i valori della sovratensione così calcolati in funzione del tempo passato dall'istante di chiusura del circuito della corrente elettrolizzante:

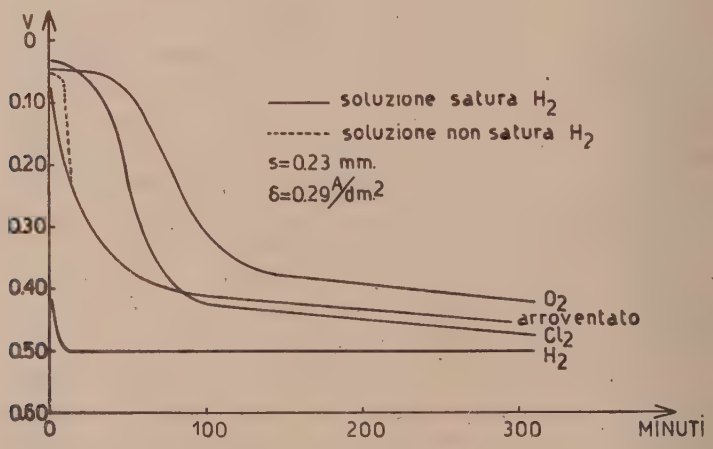


Fig. 1.

in esse sono anche specificati lo spessore s delle lamine di platino e le densità di corrente δ usate. Le misure sono state eseguite alla temperatura ambiente (circa 16° C) e in numerose prove mi sono accertato che le differenze di potenziale catodico o anodico esistenti tra i diversi punti della lamina di platino erano piccole e inferiori alle variazioni di pochi mV che il potenziale stesso subiva quando le bolle di gas più grosse si staccavano dalla superficie dell'elettrodo. Per le prove sulla sovratenzione dell'idrogeno si è usata una soluzione normale di acido solforico e per le prove sulla sovratensione dell'ossigeno una soluzione normale di soda caustica. Nel seguito è specificato quando le condizioni sperimentali erano diverse da quelle descritte. Le variazioni col tempo della sovratensione dell'idrogeno hanno inizialmente un andamento diverso secondo che la soluzione di acido solforico normale è satura di idrogeno e priva di altri gas (asportati dalla corrente di idrogeno gassoso che gorgoglia nella soluzione) oppure non contiene idrogeno e contiene invece disciolti i gas dell'atmosfera (nel caso che si faccia la prova senza far gorgogliare l'idrogeno gassoso). Il tratto di curva

tratteggiata della fig. 1 mostra che in quest'ultimo caso la sovratensione nei primi minuti non aumenta sensibilmente (probabilmente per l'azione depolarizzante svolta dall'ossigeno disciolto nella soluzione), poi aumenta rapidamente raggiungendo, quando l'idrogeno sviluppatosi nell'elettrolisi ha saturato la soluzione, i valori che la sovratensione assume in una soluzione satura di idrogeno. Se la lamina di platino dopo esser stata arroventata e prima di servire per la misura della sovratensione, viene caricata elettroliticamente per la durata di qualche ora con un gas (ossigeno, cloro, idrogeno), si osserva che le variazioni col tempo della sovratensione dell'idrogeno dipendono dal gas assorbito dalla lamina: le curve della fig. 1, confrontate con la curva della stessa figura corrispondente alla lamina che

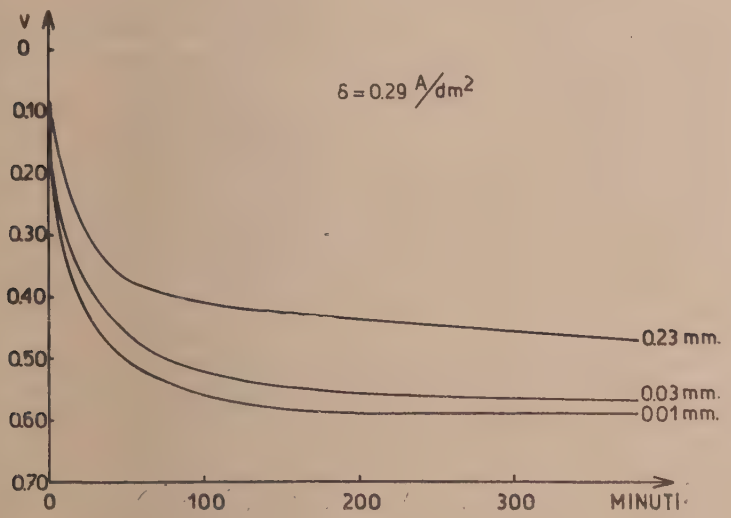


Fig. 2.

è stata semplicemente arroventata, mostrano che l'ossigeno e il cloro ostacolano l'aumento della sovratensione facendola variare lentamente per qualche diecina di minuti, mentre che l'idrogeno disciolto nella lamina fa aumentare con grande rapidità la sovratensione che si stabilizza in pochi minuti. Anche lo spessore della lamina di platino influisce sulle variazioni della sovratensione che sono più lente per le lamine di spessore maggiore come mostrano le curve della fig. 2 e e che si riferiscono alle prove con tre lamine dello spessore di 0,23 mm. 0.03 mm. e 0,01 mm. e con la densità di corrente di 0,29 A/dm². L'influenza dell'incrudimento del materiale che costituisce l'elettrodo è stato indagato sia che l'incrudimento interessi tutto lo spessore della lamina di platino sia che interessi solo un piccolo strato superficiale. Nel primo caso, sperimentando semplicemente con una lamina di platino cruda di laminazione che all'esame roentgenografico mostrava, oltre all'incrudi-

mento, anche un'orientamento preferenziale (5), si è ottenuta la curva a tratti della fig. 3: confrontandola con la curva a tratto pieno che si riferisce, per la stessa densità di corrente di 0,2 A/dm², alla lamina di platino ricotta, si osserva che la sovratensione assume immediatamente un valore molto più alto sul materiale incrudito e continua a crescere per molte ore superando il valore sul quale si stabilizza la sovratensione per le lamine ricotte. Per ottenere sulle lamine di platino ricotte un piccolo strato superficiale incrudito si trattava la loro superficie con carta smeriglio n. 0 e si procedeva poi ad una energica e prolungata lucidatura con una ruota di panno inumidita con una sospensione di allumina in acqua. Sperimentando con le lamine così preparate e senza naturalmente arroventarle dopo la lucidatura, si è verificato che la sovratensione in principio aumenta, raggiungendo valori anche

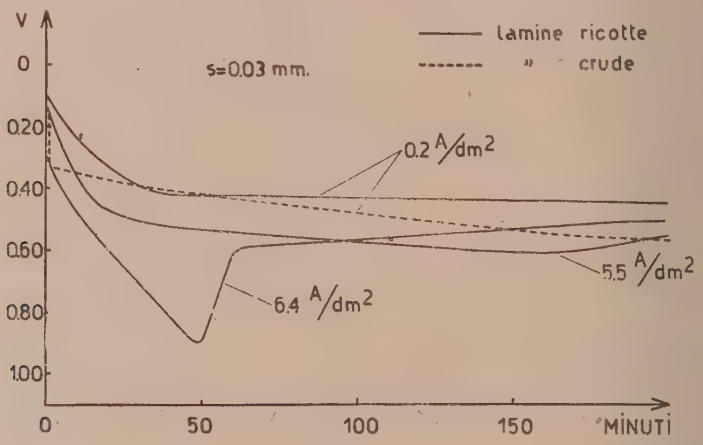


Fig. 3.

molto elevati, per poi diminuire più o meno rapidamente e riprendere i valori che competono alle lamine ricotte senza lo strato incrudito. Le curve della fig. 3 riferentesi alla densità di corrente di 5,5 A/dm² e di 6,4 A/dm² sono due esempi del comportamento delle lamine di platino con uno strato incrudito in seguito alla lucidatura, curve che mostrano in modo evidente (specie per la seconda) l'andamento dei fenomeni. Dalle curve delle figure precedenti si può osservare che la sovratensione dell'idrogeno sul platino liscio tende sempre a stabilizzarsi su un valore di circa 0,50 V anche a piccole densità di corrente. Pure sperimentando con la piccolissima densità di corrente di 0,03 A/dm² si trova che la sovratensione sale lentamente dal valore di qualche mV, che assume nei primi minuti fino a 0,20 V dopo due ore, per raggiungere il valore di 0,45 V dopo 24 h e il valore di 0,55 V dopo 140 h. Durante le

(5) Il platino, analogamente agli altri metalli che cristallizzano nel sistema cubico a facce centrate, nella laminazione a freddo tende ad assumere un orientamento preferenziale nel quale un piano della forma {110} si dispone parallelamente al piano di laminazione e una direzione della forma $<112>$ si dispone parallelamente alla direzione di laminazione. Vedi su questo argomento: BARRETT, *Structure of Metals*, p. 395, New York (1943).

esperienze si è inoltre osservato che operando con densità di corrente moderate e lasciando procedere per un tempo sufficientemente lungo la scarica catodica di idrogeno, la lamina di platino lucida si riveste di un velo giallo nettamente visibile confrontando la lamina stessa con una lamina di platino nuova. Se la densità di corrente è elevata, la lamina si riveste a chiazze o a strisce di una patina nera la cui formazione è già stata precedentemente segnalata [6] e attribuita alla disintegrazione della superficie dell'elettrodo causata dalla scarica dell'idrogeno [7]. Sia il velo giallo che la patina nera sono insolubili negli acidi minerali: arroventando la lamina il velo giallo scompare lasciando la lamina di platino perfettamente pulita [8], la patina nera scompare lasciando una leggera appannatura. La formazione del velo giallo avviene più facilmente su una lamina di platino sulla quale già precedentemente il velo stesso si era formato ed era stato distrutto con l'arroventamento o su una lamina che venga alternativamente sottoposta a scarica catodica di idrogeno e a scarica anodica di ossigeno. Lasciando procedere la scarica catodica di idrogeno per un tempo sufficiente alla formazione del velo giallo, si verifica che la sovratensione si stabilizza per tutte le densità di corrente alle quali si è sperimentato (< 10 A/dm^2) su un valore di 0,52 V: il tempo per raggiungere la stabilizzazione è molto grande per le lamine nuove o che sono state pulite con una scarica anodica di cloro, può essere anche di solo poche ore per lamine di platino precedentemente usate e semplicemente arroventate prima della prova. Per esempio le curve della fig. 2 sono state ottenute con lamine nuove, quelle a tratto continuo della fig. 3 con una stessa lamina arroventata tra una prova e l'altra. Si deve notare che anche nei primi minuti la sovratensione risulta sempre minore sulla lamina già usata. I fenomeni fanno supporre che la scarica catodica di idrogeno modifichi lo strato superficiale della lamina di platino in modo da ridurre la sovratensione al valore di 0,52 V e che il platino non sia in grado di « resistere » a valori della sovratensione maggiori di 0,52 V: lo strato superficiale « attivo » che si forma (e che trova analogia nei fenomeni di assorbimento dell'idrogeno nel palladio [9] in cui dei cicli di assorbimento e di estrazione aumentano la velocità con cui l'idrogeno è assorbito dal palladio come se si formasse uno strato « attivo ») non viene distrutto con un arroventamento moderato ma viene distrutto da una scarica anodica di cloro. Il valore di 0,52 V da me trovato come valore massimo che può assumere la sovratensione dell'idrogeno sul platino liscio può essere confrontato con quello di 0,50 V sul quale Tafel [1] aveva trovato che si stabilizza il valore della sovratensione alla densità di corrente di 10 A/dm^2.

(6) FERGUSON e DUBPERNELL, « Trans. Electrochem. Soc. », *64*, 221 (1933).

(7) A densità di corrente moderate sulla superficie dell'elettrodo di platino si formano delle « vesciche » (blister) che, se si aumenta la densità di corrente, si aprono formando dei piccoli crateri.

(8) In qualche caso arroventando solo un angolo della lamina si formano dei colori d'interferenza (fenomeno delle lamine sottili).

(9) SMITH e DERGE, « Journal Am. Chem. Soc. », *56*, 2513 (1934).

Per la scarica anodica di ossigeno su una lamina di platino liscio da una soluzione di soda caustica normale si sono osservati fenomeni analoghi a quelli con l'idrogeno (influenza dei gas disciolti nella soluzione o nella lamina di platino, influenza dell'incrudimento, formazione di un velo giallo in seguito alla scarica prolungata di ossigeno): in particolare si è osservato che la sovratensione dell'ossigeno sul platino liscio tende a stabilizzarsi per densità di corrente maggiori di 1 A/dm², e dopo un tempo sufficientemente lungo, sul valore di 1,30 V come mostrano, limitatamente alle prime ore, le curve della fig. 4 dalle quali si può rilevare come varia la sovratensione col tempo. Per densità di corrente minori di 1 A/dm², la sovratensione si stabilizza su un valore minore di 1,3 V: per le due curve segnate in fig. 4 tale valore era di 11, V. Le misure di Foerster e Piguet [10] davano per la sovratensione

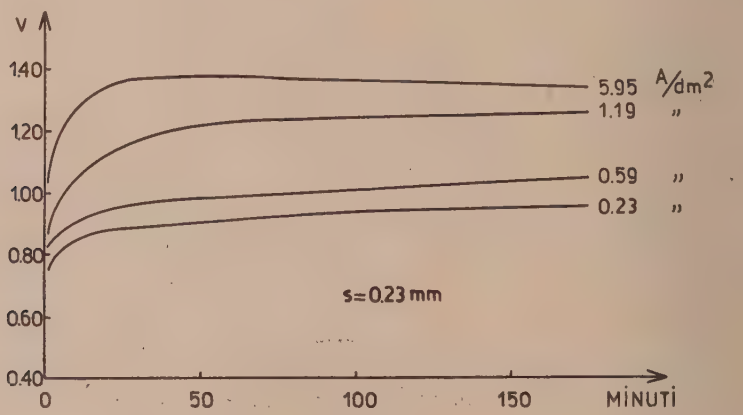


Fig. 4.

dell'ossigeno sul platino liscio misurata dopo due ore dall'inizio della scarica e con la densità di corrente di 3,3 A/dm² il valore di 1,47 V e le misure di Newbery riportate da Creighton e Koehler [11] davano per la sovratensione in parola il valore di 1,49 V per la densità di corrente di 100 A/dm² e di 1,38 V per la densità di corrente di 150 A/dm²: benchè in quest'ultimo caso non siano specificate le modalità con le quali si è effettuata la misura, l'elevata densità di corrente usata e il fatto che la sovratensione con la d. d. c. di 150 A/dm² sia minore di quella con la d. d. c. di 100 A/dm² permettono di credere che i valori riportati siano vicini a quelli su cui la sovratensione stessa si sarebbe stabilizzata e costituiscono una prova indiretta dell'attendibilità del valore limite di 1,30 V da me dato per la sovratensione dell'ossigeno sul platino liscio.

Dalla presente ricerca si possono trarre le seguenti conclusioni:

(10) FOERSTER e PIGUET, « Zeitsch. Elektrochem. », *10*, 714 (1904).
(11) CREIGHTON e KOEHLER, *Electrochemistry*. New-York, 1943, vol. I a p. 251.

le sovratensioni dell'idrogeno e dell'ossigeno sul platino liscio misurate dopo pochi minuti dall'inizio della scarica dipendono dalla presenza di gas nella soluzione, dalla presenza di gas disciolti nel platino, dal come l'elettrodo è stato preparato (pulitura con cloro anodico, lucidatura con la formazione di uno strato superficiale deformato) e dalla storia precedente dell'elettrodo;

su un elettrodo di platino incrudito la sovratensione assume inizialmente valori maggiori che su un elettrodo di platino ricotto e le variazioni della sovratensione col tempo durano più a lungo;

la sovratensione dell'idrogeno sul platino ricotto liscio si stabilizza, anche a densità di corrente molto piccole, sul valore di 0,52 V;

la sovratensione dell'ossigeno sul platino ricotto liscio di stabilizza, per densità di corrente maggiori di 1 A/dm², sul valore di 1,3 V;

la scarica dell'idrogeno e dell'ossigeno sul platino liscio provoca una modificazione superficiale dell'elettrodo con formazione di uno strato « attivo » sul quale la sovratensione non supera i valori precedenti;

il tempo in cui si manifestano le variazioni della sovratensione dell'idrogeno sul platino è dello stesso ordine di grandezza del tempo in cui si manifestano i fenomeni di diffusione nel platino dell'idrogeno catodico.

Ringrazio il Direttore del Laboratorio, prof. Oscar Scarpa, che mi ha guidato durante lo svolgimento della presente ricerca.

Paleontologia. — *Resti di animali domestici neo-eneolitici della caverna Pocala (Aurisina) conservati nel Museo dell'Istituto Geologico dell'Università di Padova*(*). Nota di A. Riedel, presentata(**) dal Corrisp. Gb. Dal Piaz.

Nel Museo Geologico dell'Università di Padova sono conservati alcuni resti di animali domestici olocenici provenienti dalla caverna Pocala nel Carso triestino presso Aurisina.

In questa stessa stazione preistorica sono stati rinvenuti numerosissimi resti di animali pleistocenici, già studiati dal Fabiani, dal Battaglia e dal Leonardi (bibl. 2, 1, 6).

I resti olocenici provengono da strati argillosi che hanno dato pure, a quanto m'ha comunicato il prof. R. Battaglia, utensili neo-eneolitici.

Mi è gradito dovere ringraziare il mio Maestro prof. Gb. Dal Piaz, il prof. P. Leonardi ed il prof. R. Battaglia che m'hanno aiutato e consigliato

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Padova e compreso nel programma di una borsa di perfezionamento presso il Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 13 marzo 1948.

durante il lavoro. Ringrazio pure l'amico dott. Gino Ogniben che ha eseguito il disegno riprodotto nel lavoro.

Canis familiaris palustris Ruet.

Al cane appartiene un ramo mandibolare sinistro tipico di *Canis familiaris palustris* Ruet. (Tabella I, n. I).

Per confronto riporto le misure di un ramo mandibolare destro che si può avvicinare per la sua forma snella e slanciata al *Canis familiaris* Ruet. var. *spalletti* Strobel.

Il reperto, inedito, proviene da Opicina (Trieste) ed è conservato nel Museo Geologico dell'Università di Padova (Tabella I, n. II).

TABELLA I.

		I		II
Lunghezza serie alveolare PM_1–M_3	mm.	68,0	mm.	66,3
Lunghezza condilo sinfisaria	»	124,0	»	118,5
Lunghezza gonio-sinfisaria	»	119,4	»	117,0
Lunghezza massima del ferino	»	21,3	»	20,6
Spessore del ferino	»	8,5	»	7,6
Spessore del ramo mandibolare sotto il ferino	»	10,4	»	9,8
Altezza del ramo mandibolare sotto il ferino	»	23,2	»	19,5
Altezza del ramo mandibolare sotto PM_1	»	18,7	»	17,0
Diametro massimo dell'alveolo del canino			»	9,3

Sus scrofa palustris Ruet.

Al maiale sono riferibili un cranio mancante della parte anteriore e di parte di quella posteriore (Tabella II), ed una mandibola di un individuo giovane, probabilmente femmina, in cui l'M_3 non è ancora spuntato completamente (Tabella III).

Il cranio apparteneva ad un individuo di dimensioni eccezionalmente grandi. Esse sono però inferiori a quelle generalmente attribuite al cinghiale neolitico (bibl. 4), come è appunto il caso dei maiali di questo periodo. La forma delle orbite, lo smalto dei denti molto spesso ed altri caratteri lo fanno attribuire al *Sus scrofa palustris* Ruet.

Anche la mandibola apparteneva ad un individuo di grandi dimensioni.

TABELLA II (*misure del cranio*).

Larghezza massima dei condili dell'occipitale		mm.	59,5
Larghezza del foro occipitale		»	25,3
Distanza fra le protuberanze posteriori delle creste occipitali		»	111,0 (?)
Larghezza bizigomatica		»	148,0
Distanza fra le apofisi zigomatiche delle arcate sopracigliari		»	114,0
Lunghezza della serie dei molari sinistri		»	72,0
Dimensioni dell'M^3 sinistro	mm. 34,3	»	19,4

Tabella III (*misure della mandibola*).

Lunghezza condilo–sinfisaria	mm.	249,5
Distanza fra i bordi esterni degli alveoli dei canini	»	44,0
Altezza del ramo mandibolare destro sotto M_1	»	41,7
Spessore del ramo mandibolare destro sotto M_1	»	25,0
Lunghezza della serie alveolare destra PM_2–M_2	»	78,3
Lunghezza della serie alveolare destra PM_2–PM_4	»	39,2
Lunghezza del diastema fra PM_2 e PM_1	»	11,3
Lunghezza minima del diastema fra PM_2 ed il canino	»	23,3
Diametro massimo dell'alveolo del canino	»	13,2

Capra hircus ruetimeyeri Duerst.

Alla capra appartiene una cavicchia ossea destra a forma di sciabola, con la faccia interna quasi piana e quella esterna convessa. Il frammento manca dell'estremità superiore. I diametri della base sono di mm. 24,8 e 38 e la circonferenza di mm. 103.

La forma delle corna è quella tipica della capra delle torbiere (bibl. 5). Questa razza è stata trovata nella regione veneta a Fimon (bibl. 7), a Arquà (bibl. 3), a Sossano ecc.

La forma delle corna di questa capra domestica delle palafitte è uguale a quella della capra selvaggia che vive attualmente nell'Asia Minore (Capra Bezoar = *Capra aegagrus* Erx.) e da cui probabilmente essa deriva (bibl. 4).

Ovis aries palustris Ruet.

La pecora è rappresentata da un teschio incompleto mancante della estremità delle corna e di parte della faccia e della regione posteriore (Tabella IV). È un esemplare giovane coi premolari da latte in cui l'M^2 sta ancora spuntando. Il PM^3 ed il PM^4 hanno due lobi bene evidenti. Le orbite sono quasi circolari. Le corna sono massiccie, un po' simili a quelle della capra, leggermente convesse sul lato interno, ed accennano al tentativo di formare una terza faccia anteriore.

Alla pecora appartiene poi forse un altro frammento di corno sinistro, molto più piccolo, a sezione lenticolare piana verso l'interno e convessa all'esterno. I diametri alla base sono di circa mm. 40 e 26,5.

Per confronto si può citare un corno sinistro inedito di pecora proveniente dalla torbiera di Brunndorf (Lubiana) e conservato nel Museo Geologico dell'Università di Padova. Esso ha gli stessi caratteri delle corna del teschio sopra descritto ed è solamente meno massiccio e più snello. I diametri della sua base sono di mm. 51 e 28,5 e la circonferenza è di mm. 130; la lunghezza dello spigolo anteriore è di mm. 117, quella dello spigolo posteriore di mm. 130.

G. Ognibene *dis.*

Fig. 1. – Corno destro di *Ovis aries palustris* Ruet., ♂, visto perpendicolarmente allo spigolo anteriore (0,7 d. gr. nat.).

Fig. 2. – Corno destro di *Ovis aries palustris* Ruet., ♂, visto perpendicolarmente alla faccia esterna (0,7 d. gr. nat.).

Fig. 3. – Sezioni trasversali dello stesso corno eseguite alla base ed a 6 cm. di altezza (circa metà d. gr. nat.).

Tabella IV.

Diametro maggiore alla base del corno sinistro	mm.	55,0
Diametro minore alla base del corno sinistro	»	40,0
Diametro maggiore del corno sinistro a 6 cm. di altezza	»	43,0
Diametro minore del corno sinistro a 6 cm. di altezza	»	22,5
Circonferenza alla base del corno sinistro	»	155,0
Circonferenza del corno sinistro a 6 cm. di altezza	»	111,0
Distanza alla base fra gli spigoli anteriori delle corna	»	30,0 (?)
Distanza alla base fra gli spigoli posteriori delle corna	»	86,0
Diametro massimo delle orbite	»	37,0
Larghezza del palato all'altezza di M^1	»	39,0
Lunghezza della superficie masticatoria dei premolari PM^2–PM^4	»	35,0
Lunghezza di M^1	»	15,3

Angolo fra le due corna 100° circa.

La pecora domestica è presente nei giacimenti neolitici e dell'età del bronzo con tre forme. L'una con corna grandi e massiccie, fortemente ricurve, con tendenza a formare una terza faccia anteriore, un'altra con corna a dimen-

sioni minori, poco ricurve ed a sezione lenticolare ed una terza invece priva di corna. Quest'ultima forma è stata rinvenuta pure nel neolitico (bibl. 4), ma appare però generalmente con l'età del bronzo.

GIORDANI *fot.*

Figg. 4 e 5. – Cranio di *Ovis aries palustris* Ruet., ♂, visto di fronte e di lato. (Metà d. gr. nat.).

Questi tre tipi erano stati classificati come tre razze diverse (*Ovis aries palustris*, *Ovis aries studeri* e pecora dell'età del bronzo, *Bronzeschaf*), ma ora il Reitsma (1932 bibl. 4) ha proposto di considerarle come rispettivamente la forma maschile e due forme femminili della stessa razza.

Stando a questa interpretazione il cranio della Pocala può venire attribuito ad un individuo maschile, il corno isolato forse ad uno femminile. Non credo invece che il corno di Brunndorf possa venir attribuito con sicurezza ad uno dei due sessi.

Bos taurus brachyceros L.

Del bue è rimasto conservato solo un metacarpo di età incerta mancante dell'estremità distale. L'estremità prossimale ha una larghezza di mm. 53,5 e lo spessore minimo della diafasi è di mm. 23,8. Potrebbe forse venir attribuito al bue delle torbiere, *Bos taurus brachyceros* Ruet., a meno che non appartenga ad un'esemplare giovane di una forma maggiore.

Dagli strati olocenici proviene probabilmente pure un frammento di *Bos taurus brachyceros* Ruet. La circonferenza alla base del corno destro frammentario è di mm. 162 e la semilarghezza del frontale sulla sutura fronto-occipitale è di mm. 73.

CONCLUSIONE. - Riassumendo i risultati dell'esame paleontologico, possiamo osservare che nella fauna neo-eneolitica della caverna Pocala sono rappresentate le forme tipiche della più antica fauna domestica delle palafitte e degli altri insediamenti preistorici coevi. Sono presenti infatti la capra, la pecora, il bue, il cane e il maiale delle torbiere, razze che furono istituite appunto già dal Ruetimeyer in base a studi sulla fauna delle palafitte svizzere e che rappresentano le prime forme di animali domestici apparsi in Europa.

BIBLIOGRAFIA.

(1) R. BATTAGLIA, *La caverna Pocala.* «Memorie R. Acc. Naz. Lincei», anno CCCXVIII, 1921, ser. V, vol. XIII, fasc. 16, Roma 1922, pp. 617-686.

(2) R. BATTAGLIA, *Notizie sulla stratigrafia del deposito quaternario della caverna Pocala di Aurisina.* «Le grotte d'Italia», anno IV, n. 1. 1930, pp. 17-44.

(3) R. FABIANI, *I Mammiferi Quaternari della Regione Veneta.* «Mem. Ist. Geol. Univ. Padova», 1919, pp. 1-174.

(4) K. HESCHELER und J. RUEGER, *Die Reste der Haustiere aus den neolithischen Pfahlbaudörfen Elgozwil 2 (Wauwilersee, Kt. Luzern) und Seematte-Gelfingen (Baldeggersee, Kt. Luzern).* «Vierteljahrsschrift Naturf. Ges. in Zürich», LXXXVII, 1942, pp. 383-486.

(5) E. KUHN, *Die Tierreste der la Tène-Siedlung Bonaduz (Kt. Grbd.),* «Bündnerisches Monatsblatt», giugno 1946, n. 6, Chur, pp. 163-176.

(6) P. LEONARDI, *Nuovi resti di mammiferi pleistocenici della caverna Pocala (Carso triestino).* «Atti Museo Civ. Storia Nat.», Trieste, vol. XIII, 1935, pp. 1-26.

(7) A. RIEDEL, *La fauna olocenica delle torbiere dei Berici.* «Bollettino della Soc. Adriatica di Sc. Nat.», Trieste, 1948. In corso di pubblicazione.

Mineralogia. — *Sulla presenza della scorodite e dell'anglesite a Monte Valerio (Campiglia Marittima)* [*]. Nota di M. BERTOLANI, presentata [**] dal Corrisp. G. CAROBBI.

Diversi autori hanno accennato alla presenza di arseniati a Monte Valerio. Fin dal 1845 Pilla segnalava in quella zona [1] la pitticite e Blanchard comunicava nel 1876 all'Accademia dei Lincei alcune analisi eseguite da Rosenthal su minerali di ferro e stagno delle miniere delle Cento Camerelle e della Cavina a Monte Valerio [2], nelle quali figura un notevole percento di arsenico. Dati consimili venivano portati anche da A. H. Church [3] e Aloisi nel 1907 rendeva nota la presenza di adamina [4], sia pur estremamente rara. Da nessuno però fin'ora è stata segnalata la scorodite per tale luogo. Questo minerale è assai poco diffuso: in Italia mi risulta sia stato trovato due sole volte: da Höfer nel 1889 nell'Isola d'Elba (Capo Bianco) [5] unita a farmacosiderite e da Pelloux nel 1921 a Riu Planu is Castangias presso Gonnosfanadiga [6]. Sempre nel territorio di Gonnosfanadiga e precisamente a Serra s'Olioni è stata raccolta recentemente da Lauro altra scorodite, sulla quale è apparso un breve studio di Rossetti [7].

Anche l'anglesite non è stata mai segnalata nel Campigliese, pur essendo prevedibile la sua presenza, dato che esistono nella zona filoni di galena.

L'esemplare, sul quale ho effettuato le mie ricerche [8], è costituito da calcite in minuti e limpidi cristalli romboedrici, formante numerose piccole

(*) Ricerche eseguite presso il Centro di Studi per la Geochimica e la Mineralogia del C.N.R. a Firenze.

** Nella seduta del 13 marzo 1948.

(1) F. RODOLICO, *Ricerche sulle rocce eruttive recenti della Toscana. Le rocce del Campigliese*. « Mem. Soc. Tosc. di Scienze nat. », XLI, Pisa, 1931.

(2) BLANCHARD, *Sulle miniere di stagno di Campiglia*. « Atti R. Acc. dei Lincei », Trans. Roma, 1878.

(3) A. H. CHURCH, *La scoperta del minerale di stagno in Italia ecc.* « Boll. R. Com. Geol. d'Italia ». Roma, 1879.

(4) P. ALOISI, *Adamina di Monte Valerio (Campiglia Marittima)*. « Atti Soc. Tosc. Scienze Nat. », Processi Verbali, Pisa, 1907.

(5) Vedi C. HINTZE, « Handbuch der Mineralogie », I, [IV], Berlin u. Leipzig, 1933.

(6) A. PELLOUX, *Scorodite di Riu Planu is Castangias*. « Rass. Ass. Min. Sarda », XXVII, Iglesias, 1922.

(7) V. ROSSETTI, *Scorodite di Serra s'Olioni (Gonnosfanadiga Sardegna)*. « Per. di Min. », XII, 1941.

(8) Il professor Rodolico, durante i suoi studi sulle rocce del Campigliese, ebbe occasione di osservare sulla roccia che forma le pendici del Monte Valerio alcune punteggiature di color giallo zolfo. In seguito ottenne dalla direzione dell'A.M.M.I. un campione abbondantemente impregnato della stessa sostanza ocracea, sul quale, mediante indagine spettrochimica, riscontrò la netta presenza dell'indio. Notato l'interesse del minerale, cortesemente volle affidarmelo per lo studio, mettendo a mia disposizione anche numerosi campioni di minerali e rocce del Campigliese da esso raccolti; gli esprimo perciò i miei ringraziamenti.

geodi, nelle quali si annida una polvere giallo chiara, qua e là chiazzata di rosso sangue e di bruno. Frammisti alla polvere appaiono in alcuni punti piccoli grani di cassiterite. Al microscopio si distinguono facilmente la calcite in grossi frammenti, la cassiterite in granuli fortemente rifrangenti e dei minutissimi cristallini birifrangenti assai diffusi. Con l'obiettivo a immersione la parte minuta si rivela formata da tre diversi minerali: l'ematite in pochi granuli a volte trasformati in limonite; individui assai numerosi di colore giallo, alcuni dei quali ad aspetto prismatico tozzo, ma per lo più a contorno irregolare; essi presentano estinzione retta, birifrazione bassa e forte rifrazione; coi liquidi ad indice noto ho potuto determinare in essi un valore medio $n = 1{,}78$. Il terzo minerale è rappresentato invece da cristalli con l'aspetto di prismi allungati, troncati alla base, incolori; anch'essi sono fortemente rifrangenti (n notevolmente superiore a 1,78), a birifrazione bassa; l'estinzione è retta, il colore d'interferenza giallino di 1° ordine, il segno dell'allungamento positivo. Trattando la miscela dei minerali con acido cloridrico concentrato ed osservando, sempre al microscopio, il residuo indisciolto, si nota un arricchimento di cassiterite e di cristallini allungati; questi ultimi però parzialmente attaccati agli orli, mentre non appaiono più le granulazioni giallastre e i primi tozzi, evidentemente sciolti dall'acido cloridrico.

Dopo aver accertato qualitativamente la presenza di numerosi elementi, tra i quali predominano Sn , Fe , Pb , As , S [9], ho effettuato l'analisi quantitativa cercando nel contempo di separare chimicamente i vari minerali componenti il campione. Perciò ho trattato la sostanza finemente polverizzata, con acqua calda, in modo da eliminare i pochi cloruri presenti, chè risultano tutti solubili, quindi con acido acetico diluito caldo per sciogliere tutta la calcite. Il residuo, costituito dalla polvere gialla e dalla cassiterite, è stato attaccato con acqua regia in capsula di porcellana a bagno maria, evaporando e ripetendo l'attacco parecchie volte. Nel filtrato sono stati determinati Si , Mg , As , Pb , Fe. Il residuo biancastro indisciolto in acqua regia è stato trattato a caldo con soluzione concentrata di idrossido di potassio. La parte cassiteritica è stata pesata, dopo lavaggio con acido nitrico per liberarla da eventuale idrato di ferro. Nel filtrato, dopo acidificazione, è stato precipitato e dosato il piombo come solfato, pochissimo Fe e Mg. Il residuo solforico totale, l'anidride carbonica e l'acqua sono stati determinati in altre porzioni del campione. Ecco i risultati complessivi dell'analisi.

(9) La sola qualitativa spettrochimica non permette di rendersi conto della reale entità degli elementi presenti a causa della assai diversa sensibilità delle righe caratteristiche e della differente volatilità di essi. Per esempio l'arsenico si manifesta con righe di mediocre intensità, assai inferiori a quelle del rame.

SiO_2	0,48
SnO_2	14,26
Fe_2O_3	9,48
PbO	13,71
CaO	23,85
MgO	0,38
Na_2O	0,11
As_2O_5	13,63
SO_3	4,64
CO_2	16,79
Cl	0,12
H_2O^+	3,26
H_2O	0,08
	100,79
O per Cl_2	0,03
	100,76

Tenendo conto che nella parte indisciolta in acido, oltre alla cassiterite, è presente $PbSO_4$, appunto assai difficilmente attaccabile da acidi e facilmente solubile in soda e potassa caustica, si può stabilire in base ai dati analitici[10], la presenza nel campione di circa il 18 % di anglesite. Detto minerale s'identificherebbe abbastanza bene, in base alle proprietà ottiche, con quei cristalli allungati visti al microscopio proprio nella parte indisciolta insieme ai granuli di cassiterite.

La parte solubile in acqua regia invece, detratta la porzione di anglesite, parzialmente discioltasi, si può identificare con la scorodite. La composizione teorica desunta dalla formula $FeAsO_4 \cdot 2\,H_2O$, è Fe_2O_3 34,6; As_2O_5 49,8; H_2O 15,5. Dall'analisi del campione di Monte Valerio, che ne contiene circa il 26 %, si ha Fe_2O_3 35,95; As_2O_5 51,69; H_2O 12,36. Il basso percento di acqua si può spiegare col fatto che la scorodite, pur essendo il più delle volte minerale di alterazione delle arsenopiriti, subisce anch'essa trasformazioni in seguito ad ossidazione, come appare nel campione in esame, dove numerose sono le macchie di ematite e limonite. Trovandosi la scorodite intimamente mescolata con molti altri minerali, una parziale alterazione di essa potrebbe provocare reazioni di scambio e quindi un'anomalia nell'acqua di cristallizzazione. Le proprietà ottiche d'altro canto, confermano la diagnosi; infatti i tre indici normalmente assegnati alla scorodite $\alpha = 1{,}78$, $\beta = 1{,}79$, $\gamma = 1{,}81$, sono assai vicini al valore medio 1,78 misurato sui prismi tozzi e fratturati e sulle granulazioni gialle solubili in HCl. Tale dato ci permette anche di escludere senz'altro la pitticite, trovata nel Campigliese da Pilla, che ha indici inferiori

(10) Per l'identificazione dei singoli minerali che compongono la miscela del campione, ho effettuato anche analisi chimiche e spettrochimiche separate sulle porzioni disciolte nei diversi attacchi e sul residuo ultimo.

a 1,635 e la farmacosiderite cubica. Inoltre l'estinzione retta è in buon accordo con l'appartenenza del minerale al sistema rombico, nel quale cristallizza la scorodite.

Gli altri minerali presenti nel campione risultano essere la cassiterite (circa 14 %), la calcite (40 %), 0,20 % di cloruri e un silicato di magnesio rispondente alla formula $MgSiO_3$ (0,80 %), come risulta dalla tabella seguente:

H_2O	0.08		
SnO_2	14,26		
Fe_2O_3	9,48	0,059	1
As_2O_5	13,63	0,059	1
H_2O	3,26	0,181	3.07
PbO	13,71	0,061	1
SO_3	4,64	0,058	0,95
CaO	23,85	0,425	1
CO_2	16,79	0,382	0,89
Na	0,08	0,033	1
Cl	0,12	0,003	1
SiO_2	0,48	0,008	0.88
MgO	0,38	0,009	1
	100,76		

La presenza del silicato di magnesio non meraviglia qualora si esamini la roccia presente nel luogo di origine del campione. Essa è compatta, di color grigio, attraversata da fratture regolari spalmate di sostanze ocracee. È inattaccabile dagli acidi.

L'analisi chimica ha dato:

SiO_2	68.12
Al_2O_2	17.10
Fe_2O_3	5.37
CaO	—
MgO	4.53
Na_2O	3.48
H_2O^+	0,87
H_2O^-	0,18
	99.65

Si tratta quindi di una roccia fortemente metamorfosata e trasformata, rispetto al calcare normalmente segnalato per questa zona da vari autori [11].

(11) Confronta: B. LOTTI, *Geologia della Toscana*. Roma, 1910; A. STELLA, *Nuovi studi sul giacimento di stagno del Campigliese*. « Rend. R. Acc. Lincei », XXVII, 1938; P. DORN, *Studien über die Geologie und die Minerallagerstätten von Campiglia Marittima in Toskana*. « Z. deutsch. geol. Ges. », XCIV, 19, 1942. F. RODOLICO, *Ragguagli sul granito del Campigliese*. « Mem. Soc. Tosc. di Scienze Nat. », LII, Pisa (1943)

Una ricerca eseguita con lo spettrografo Zeiss Qu 24 sulla miscela dei minerali, data l'impossibilità di una separazione meccanica, ha rivelato un numero veramente eccezionale di costituenti minori, che riporto, unitamente alle principali righe caratteristiche [12], trascurando quelli identificati per via chimica.

Ag – 3280,60	Al – 2373,13	Ba – 2335,27	Be – 2348,61
3382,89	2567,99	2634,78	3130,42
2437,79	2575,43	3071,59	3131,07
	3082,16	4554,04	3321,34
Cr – 2975,48	Cu – 2246,99	Bi – 2897,97	In – 3039,35
3013,72	3247,54	2938,31	3256,09
3014,92	3273,96	2989,04	3258,56
3015,20		3067,63	4101,77
La – 2249,35	Mn – 2576,10	Ni – 3002,49	Sb – 2528,52
3104,58	2593,73	3050,82	2598,06
3245,12	2798,27	3414,75	2877,91
	2801,06	3492,95	3232,50
Sr – 2569,50	Ti – 3191,99	V – 3102,30	W – 2551,35
2931,83	3199,91	3110,70	2896,44
3464,57	3361,21	3183,40	2944,39
	3370,44	3183,99	2947,38
		3185,40	
		4379,24	
Zn 3282,33	Zr – 2875,98		
3302,60	3029,51		
3345,00	3391,97		
	3438,23		

Tra essi Be , Cr , La , Ni , Sr , W , Zr sono rappresentati da tracce spettroscopiche; notevole invece l'intensità delle righe di Ag , Al , Cu , In.

A scopo di orientamento ho anche effettuato spettrogrammi su calcite pura del campione in esame, cassiterite tipica di Monte Valerio, roccia magnesiaca con mineralizzazioni dello stesso luogo e galena della Cava del Piombo. Inoltre ho sottoposto ad esame spettrografico anche il residuo di una soluzione cloridrica (scorodite e parte di anglesite), della soluzione acetica (calcite), della soluzione acquosa (cloruri) e il residuo indisciolto in acidi (cassiterite, anglesite e ganga silicea). Ho potuto in tal modo determinare che apparten-

(12) Per la determinazione dei costituenti minori mi sono basato su righe riportate da G. R. Harrison, *Intensities in arc, spark, ecc.* New York, 1946; H. Kayser, R. Ritschl, *Tabelle der Hauptlinien der Linienspectren, ecc.* Berlin, 1939; J. M. Lopez De Azçona, *Atlas de lineas ultimas, ecc.* « Inst. Geol, y min. de Espana », VIII, 1941.

gono alla ganga rocciosa Ba , Be , Cr , V; alla cassiterite Mn , Ni , Sb , W , La; all'anglesite Ag; alla scorodite Cu , In; alla calcite Sr. Comune a molti dei minerali Al; dubbia l'attribuzione di Bi , Ti , Zr e Zn.

Interessante sopratutto la presenza dell'In, contrassegnato da righe a forte intensità. Questo elemento, assai raro, è stato trovato principalmente nelle blende e nelle volframiti, talvolta in minerali di stagno e di ferro. Esso è stato da me individuato anche nella cassiterite di Monte Valerio, ma con righe estremamente deboli; resta inoltre il dubbio che tale piccola quantità possa trovarsi nei minerali di ferro, che costituiscono una forte percentuale del materiale stannifero di Campiglia. Infatti, come già notarono Stella [13] e Lotti [14], la cassiterite è intimamente frammista a minerali di ferro. Un campione particolarmente ricco di SnO_2, esaminato al microscopio a luce riflessa, ha mostrato che la massa cassiteritica è contornata dall'ematite e ingloba a sua volta cristalli di pirite. Qua e là si aprono anche vacui riempiti da ocre ferruginose. Resta perciò impossibile isolare porzioni pure di cassiterite.

Biologia. (Chimica vegetale) — *Alterazioni istochimiche della «Trametes cinnabarina» sul legno e calcolo del peso delle ife nei materiali patologici* [*]. Nota di A. Ceruti, presentata [**] dal Corrisp. C. Cappelletti.

L'azione degli organismi disintegratori del legno è già stata studiata in numerose pubblicazioni [1] i cui risultati sono stati ottenuti con metodi diversi di sperimentazione, i quali si possono riunire in tre gruppi:

I) ricerche su l'azione degli organismi in vitro su i componenti del legno separati chimicamente;

II) ricerche in vitro su legno in toto;

III) ricerche in natura.

Le ricerche del gruppo III sono sicuramente le meno numerose e queste alla loro volta si possono raggruppare in due categorie:

I) ricerche a carattere morfologico e fisiologico [2];

II) ricerche isto-chimiche.

(13) A. Stella, *Al minerale ferrostannifero di Campiglia Marittima e il suo possibile arricchimento.* « Rass. min. met. e chim. », XXXVII, Torino, 1912.

(14) B. Lotti, op. cit.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico di Torino.

(**) Nella seduta del 13 marzo 1948.

(1) G. Stapp e H. Bortels, *Mikrobiologische Untersuchungen über die Zersetzung von Waldstreu.* « Zentr. f. Backt. », vol. 90, p. 28 (1934) con ampia bibliografia.

(2) R. Cormio, *Contributo di osservazioni sul «Ganoderma applanatum (P.) Pat.» e sulla sua azione sul tronco di abete rosso.* Milano, 1935; V. Rivera, *Sopra l'azione del «Fomes fulvus» sul mandorlo.* « Le Staz. sper. agr. it. », vol. LIV, p. 114 (1921).

I lavori di quest'ultimo gruppo riguardano l'azione dei microrganismi o dei funghi superiori. Quelli che prendono in considerazione i microrganismi sono di gran lunga più numerosi degli altri.

Il Lutz (3) aveva trovato che il *Coriolus versicolor*, lo *Stereum hirsutum*, il *Corticium quercinum* inoculati in legni diversi distruggono più rapidamente la lignina della cellulosa. Kenneth H. Garren (4) trova invece che il *Polyporus abietinus* intacca maggiormente la cellulosa e Waksmann e Cordon (5) trovano che la lignina rallenta la digestione della cellulosa. Falck e Haag (6) dimostrano che nel marciume rosso cagionato dal *Polyporus annosus* si ha una maggiore distruzione della lignina in confronto alla cellulosa, mentre nel marciume causato dal *Merulius* viene distrutta quasi completamente la cellulosa e la lignina rimane quasi invariata. I pentosani sono distrutti da tutti e due i funghi. La cellulosa diminuisce nel primo caso dal 56 % al 48 %, nel secondo dal 44 % al 7,8 %; la lignina nel primo caso dal 23,5 % si riduce al 15,1 % ed aumenta dal 24,6 % al 56,6 % nel secondo. Anche un'agaricacea l'*Armillaria mellea*, distrugge la cellulosa, dando un marciume bianco come dimostrano i lavori di W. G. Campbell (7). Secondo Bavendamm (8) i due tipi di marciumi, bianco e colorato, dimostrano una diversa azione chimica del fungo; infatti quello bianco è in relazione con la distruzione della cellulosa, quello colorato con la distruzione della lignina. L'alone bruno è dovuto alla laccasi prodotta dal fungo, la quale catalizza l'ossidazione dei gruppi fenolici della lignina, che si mettono in libertà durante la sua disintegrazione.

Io ebbi l'occasione di poter esaminare del legno gravemente colpito dalla *Trametes cinnabarina* (Jacq.) Fr. Il materiale fu raccolto dal dott. F. Sappa e dal sig. Fontana P. in una foresta della valle del Pesio (Vallone valanga dei Frati). Finora non sono stati pubblicati dati su le alterazioni isto-chimiche causate da questo imenomicete sul legno.

Io ho studiato alcuni rami di *Fagus silvatica* del diametro di circa cm. 1,50 completamente invasi dal fungo.

Esternamente essi si presentano quasi normali, ma dimostrano una notevole perdita di consistenza cedendo alla pressione del dito. Lo strato sugheroso, uniforme e senza screpolature, si lascia scollare con tutta facilità

(3) L. LUTZ, *Sur les ferments hydrolysants sécrétes par les champignons Hyménomycètes*. « Bull. Soc. Chim. Biol. », vol. 13, p. 436 (1931).

(4) H. KENNETH, *Studies on Pol. abietinus*. « Phytop. », vol. 28, p. 875, 1938.

(5) S. A. WAKSMANN e T. C. CORDON, *A method for studing decomposition of isolated lignin, and the influence of lignin on cellulose decomposition*. « Soil Sciences », vol. 45, p. 199 (1938).

(6) R. FALCK e W. HAAG, *Der lignin-und cellulose-Abbau des Holzes, zwei verschiedenes Zersetungsprozesse durch holzbewohnende Fadenpilze*. « Ber. deut. chem. Ges. », vol. 60, p. 225 (1927).

(7) A. CAMPBELL, *Zone lines in plant tissues*. « Ann. appl. Biol. », vol. 20, p. 123 (1933); W. G. CAMPBELL, *The chemistry of the white rots of wood*. « Bioch. Journ. », vol. 26, p. 1829 (1932).

(8) W. BAVENDAMM, *Neue Untersuchungen über die Lebensbedingungen holzzerstörender Pilze. Ein Beitrag zur Immunitätsfrage*. « Ber. deut. bot. Ges. », vol. XLV, p. 347 (1927).

dagli altri strati corticali; però esso non è invaso dalle ife miceliari del fungo. Sulla sezione di taglio il legno si presenta biancastro, alquanto poroso, si sbricciola facilmente anche alla semplice azione dell'unghia, è invaso da un abbondante micelio rosso cinnabarino. Qua e là sorgono i corpi fruttiferi, alcuni dei quali sono resupinati. E precisamente la parte periferica del legno e tutto il libro sono molli friabili in direzione longitudinale ed anche trasversale (quelle parti più gravemente colpite), floccosi, lassi, dissociabili in frammenti per lo più allungati, cotonosi, pochissimo elastici. La parte centrale del legno è meglio conservata ed ancora in parte dura e rigida e non dissociabile. In alcuni tratti però anch'essa presenta le medesime alterazioni della parte periferica.

Al microscopio il legno presenta un gran numero di vasi e di fibre legnose sfibrillati, alcuni in parte granulosi, cioè ridotti a grani tenuti fra loro da legami alquanto lassi; essi dànno molto evidentemente le reazioni e le colorazioni della lignina. La birifrangenza in ogni direzione è del tutto scomparsa in alcuni elementi, in quasi tutti è fortemente diminuita (gli esami sono stati condotti comparativamente a tessuti sani). Gli elementi del libro sono i più alterati e quasi del tutto scomparsi.

Il peso specifico apparente del materiale patologico è notevolmente diminuito. Infatti cc. 3,16 pesano 1 grammo (tutte le misure sono fatte al peso secco), mentre nei rami normali dello stesso diametro cc. 1,4 pesano 1 grammo. Quindi il peso specifico apparente dei rametti attaccati dalla *Trametes cinnabarina* è di 0,31, mentre quello dei rami sani è di 0,73. Per la determinazione del peso specifico apparente si è usato il metodo internazionale. Quindi il peso specifico apparente dei rami sani è di 2,25 X maggiore di quello del legno attaccato dalla *Trametes*.

Le gravi alterazioni macroscopiche e microscopiche, in parte certo postmortali, sono cagionate unicamente dalla *Trametes* o tutt'al più in minima parte dall'inquinamento da parte di germi, poichè l'inquinamento è reso praticamente impossibile per la presenza delle ife della *Trametes*, come del resto gli esami microscopici e le colture mi hanno dimostrato.

Tali visibili alterazioni dovevano sicuramente essere sostenute da gravi alterazioni chimiche. Allo scopo sono state studiate le tre fondamentali sostanze che costituiscono il legno: la cellulosa, la lignina, le emicellulose. Si sono ottenuti i seguenti risultati (tutti i pesi sono riferiti allo stato secco):

I) 1 cc. di legno sano di ramo (1,5 cm. di diametro) di *Fagus silvatica* contiene mg. 123 di lignina (dosata con il metodo scandinavo), mg. 131 con il mio metodo (9).

II) 1 cc. di legno attaccato da *Trametes* contiene mg. 114 di lignina (dosata con il metodo scandinavo), mg. 119 con il mio metodo.

III) KOH 5 % porta in soluzione in 48 ore alla temperatura di 15° per ogni cc. di legno sano mg. 247.

(9) A. Ceruti, *Ricerche chimico-istologiche su la lignificazione della membrana.* «N.G.B.», vol. LI, p. 45 (1944); Ceruti, *Su la costituzione fisico-chimica della membrana.* «N.G.B.», vol. LIII, p. 396, (1946).

IV) KOH 5 % porta in soluzione in 48 ore alla temperatura di 15° per ogni cc. di legno invaso dalla *Trametes* mg. 101.

V) Dalla soluzione in KOH 5 % di legno sano sono precipitabili con alcool e per acidificazione per ogni cc. di legno mg. 143.

VI) Dalla soluzione in KOH di legno colpito dalla *Trametes* sono precipitabili con alcool e per acidificazione per ogni cc. di legno ammalato mg. 72,7.

VII) 1 cc. di legno sano contiene di cellulosa mg. 414.

VIII) 1 cc. di legno invaso da *Trametes* contiene di cellulosa mg. 97.

Particolarmente difficile è stato il calcolo di quest'ultimo dato; poichè mentre la presenza delle ife miceliali del fungo poco o nulla fanno variare i dati relativi alla lignina ed alle emicellulose, perchè esse praticamente non contengono sostanze che abbiano ad influenzarli; così non è per la cellulosa. Tutti gli autori però a mia conoscenza non tengono conto nei loro risultati della quantità di ife miceliari che si trovano dentro ai pezzi patologici, il che viene a spostare alcuni dati poichè sovente la quantità delle ife miceliari è alquanto abbondante. Per risolvere questo problema in un primo tempo si è determinato quanto di un grammo di carpoforo di *Trametes cinnabarina* venga sciolto dalla potassa al 5 % e si è trovato che tale dato è di mgr. 252. Quindi si è calcolata la quantità di ife che si trovano in un cc. di legno invaso dalla *Trametes*, che sarà secondo la seguente formula che proponiamo per simili calcoli:

$$x = a - p\frac{1000}{m}$$

dove a indica la quantità di materiale non precipitabile in alcool che si scioglie in KOH al 5 % di 1 cc. di legno invaso dalla *Trametes*, e p è la quantità di sali e di proteine del legno invaso dalla *Trametes* non appartenenti alle ife miceliari. Il calcolo esatto di p è pressochè impossibile, ma essendo di valore molto piccolo, considerandolo circa il 5 % del totale del materiale solubile, viene a variare di molto poco gli altri dati quantitativi $a - p$ nel nostro caso è uguale a 26. m è la quantità in mg. di sostanza che si scioglie in KOH al 5 % di 1 gr. di fungo (carpoforo).

Questo calcolo è possibile solo quando si ammetta chè la costituzione chimica dell'ifa del carpoforo è simile a quella miceliare; il che se non è rigorosamente esatto, praticamente si può considerare vero.

La quantità di cellulosa contenuta in un cc. di legno invaso dalla *Trametes cinnabarina* è uguale a

$$\frac{1000-360-230-103}{3,16} = 97.$$

Dove 360 è la quantità di lignina, 230 delle emicellulose, 103 delle ife miceliari di cc. 3,16 di legno invaso dalla *Trametes*.

Dai dati sopra riportati risulta che la *Trametes cinnabarina* non ha nessuna azione sopra la lignina, la quale rimane del tutto inattaccabile da parte

di questo fungo; la piccola perdita che risulta dai dati citati è dovuta alla leggera coartazione che subisce il legno attaccato dalla *Trametes* e quindi è solo una perdita apparente, in ogni modo essa sarebbe appena di 9 mg. per ogni cc. di materiale. Le emicellulose vengono consumate dal fungo circa nella proporzione del 50 %. Ma la più attaccata è la cellulosa, la quale viene digerita per circa il 77 %. Questi sono i valori di digestione medi di tutta la porzione esaminata chimicamente, ma è certo che alcuni territori sono più profondamente altri meno attaccati dalle ife miceliari, e ciò è dimostrato dall'esame microscopico. Le parti meno attaccate dimostrano una sfibrillatura in senso longitudinale, mentre le parti più attaccate sono granulose e dimostrano una minima resistenza anche in senso trasversale, il che dimostra accanto alla diminuzione e scomparsa della birifrangenza, che dapprima viene consumata la cellulosa interfibrillare e poi quella intermicellare per cui i cristalliti, che ancora rimangono, in parte si disorientano, ed infine non si ha più una sommazione positiva dei singoli valori di birifrangenza di ciascun cristallito tale da dare un valore di birifrangenza ancora esaminabile al microscopio. La forte diminuzione di elasticità del materiale attaccato è dovuta alla diminuzione della lunghezza delle fibrille e forse anche delle molecole filiformi della cellulosa che non è stata digerita. Le membrane suberificate non vengono per nulla attaccate dal fungo.

Quindi possiamo concludere che la *Trametes cinnabarina* è un fungo cellulolitico cagionando un marciume bianco. Prima vengono digerite le porzioni delle molecole cellulosiche intermicellari interfibrillari e solo in seguito quelle intermicellari intrafibrillari, con la quale distruzione si accompagna una diminuzione della resistenza del vaso e della fibra in senso trasversale. La più resistente è la cellulosa micellare, la quale viene intaccata solo in tempi successivi il che è dimostrato dai caratteri delle parti più profondamente disintegrate. Anche nel caso della *Trametes cinnabarina* vale la regola del Bavendamm ed infatti con la distruzione della cellulosa abbiamo un marciume bianco. Il grado di distruzione della cellulosa nel nostro caso non raggiunge i valori di Falck e Haag per i quali il *Merulius* distrugge 82 % della cellulosa, invece secondo i nostri dati la *Trametes cinnabarina* in natura distrugge la cellulosa solo nella proporzione del 77 % (valore medio). Questa differenza in realtà è ancora di più accentuata, perchè Falck e Haag non tengono conto del peso delle ife del fungo che si trovano nel materiale esaminato. Si può ancora concludere che la lignina non riveste completamente la cellulosa negli elementi del legno, perchè se così fosse non sarebbe stata possibile la distruzione di questa poichè la *Trametes cinnabarina* non possiede enzimi capaci di attaccare la lignina in natura. Quindi è evidente che esistono dei territori in cui la cellulosa è nuda; e attraverso questi territori, che devono essere di dimensioni superiori a quelle degli enzimi, questi passano e digeriscono la cellulosa.

Zoologia. — *Ricerche morfomeccaniche sul femore di «Strepsiceros strepsiceros»* [*]. Nota di S. Beer e A. Sacchetti, presentata [**] dal Corrisp. S. Sergi.

In connessione con recenti ricerche antropologiche [1], abbiamo ritenuto opportuno di estenderne la metodologia allo studio comparativo del femore di altri mammiferi, onde verificare la portata delle precedenti conclusioni e rilevarne le diversità conseguenti alle singole caratteristiche strutturali e funzionali.

In verità le indagini sulla morfologia ed anche sull'architettura interna del femore di vari mammiferi non mancano (Bogdoschew, Bordeleben, Duerst, Maiocco, Matyas, Murray, Rudolf, ecc.), ma, nonostante l'interesse delle osservazioni, esse per lo più non rispondono al piano concettuale e metodologico da noi perseguito.

Per avere un primo orientamento si è ritenuto opportuno intraprendere lo studio con un mammifero che presentasse notevoli differenze morfo-fisiologiche rispetto all'uomo. Il kudù maggiore (*Strepsiceros strepsiceros* Pallas), appartenente al gruppo delle antilopi, è parso rispondente a tali scopi [2]. Esso infatti ha stazione orizzontale e non ha possibilità di assumere, normalmente, stazione eretta, è adatto alla corsa veloce, usa coricarsi di fianco e presenta altre peculiarità che lo differenziano nettamente dall'uomo dal punto di vista che ci interessava.

Nonostante tali differenze fondamentali, per il femore di questo animale è stato adottato lo stesso orientamento usato per il femore umano [3]; e ciò non già per consentire dei confronti aprioristici, ma perchè tale orientamento risponde a un piano strutturale generale comune a tutti i femori, in quanto tutti constano di una testa, di una diafisi e di due condili, e testa e condili sono gli elementi fondamentali di articolazione prossimale e distale, similmente alle cerniere di uno sportello.

Per rispettare tale orientamento, si è dedotto, come nel femore umano, un *piano frontale generale*, passante per il centro della testa e parallelo al *piano d'appoggio frontale* tangente posteriormente alla testa e ai condili. Perpendicolarmente al piano frontale è stato definito il *piano di appoggio condiloideo*, distalmente tangente alle due estremità dei condili (fig. 1).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Antropologia dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) A. Sacchetti, *Ricerche sulle condizioni architetturali e morfomeccaniche del femore umano*. «Mem. Acc. Lincei», ser. VIII, vol. I, fasc. 4 (1947).

(2) Il materiale ci è stato gentilmente fornito dal dott. G. Mangili.

(3) A. Sacchetti, *L'orientamento fisiologico del femore umano nelle sue normali condizioni morfomeccaniche*. «Rendic. Acc. Lincei», ser. VIII, vol. I, fasc. 6 (1946).

Per quanto concerne le relazioni fra la testa e i condili, da esami comparativi estesi ai femori di varie specie di mammiferi (leone, tigre, pecora, cane, ippopotamo, capra, canguro, ecc.) è stata constatata una stretta correlazione fra le dimensioni di quella e di questi, indipendentemente dallo sviluppo delle altre strutture, quali il grande trocantere e la troclea. Questi ultimi infatti, già per la loro morfologia esterna e le loro dimensioni, attestano un proprio comportamento che nella statica generale dell'arto è bensì complementare con quello della testa e, rispettivamente, dei condili, ma non è ad esso unificato. Così nell'uomo la testa e i condili sono assai sviluppati rispetto al volume dell'osso, mentre nel kudù sono assai piccoli: ciò è in evidente rapporto con la diversa direzione delle forze di trazione e di pressione ai quali sono soggetti i rispettivi femori. Dai suddetti esami comparativi è risultata pertanto una *costanza interspecifica* di proporzionalità diretta fra le dimensioni volumetriche della testa e quelle dei condili. Tale costanza ha quindi anche un significato sistematico e si spiega in quanto essa è in relazione con l'intima funzione statica dell'osso e con la generale uniformità della sua morfologia di base, così come notevole costanza debbono presentare le intime architetture di un ponte connesse con la sua funzione di sostegno e con l'invariabilità della sua fondamentale sagoma. Per contro maggiore variabilità, anche sistematica, possono presentare quelle strutture, come la troclea e il trocantere, che più strettamente dipendono dalle modalità inerenti alle caratteristiche della specie, quali il sesso, l'età, le abitudini, il comportamento, ecc.

Va pure rilevato che nel femore del kudù l'asse fisiologico, costituito dall'intersezione del piano frontale col *piano sagittale* ad esso perpendicolare, cade sul condilo mediale, anzichè lateralmente come avviene nel femore umano (fig. 2). Ciò è probabilmente in relazione con la diversità degli atteggiamenti dell'uomo e del kudù; merita fra l'altro di esser presa in considerazione la posizione seduta quale è nell'uomo e che il kudù non può assumere.

I caratteri morfologici più salienti dell'estremità prossimale [4] del femore del kudù rispetto ai corrispondenti del femore umano sono i seguenti:

1° *elevazione del complesso macrotrocanterico*, che supera alquanto la testa (fig. 3). Per contro si nota un accentuato raccorciamento del collo, che porta la testa lateralmente. Tuttavia, come è già stato rilevato, la proiezione ortogonale della testa sul piano d'appoggio condiloideo colpisce il condilo mediale (fig. 2), ciò che determina una molto minore inclinazione di lateralità nella posizione della diafisi. Va notato infine un appiattimento della superficie superiore della testa, in contrasto con la sua sfericità nell'uomo. Appunto ad esso va attribuita l'impossibilità di un'ampia abduzione della coscia;

2° *posizione della fossa trocanterica interamente al disopra del collo e suo enorme approfondimento* con conseguente assottigliamento della parete di fondo che, subito al di sopra del collo, appare semitrasparente alla luce

(4) Della diafisi e dell'estremità distale si parlerà in una prossima Nota.

(fig. 6 B). Ciò dimostra che detta parete di fondo non ha, come nel femore umano, la funzione statica di connettere gli sforzi elastici sopportati dalla testa con quelli sopportati dal macrotrocantere. Da questo e da quanto detto al punto precedente risulta già all'aspetto morfologico esterno che, contrariamente a quanto avviene nel femore umano, *il grande trocantere e la testa non costituiscono un sistema meccanico combinato, ma sono tra loro funzionalmente separati*. L'unificazione è infatti possibile laddove, come nel femore umano, il macrotrocantere sia situato al di sotto della testa sicchè i due sistemi possano congiungersi lungo l'asse del collo: si spiega allora anche il notevole spessore della parete di fondo della fossa e la sua prosecuzione interna con lo sperone al di sotto della linea intertrocanterica. La separazione, nel kudù, dei due sistemi in parola in confronto alla loro congiunzione nell'uomo è in rapporto con la diversità degli sforzi ai quali sono sottoposti i femori delle due specie. Nell'uomo infatti le forze agenti sulla testa e sul macrotrocantere concorrono assieme a fissare il corpo nella stazione eretta; nel kudù invece, data la stazione orizzontale e la posizione inclinata del femore, la testa è bensì sottoposta a forze di pressione, ma queste sono in costante opposizione alle forze di trazione che agiscono, con un certo angolo, sul grande trocantere. Da tale costanza di antitesi funzionale dipendono le caratteristiche soprarilevate e inoltre il notevole ingrossamento del macrotrocantere rispetto alla testa e la posizione elevata degli attacchi muscolari macrotrocanterici;

3° *opistomeria macrotrocanterica*. Nel femore umano una sezione frontale della testa, tracciata secondo il piano frontale meccanico d'orientamento, taglia anche il grande trocantere; nel kudù invece lo esclude del tutto, il macrotrocantere rimanendo interamente dietro al piano di detta sezione (fig. 1, linea tratteggiata sulla testa in continuazione del margine del grande trocantere).

La separazione fra i complessi morfomeccanici del grande trocantere e della testa nel femore del kudù in contrapposto alla loro unione nel femore umano, è confermata dalla struttura interna. Questa difatti nell'uomo costituisce un complesso unitario di sistemi trabecolari, mentre nel kudù è nettamente separata in due sistemi morfologicamente indipendenti, l'uno cefalico, l'altro macrotrocanterico. Ciò si può rilevare dall'esame di sezioni opportunamente condotte, mentre sarebbe meno evidente per via radiografica, data la sovrapposizione dei piani nelle radiografie. Come è infatti risultato da un'accurata disamina del materiale studiato (v. esempi a figg. 5, 6) le trabecole della testa hanno un andamento dall'alto in basso, solo un poco deviato obliquamente per il necessario collegamento con le lamine diafisarie (fig. 5). Tali trabecole sono nettamente separate da quelle del macrotrocantere, e queste ultime sono coperte da una lamina trasversale di fondo (fig. 6 C); topograficamente questa lamina occupa la posizione del sistema trabecolare arciforme umano. Manca lo *sperone*, che nel femore umano è connesso con la parete posteriore del collo. Inoltre, data la sopraelevazione del macrotrocantere, una sezione trasversa di tutta l'estremità prossimale

condotta lungo l'asse del collo taglia la trabecolatura cefalica, ma non quella macrotrocanterica, come nell'uomo. Perciò la sezione in parola (figg. 6 A, B) mette in diretta evidenza, lateralmente, la cavità diafisaria in un piano che però topograficamente corrisponde, nell'uomo, alla « cupula di rarefazione trabecolare » (Sacchetti).

Tale struttura è in relazione con le condizioni morfomeccaniche dell'arto. Difatti nel kudù il peso del corpo si scarica in basso verso la parte anteriore della superficie articolare della testa lungo le lamine diafisarie anteriore, mediale e, un po' meno, posteriore, ma, prossimalmente, non lungo la lamina laterale. Per contro il grande trocantere, per sopportare le forze di trazione verso l'alto opposte a quelle di pressione agenti sulla testa, fa interamente presa sulle lamine diafisarie laterale e posteriore.

Le principali conclusioni che si possono trarre dalle osservazioni surriferite sono le seguenti:

1° Esiste un rapporto armonico costante fra le due estremità articolari del femore, in contrapposto al diverso comportamento delle altre strutture. Tale costanza è in relazione col significato meccanico di detta estremità e con l'uniformità del piano architetturale generale dell'arto, collegato col suo ufficio. Essa, per la sua interspecificità, ha altresì un valore di costante sistematica;

2° La morfologia dell'estremo prossimale del femore del kudù differisce da quella corrispondente del femore umano in relazione con la diversità delle esigenze meccaniche proprie alle due specie. In particolare la costanza di opposizione fra le forze di trazione sul macrotrocantere e di pressione sulla testa si riflette, nel kudù, con una separazione morfologica fra i due complessi suddetti, esternamente rilevabile per numerose peculiarità;

3° Alle caratteristiche morfologiche suddette corrispondono le caratteristiche della trabecolatura. Queste nell'estremo prossimale del femore umano conducono a un collegamento intimo del complesso strutturale composto dai due sistemi arciforme e macrotrocanterico. Nel kudù invece si hanno sistemi morfologicamente indipendenti, l'uno cefalico, l'altro macrotrocanterico; manca il sistema arciforme;

4° Tanto la morfologia esterna quanto la corrispondente struttura trabecolare sono in armonia con il comportamento statico e dinamico da un lato dell'uomo, dall'altro del kudù in relazione con le caratteristiche della stazione eretta in quello, orizzontale in questo;

5° L'indirizzo morfomeccanico di queste ricerche, che prosegue quello già adottato per il femore umano, permette di rilevare la sua utilità metodologica e l'interesse di una sua estensione anche ad altri animali.

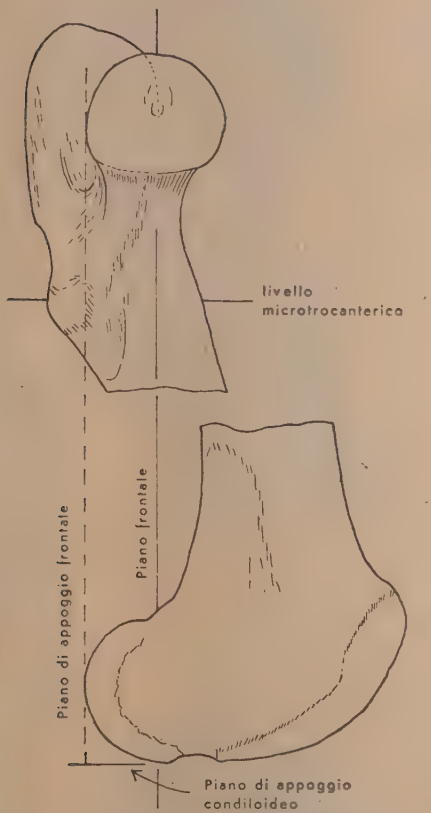


Fig. 1. Proiezione mediale delle estremità femorali di *Strepsiceros strepsiceros*.

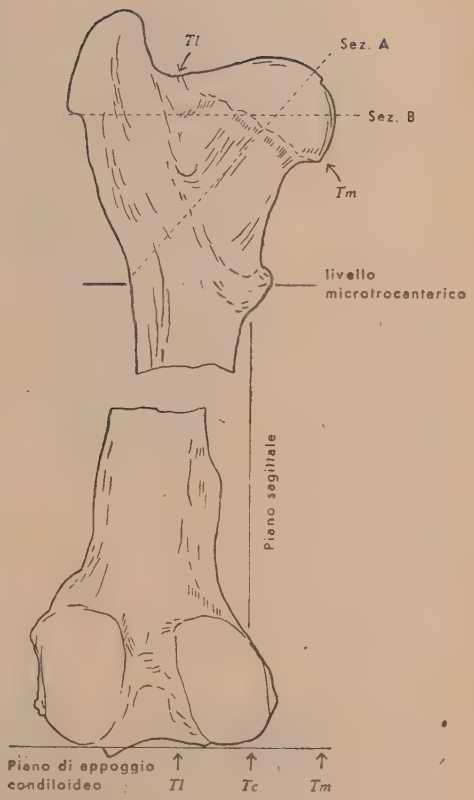


Fig. 2. – Proiezione posteriore delle estremità femorali di *Strepsiceros strepsiceros*.

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

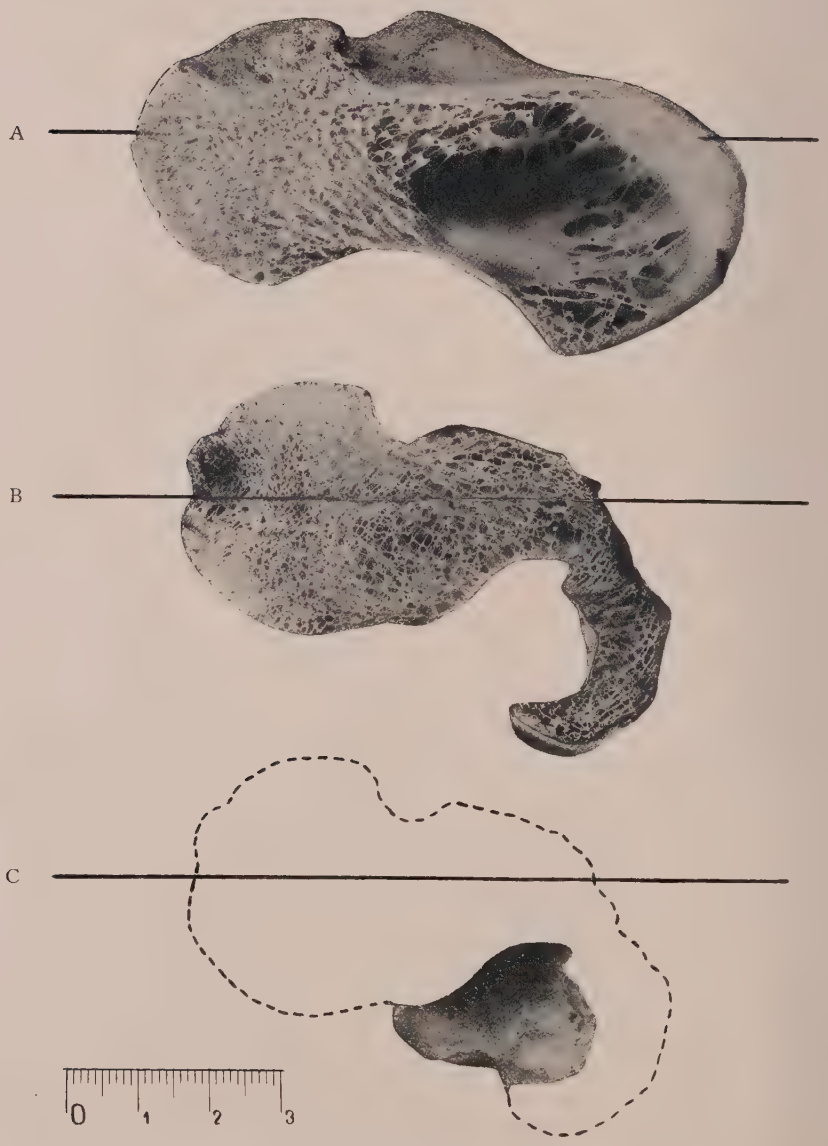


Fig. 6

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. – Proiezione mediale del profilo delle estremità femorali di *Strepsiceros strepsiceros*. L'orientamento è definito dai piani *frontale, di appoggio frontale* e *di appoggio condiloideo*. Sulla testa è tratteggiato il margine anteriore del grande trocantere.

Fig. 2. – Proiezione posteriore del profilo delle estremità femorali di *Strepsiceros strepsiceros*. *Tl* rappresenta, nel piano frontale, il punto di massima estensione laterale della superficie di articolazione cefalica. *Tm* rappresenta il corrispondente punto mediale, nel piano frontale, sulla linea diafiso–epifisaria. *Tc* è la proiezione intermedia fra *Tl* e *Tm*. Sez. A e Sez. B sono quelle riprodotte nella fig. 6.

Fig. 3. – Estremità prossimale di un femore di *Strepsiceros strepsiceros* visto medialmente e orientato sulla traccia del piano frontale come in fig. 1.

Fig. 4. – Estremità prossimale di un femore di *Strepsiceros strepsiceros* visto posteriormente e orientato come in fig. 2.

Fig. 5. – Porzioni residuate da una sezione prossimale di femore destro di *Strepsiceros strepsiceros* secondo il *piano frontale*. A sinistra è riprodotta la porzione anteriore, a destra quella posteriore: in quest'ultima è visibile interamente il grande trocantere che non è tagliato dal piano di sezione.

Fig. 6. – Sezioni trasverse di un femore di *Strepsiceros strepsiceros*. *A*, porzione residuata prossimalmente da un taglio condotto secondo l'asse del collo femorale (femore sinistro); *B*, porzione residuata distalmente da un taglio orizzontale passante per il centro interno della testa: tale sezione perciò attraversa il grande trocantere ed è più prossimale di quella in *A* (femore destro); *C*, profilo della sezione *B* in cui è visibile distalmente la parete del collo, che non è interessata dal taglio.

Zoologia. — *Ulteriori osservazioni sulle uova e le larve di «Engraulis Russoi»* (*). Nota di F. Dulzetto, presentata (**) dal Socio A. Russo.

Per una migliore conoscenza dei caratteri delle uova e delle larve di *Engraulis Russoi* nei mesi di maggio, giugno, luglio ed agosto 1947 ho eseguito nei laghi di Ganzirri e Faro una serie di raccolte di placton; complessivamente 12, e precisamente il 31 maggio 1947; 16 giugno; 21 giugno; 27 giugno; 30 giugno; 3 luglio; 9 luglio; 15 luglio; 18 luglio; 23 luglio; 1 agosto; 9 agosto. Le difficoltà di comunicazioni tra Messina e i due laghi, nonchè la mancanza di adeguati mezzi non mi hanno consentito di effettuare un maggior numero di prelevamenti. Gia alla fine di maggio le uova si presentavano in discreto numero in entrambi i laghi; esse erano più numerose nel placton proveniente da Ganzirri. La quantità di quelle che venivano pescate, adoperando sempre lo stesso retino ed eseguendo la raccolta sempre con le stesse modalità, è andata aumentando sino alla fine della prima metà di giugno. Da questo momento sino alla prima decade di luglio si è mantenuta presso a poco costante, quindi è andata gradatamente decrescendo. Il 1° agosto mentre nel placton di Ganzirri non si riscontravano più uova, in quello di Faro .né era presente ancora qualcuno. Nell'ultimo prelevamento, fatto il 9 agosto, non si riscontrarono più uova in entrambi i laghi. Il periodo della deposizione va così da maggio a tutto luglio; ma esso può arrivare sino alla seconda metà di agosto (21 agosto), come ho potuto constatare nelle osservazioni fatte durante il 1945.

Anche Russo (1), durante le sue ricerche dirette a stabilire la durata del periodo di deposizione dell'*E. encrasicholus* nel golfo di Catania notò, nelle diverse annate, degli spostamenti, che mise in rapporto con le variazioni delle condizioni del mare.

Le poche notizie che si hanno sulla presenza nelle acque dello stretto di Messina di uova di *E. encrasicholus* si devono a Lo Giudice (2), il quale dice che esse vengono pescate al largo sino alla fine di maggio, solo qualche anno eccezionalmente in giugno, e ciò specialmente quando l'inverno è stato piuttosto rigido per il frequente spirare di venti del Nord. Sarebbe stato interessante, ai fini delle presenti ricerche, conoscere in quale tratto dello stretto egli ha rinvenuto le uova. Aggiunge che gli individui della lunghezza di 10–16 cm., che vengono pescati nello Stretto (neanche in questo caso pre-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Messina.

(**) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) A. Russo, *Notizie sulla vita sessuale e la pesca dei Clupeidi nel Golfo di Catania*. Società Ital. Progresso Scienze, XXIV Riunione. Palermo (1935).

(2) P. Lo Giudice, *Le Acciughe dei mari Italiani*. « Boll. Soc. Naturalisti Napoli », vol. XXIV (1921–22).

cisa la località) nei mesi di maggio ed aprile si presentano con gli organi genitali turgidi e voluminosi, segno questo egli dice, della loro piena maturità in atto. Mentre gli individui della stessa lunghezza, che accidentalmente vengono pescati nei mesi estivi, mostrano le ghiandole sessuali alquanto ridotte, il che significa che essi hanno già espulso i loro prodotti. Viene così alla conclusione che le Acciughe dello Stretto di Messina presentano un periodo riproduttivo assai ristretto e limitato ai soli mesi primaverili.

La deposizione dell'*E. Russoi* nelle acque dei laghi di Ganzirri e di Faro ha così inizio quando nelle acque dello Stretto cessa quella dell'*E. encrasicholus*. Durante il 1947 nessun uovo di questa ultima specie è stato trovato nelle raccolte di placton, che sistematicamente vengono eseguite nello Stretto al largo di Ganzirri, dall'Istituto Talassografico, come da informazioni gentilmente fornitemi dal Direttore prof. Spartà.

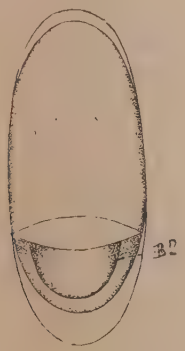


Fig. 1. – Uovo di *E. encrasicholus*. Raffaele 1888. Tav. I, fig. 15.

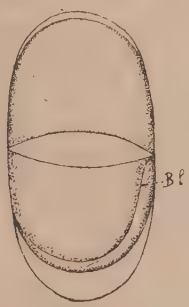


Fig. 2. – Uovo di *E. Russoi* del lago Faro.

Lo Giudice, nel citato lavoro, dice in nota che circa le uova di Acciuga, che si rinvengono talora nel placton a Ganzirri e Faro nel settembre (l'A. si riferisce alle acque del mare) ogni volta che vengono catturati gli adulti con l'ausilio di fonti luminose, si riserva di trattare in un prossimo lavoro che, a quanto mi risulta, non è più venuto fuori.

Durante le mie precedenti ricerche [3] avevo avuto solo uova embrionate di *E. Russoi*, in queste raccolte sono riuscito a trovarne qualcuno in uno stadio corrispondente a quello meno evoluto, in cui le uova di *E. encrasicholus* si trovano alla superficie del mare; stadio che è stato descritto e raffigurato da Raffaele [4]. Trattasi di uova fecondate in via di segmentazione (figg. 1 e 2), in cui il blastoderma si trova raccolto al polo inferiore.

(3) F. DULZETTO, « *L'Engraulis* » *dei laghi di Ganzirri e del Faro*. « Mem. Soc. Scienze dei XL », ser. III, vol. XXVI (1947).

4) F. RAFFAELE, *Le uova galleggianti e le larve dei Teleostei nel Golfo di Napoli*. « Mittheil. Zool. Station Neapel », vol. VIII (1888).

Come è stato osservato per le uova embrionate, e come risulta evidente dal confronto delle due figure, di cui la prima riproduce l'uovo di *E. encrasicholus* raffigurato da Raffaele, e la seconda un uovo di *E. Russoi* proveniente dal lago Faro, le uova di questa ultima specie hanno forma più tozza. Nuove misure, eseguite su uova provenienti dai due laghi, hanno confermato i risultati delle precedenti osservazioni, infatti la media del rapporto dei due diametri nelle uova di Ganzirri è stata ancora di 1,95, e quella delle uova di Faro di 2. In queste ultime si è riscontrato un lieve aumento, tuttavia essa è notevolmente inferiore alla media presentata dalle uova di *E. encrasicholus* del golfo di Napoli.

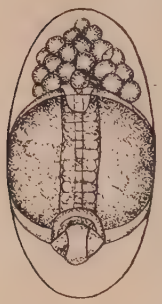


Fig. 3. – Uovo di *E. Russoi* del Lago Faro.

Lo spazio perivitellino che, come nelle uova di *E. encrasicholus*, è piccolo, limitato ai due poli e specialmente a quello inferiore, in queste è ancora meno sviluppato. Al polo inferiore esso è di circa un terzo più piccolo, e più piccolo è pure quello del polo superiore, che si presenta come una semplice fessura (figg. 1 e 2). Ed alle dimensioni di questo spazio Raffaele attribuisce notevole importanza in quanto sono abbastanza costanti nella medesima specie.

Nella raccolta eseguita nei due laghi nelle prime ore del mattino del 31 maggio, e nelle successive è stata costantemente riscontrata la presenza di un certo numero di uova embrionate, a spazio vitellino piuttosto ampio, con globuli di vitello ammucchiati al difuori dell'area embrionale, in corrispondenza della regione caudale dell'embrione (fig. 3). Come è noto, le uova pelagiche, siccome a misura che l'embrione si sviluppa diventano sempre più pesanti, vanno allontanandosi dalla superficie dell'acqua. Ora mentre le uova embrionate si mantengono abitualmente ad una certa distanza dal pelo dell'acqua, quelle con globuli di vitello al di fuori dell'area embrionale invece stanno in vicinanza od addirittura a contatto col fondo del recipiente;

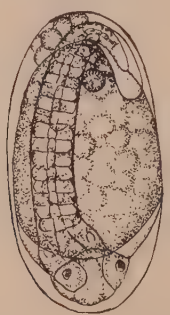


Fig. 4. – Uovo di *E. Russoi* del Lago Faro.

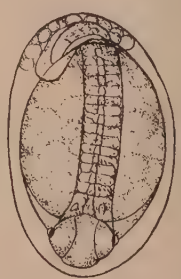


Fig. 5. – Uovo di *E. Russoi* del Lago Ganzirri.

ed è per ciò che probabilmente la loro presenza era sfuggita nelle precedenti ricerche.

Raffaele (5) ha visto che il vitello delle uova di *E. encrasicholus* è costituito da grosse gocciole stivate in tutta la massa, le quali assumono forma sferica appena libere, come è da presumersi che sia avvenuto in queste uova di *E. Russoi* (fig. 3), per cause che non sono riuscito ancora a stabilire. In tutte queste uova l'embrione appariva vitale, e da ognuno si è avuta una larva, che presentava gli stessi caratteri di quelle provenienti dalle altre uova. Dall'uovo della fig. 3, isolato il mattino del 18 luglio 1947, il giorno

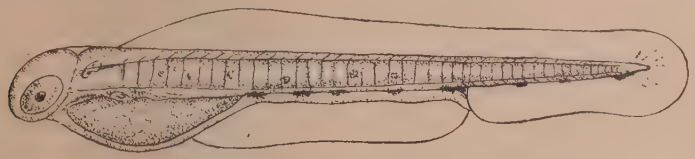


Fig. 6. – Larva di *E. Russoi* proveniente dall'uovo della fig. 4. Lughezza mm. 1,67 + 0,74 = mm. 2,41.

successivo è sgusciata una larva che misurava mm. 1,82 + 0,78; complessivamente mm. 2,60.

Le figg. 4 e 5 riproducono altre due uova con globuli di vitello situati al difuori dell'area embrionale in uno stadio di sviluppo più avanzato di quello della fig. 3; di esse il primo è stato pescato a Faro il 30 giugno 1947, ed il secondo a Ganzirri il 27 giugno 1947. Dall'uovo della fig. 4 il giorno successivo si è avuta la larva della fig. 6, la quale misurava mm. 1,67 + 0,74; complessivamente mm. 2,41. Tutte le larve provenienti da queste uova presentavano la stessa vitalità di quelle nate da uova col vitello in condizioni normali.

Biologia. — *Su alcuni casi di regolazione funzionale del vestibolo boccale in embrioni di «Rana esculenta» uniti in parabiosi* (*). Nota di L. URBANI-MISTRUZZI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Nel corso di esperienze di parabiosi fra embrioni di *Rana esculenta* ho ottenuto alcuni casi di regolazione funzionale del vestibolo boccale che mi sembrano meritevoli di descrizione tanto più che non mi risulta che altri abbia portato la sua attenzione su reperti simili.

Ho unito in parabiosi gli embrioni allo stadio di pieghe neurali appena saldate o di bottone codale asportando un piccolo lembo ecto mesodermico (fig. 1) nella zona del seno boccale e facendo combaciare le due superfici cruente. Le coppie in tal modo ottenute si sviluppano bene e non presentano

(5) Loc. cit.

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 aprile 1948.

differenze di accrescimento e di differenziamento rispetto ai controlli isolati durante il periodo embrionale. In seguito però, con l'inizio della vita larvale gli animali, per le condizioni particolari derivanti dal tipo di operazione, avendo apertura boccale in comune e orientamento dei corpi in senso inverso, non possono ingerire facilmente gli alimenti per cui crescono poco e l'intestino si presenta più o meno vuoto in misura eguale o disuguale nei due parabionti. Lo sviluppo somatico di questi, eccettuato un solo caso è eguale in tutte le coppie (figure 1 e 2).

Fig. 1. – Schema di operazione–embrione di *Rana esculenta* allo stadio di pieghe neurali appena saldate, visto dalla parte ventrale.

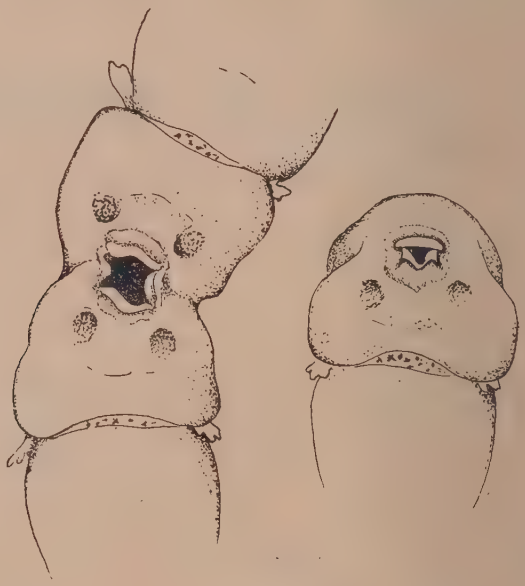


Fig. 2. – Parabiosi di *Rana esculenta* verso la fine della vita embrionale. Notare la bocca quadrangolare risultante dalla fusione dei due vestiboli boccali. A fianco un embrione di controllo allo stesso stadio.

Le coppie e i controlli isolati sono stati fissati in vari momenti dello sviluppo per seguire il differenziamento del vestibolo boccale nelle condizioni determinate dal tipo di operazione eseguito. Insieme alla fusione della bocca si hanno fusioni più o meno intime dei placodi e fossette olfattorie, di parti dell'encefalo, delle cartilagini del paleocranio cartilagineo, delle muccose boccali e naturalmente dell'epitelio di rivestimento.

Ricercando nella letteratura casi simili a quelli da me osservati ho trovato che Born [1] nel suo lavoro sulle parabiosi e innesti del 1897 ne ha descritti

(1) G. Born, *Ueber Verwachsungsversuche mit Amphibienlarven*, « Roux's Archiv », vol. 4, p. 349 (1897).

tre (pp. 536, 542, 543) che hanno vissuto per 11, 12, 14 giorni rispettivamente. Il Born si è occupato principalmente del comportamento anatomico dei vari sistemi e della fusione dei tessuti (nervoso, muscolare, epiteliale, cordale) nei vari organi secondo la propria affinità per cui conclude che tessuti eguali si uniscono mediante interposizione di tessuto specifico (dello stesso tipo) e tessuti differenti sono collegati mediante connettivo. Questa osservazione di Born, che si è dimostrata valida ogni qual volta vengono a contatto tessuti sia in animali della stessa specie come pure di speci, generi e perfino di ordini differenti (negli Anfibi), ha assunto valore di legge.

Dall'analisi del comportamento dei singoli sistemi e specialmente del cranio primordiale, Born conclude che al momento dell'operazione tutti i territori sono capaci di autodifferenziamento (p. 613) e « ein korrelativer Einfluss der Nachbarschaft, wie des Ganzen lässt sich nirgends erkennen– weder negativ noch positiv; die Entwicklung entspricht also von unseren Ausgangsstadium an durchaus der Mosaiktheorie Roux's; die organbildenden Keimbezirke sind ausgetheilt (His) ».

Considerando che Born ha eseguito le operazioni allo stadio di tre millimetri, questi risultati sono superati in quanto gli embrioni di *Rana esculenta* di tale misura si trovano già a bottone codale, nel quale stadio le varie zone organoformative sono già determinate da tempo come risulta da ricerche recenti. Emerson [2] (1945) ha espiantato vari territori di gastrule avanzate nello sviluppo di *Rana pipiens* e ritiene che il tetto dell'archenteron sia l'agente induttore non solo della piastra neurale e dei sacchi olfattori ma anche delle mascelle cornee. L'induzione di questi organi avviene in tempi differenti e da parti differenti di materiale cordo mesodermico ma al termine della gastrulazione ogni zona del vestibolo boccale può considerarsi determinata irrevocabilmente.

I risultati delle mie esperienze confermano le osservazioni del Born ma presentano alcune particolarità che non permettono di concludere per un mosaico così rigido come è stato formulato da detto Autore. Le parti vicine esercitano una certa influenza correlativa: non hanno nessuna influenza per quanto riguarda il differenziamento delle varie zone ma le nuove condizioni che si vengono a stabilire in seguito all'atto operatorio provocano un nuovo orientamento di esse, in alcuni casi, in modo da costituire una nuova formazione capace di attività funzionale.

I risultati si possono dividere in tre gruppi a seconda della forma del vestibolo boccale e che presentano vari gradi di regolazione morfologica e funzionale.

Dato che i becchi cornei sono caratteristici del vestibolo boccale e sempre facilmente reperibili anche nel genere di operazione eseguito, mi riferisco ad essi come punti di riferimento nella descrizione quando parlo di apertura boccale.

(2) H. S. EMERSON, *The development of late gastrula explant of «Rana pipiens» in salt solution.* « J. exp. Zool. », 100, p. 497 (1945).

Fig. 3. – Vestibolo boccale di una parabiosi di *Rana esculenta* durante la vita larvale; notare le formazioni laterali (spiegazione nel testo).

Fig. 4. – Vestibolo boccale di una parabiosi di *Rana esculenta* durante la vita larvale; notare le formazioni asimmetriche ai lati. Spiegazione nel testo.

Fig. 5. – Vestibolo boccale di una parabiosi di *Rana esculenta* durante la vita larvale formato esclusivamente dalle metà inferiori del vestibolo boccale delle singole larve. Spiegazione nel testo.

1° gruppo. – L'apertura boccale delle larve è quadrangolare (figg. 2, 3) delimitata superiormente e inferiormente (rispetto ad un elemento della coppia) dalla mandibola inferiore del becco corneo (seguo la nomenclatura di Héron-Royer e Ch. van Beneden) [3] e lateralmente da formazioni eguali fra loro che dalla forma del becco corneo e dalla disposizione dei dentelli cornei fanno dedurre la loro origine dalla parte dorsale del seno boccale che non è stata asportata con l'operazione. Le due mandibole inferiori dei becchi cornei possono accostarsi e allontanarsi reciprocamente e permettono una, seppure limitata, ingestione di cibo.

2° gruppo. – L'apertura boccale delle larve è più o meno irregolare, delimitata superiormente e inferiormente dalla mandibola inferiore del becco corneo e dai lati da formazioni differenti fra loro provenienti dalla fusione delle parti laterali del seno boccale non asportate con l'operazione in egual misura (fig. 4). A questo gruppo appartengono anche i casi nei quali l'apertura boccale è triangolare, due lati del triangolo essendo formati dalla mandibola inferiore del becco corneo e il terzo dalla fusione delle parti residue della parte dorsale o superiore del seno boccale.

3° gruppo. – L'apertura boccale è delimitata esclusivamente dalle mandibole inferiori del becco corneo le cui estremità laterali si sono saldate tra loro. In questi casi l'apertura boccale è sempre aperta, piccola e gli animali non possono assumere gli alimenti; il loro intestino infatti è vuoto. Nel taglio è stata asportata completamente la parte superiore del seno boccale e sono rimaste solamente le due parti inferiori di esso (fig. 5).

Per comprendere meglio la formazione dei vari tipi di vestiboli boccali descritti è bene precisare le condizioni che li determinano.

(3) Héron-Royer e Ch. Van Beneden, *Le vestibule de la bouche chez les têtards des batraciens anoures d'Europe; sa structure, ses caractères chez les diverses espèces*. « Arch. de Biol. », IX, p. 185 (1889).

Il seno boccale al tempo dall'operazione è presente in forma di una depressione leggera (pieghe neurali appena saldate) o profonda (bottone codale); questa depressione con il procedere dello sviluppo si approfonda ulteriormente e quando l'embrione nuota ha una forma ad imbuto con la base a forma di losanga verso l'esterno e l'apice verso l'interno della larva.

Nel taglio può venire asportata:

a) completamente la metà superiore della losanga e se il taglio è eguale nei due embrioni, facendo combaciare le due superfici cruente si avrà una apertura boccale unica senza parti laterali delimitata dalle mandibole inferiori del becco corneo delle due larve;

b) oppure solamente l'angolo superiore della losanga, che delimita il senso boccale verso l'esterno, (il taglio è eguale nei due embrioni), della fusione delle superfici cruente si avrà che i residui della parte dorsale del seno boccale di un animale si fonderanno con i corrispondenti dello stesso lato (rispetto alla coppia) dell'altro animale per cui si forma una bocca che ha quattro lati con formazioni speculari e simmetriche a due a due fra loro. La bocca viene delimitata superiormente e inferiormente (rispetto ad un elemento della coppia) dalla mandibola inferiore del becco corneo e lateralmente dai prodotti di fusione dei residui della parte dorsale del seno. In questi casi però con lo sviluppo si nota un interessante fenomeno. I residui della parte del seno boccale unendosi formano due angoli aperti verso l'esterno in senso opposto in modo da convergere verso il piano sagittale dell'apertura boccale stessa. In seguito si nota che le parti ruotano in direzione opposta in modo che la mandibola superiore del becco corneo invece di guardare verso l'apertura boccale è rivolta verso l'esterno (fig. 3). Il meccanismo col quale si effettua questo spostamento di parti è oggetto di ricerche in corso.

Questi casi in particolare dimostrano come accanto allo sviluppo a mosaico delle varie parti del vestibolo boccale (all'epoca dell'operazione infatti i vari territori sono già determinati) in seguito all'atto operatorio si noti una certa modificazione dei rapporti reciproci fra esse. Le parti della parte dorsale del seno rimaste si sono differenziate dando luogo a formazioni caratteristiche della parte superiore del seno (becco corneo-palatini) ma in rapporto alle nuove condizioni spaziali e alle nuove necessità funzionali hanno modificato la loro posizione (come insieme) rispetto alle altre parti del seno boccale che non sono state colpite dal taglio. Nei casi in questione infatti si vede che il becco corneo che dovrebbe guardare verso la cavità della bocca guarda esternamente quindi ha subito una rotazione in senso trasversale di circa 180° e inoltre si nota una rotazione delle parti in senso verticale in quanto il becco superiore (prodotto dalla funzione delle parti laterali della metà dorsale del seno boccale) invece di trovarsi sopra quello del labbro inferiore (nel nostro caso di parabiosi si dovrebbe trovare interposto fra le due rime della bocca formate dalla mandibola inferiore del becco) si viene a trovare di lato.

Bocche quadrangolari risultanti dalla fusione di parti di seno boccale in casi di parabiosi sono state descritte dal Born nei seguenti termini: «Le

sezioni in ambo i componenti sono state effettuate nel mezzo del seno boccale in modo da escludere le metà anteriori (dorsali) delle medesime. In conseguenza di ciò le metà rimaste si sono unite in una apertura boccale quadrangolare (fig. 40) intorno alla quale sono comparse le labbra caratteristiche e i denti cornei. In relazione alla forma concava verso la parte posteriore del primario abbozzo boccale, in ambo i componenti della coppia sono eliminate soltanto le sezioni mediane del bordo anteriore di modo che più precisamente, l'apertura boccale delle parabiosi è semplice soltanto nel mezzo – limitata da due mandibole con gli annessi denti e labbra – lateralmente, da ambo i lati, appare doppia; come parete intermedia compare lateralmente un pezzo complessivo di labbro superiore con rudimenti dei labbri e dei denti cornei » (p. 536).

Born perciò ha descritto la morfologia della nuova formazione creatasi e l'interpreta secondo la teoria del mosaico di Roux. Che il vestibolo boccale presenti una tipica condizione a mosaico è stato dimostrato dal Cotronei (4) con l'inibizione graduale e differenziale del seno boccale ottenuta mediante trattamento delle gastrule di Anuri con il cloruro di litio. Con questa sostanza ha messo in evidenza che i vari territori del seno boccale sono sensibili in modo differente poichè a seconda dello stadio del materiale, della concentrazione e durata del tempo di azione di essa, può essere impedito lo sviluppo di varie parti del seno boccale fino a completa soppressione di esso. Però accanto alla dimostrazione di questo rigido mosaico Cotronei fa osservare che man mano che vengono inibiti i vari territori si vengono a creare nuove condizioni per cui si sviluppano doppie formazioni vestibolari, proboscidi, ecc., che egli interpreta come adattamento spaziale.

Questo adattamento nei rapporti funzionali è quanto mai evidente nei casi di fusioni boccali da me osservati: i residui delle parti laterali del seno si portano esternamente in modo da non interporsi fra le due rime della nuova bocca (formata dalla parte mandibolare del becco corneo) di modo che esse possano, seppure limitatamente, avvicinarsi o allontanarsi permettendo ingestione di sostanze alimentari.

Accanto perciò alle fusioni di strutture morfologicamente eguali e allo sviluppo a mosaico delle singole parti si nota una certa deviazione di esse dalla normale posizione in relazione alle nuove condizioni funzionali che si sono venute a stabilire con la particolare condizione creata dal tipo di operazione.

(4) G. COTRONEI, *I processi di inibizione differenziale nel vestibolo boccale degli Anfibi Anuri*. « Riv. di Biol. », III, p. 3 (1921).

Biologia. — *La morfologia dei centri statici dei Selaci in rapporto alla forma corporea e alla differente attività natatoria* (*). Nota di ALBERTO STEFANELLI e M. CEAS, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Le ricerche compiute da uno di noi sui centri tegmentali con criterio comparativo ecologico in alcuni gruppi di Vertebrati e la constatazione degli stretti rapporti di sviluppo di questi centri con le particolari condizioni di attività motoria nella locomozione (1), ci hanno indotti ad estendere tali ricerche nei Selaci dove, in un gruppo per certi aspetti molto omogeneo di Vertebrati, si assiste ad una divisione tra specie con corpo cilindrico ed allungato che, per semplicità e indipendentemente all'uso sistematico dei termini, definiamo « squaliforme », e specie con corpo appiattito, depresso, e che, in riferimento alla specie più nota, definiamo « razziforme ».

Negli « squaliformi » (fig. 1 A) il nuoto si compie con attivi movimenti di tutta la muscolatura del tronco e della coda con onde ritmiche di contrazione, alterne, e che si propagano cranio-caudalmente, nuoto che è definito dal Böker (2) quale « kriechschwimmen ». Importanza fondamentale ha in questi animali la coda con la pinna codale epibatica quale organo di propulsione; la pinna dorsale e le pinne ventrali e pettorali hanno funzione eminentemente statica e di bilanciamento.

Nei « razziformi » (e sono note varie specie che rappresentano condizioni intermedie, quali quelle prese in considerazione da O. Abel (3): *Rhinobates*, *Rhina*, *Ceroptera*) si ha un enorme sviluppo delle pinne pettorali, una rudimentazione delle pinne ventrali, dorsali e della coda accompagnate dall'appiattimento dorso-ventrale del corpo e rudimentazione della muscolatura della coda. La coda perde ogni valore nella propulsione e l'avanzamento dell'animale è ottenuto con un battito ondeggiante ritmico delle larghe pinne pettorali a guisa di ali, come è raffigurato nella figura 1 B, desunta da istantanee pubblicate nel trattato di Hesse-Doflein (4).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) ALBERTO STEFANELLI; (1932), *Costanza di numero e di forma di peculiari elementi nervosi del sistema tegmentale dei Petromizonti.* « Boll. Biol. Sperim. », VII; (1934), *I centri tegmentali dei Petromizonti.* « Arch. Zool. », XX; (1941), *Ricerche comparative sui centri tegmentali dei Rettili in rapporto alla loro locomozione.* « Arch. Zool. », XXIX; (1943), *Il significato morfologico dell'apparato mauthneriano come risulta da ricerche sull'anguilla.* « Acta Pont. », VII; (1944), *I centri statici e della coordinazione motoria dei Rettili.* « Comment. Pont », VIII; (1944), *La fisiologia dei centri statici alla luce delle ricerche di morfologia ecologica nei rettili.* « Arch. Fisiol. », XLIV.

(2) H. BOKER, *Einführung in die Vergleichende Biologische Anatomie der Wierbeltiere.* I Bd., Fischer, Jena (1935).

(3) O ABEL, *Die Eroberungszuge der Wierbeltiere in die Meere der Vorzeit.* Jena (1934).

(4) HESSE-DOFLEIN, *Tierbau und Tierleben.* Leipzig (1914).

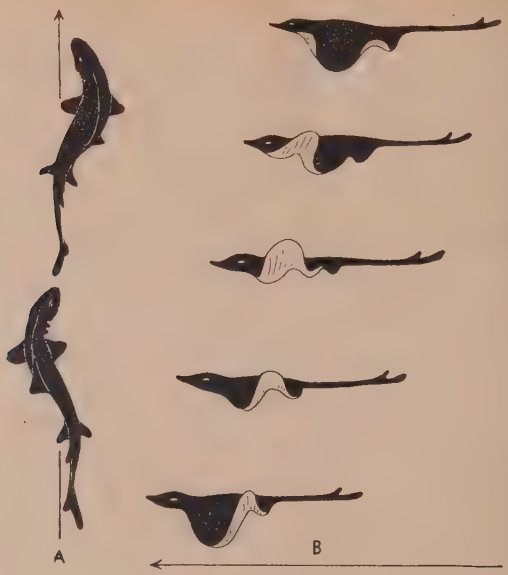


Fig. 1. – Movimento natatorio dei Selaci «squaliformi» (A) e «razziformi» (B).

La evidente diversità delle attività motorie che intervengono nella natazione di questi due tipi morfologici di selaci, faceva pensare a delle differenze morfologiche dei centri tegmentali (che, come è ormai noto [5], rappresentano il centro motore automatico più importante dei bassi Vertebrati), tenendo conto dei risultati positivi ottenuti da uno di noi (Stefanelli) in altri Vertebrati.

Sono stati esaminati gli encefali di individui adulti, tenendo conto solo di quelli di taglia corporea corrispondente, di *Mustelus vulgaris*, *Scyllium stellare*, *Scyllium canicula*, *Raia punctata* e *Torpedo ocellata* [6]. La difficoltà evidente di valutare la mole di animali di forma corporea così diversa, per cui non ci si può riferire a valori assoluti ponderali o metrici, è stata compensata tenendo conto della grandezza encefalica valutata dalle dimensioni del midollo allungato. Sono stati pertanto comparati animali di taglia simile e con allungato della stessa grandezza. Le sezioni seriate trasversali di 15 μ di encefali fissati in Bouin picrico sono state colorate con blu di toluidina. Da queste sezioni sono state ricavate proiezioni frontali quali quelle della fig. 2 di *Mustelus vulgaris* e di *Raia asterias*.

(5) N. Beccari, *Studi comparativi sulla struttura del rombencefalo.* II. *I centri tegmentali.* «Arch. Anat. Embriol.», *20*, p. 560 (1922).

(6) Materiale gentilmente fornitoci dalla Stazione Zoologica di Napoli che vivamente ringraziamo.

Fig. 2. Proiezione su un piano frontale dei centri tegmentali di un Selaco « squaliforme » (*Mustelus*) e di un « razziforme » (Raia) di eguali dimensioni corporee e encefaliche.

1) nucleo interstiziale del fascicolo longitudinale mediale; 2) n. interstiziale della commissura posteriore; 3) primordio del nucleo rosso; 4) nucleo pretrigeminale; 5) n. reticolare medio laterale (cellule mauthnerianiformi); 6) n. mielencefalico del rafe; 7), 8) primordi delle olive bilbari.

Già dalle ricerche di Van Hoevell sulla *Raia* [7] e di Beccari [8] sugli embrioni di *Scillium* e *Pristiurus* era nota la suddivisione di un centro tegmentale mesencefalico (meso–diencefalico), di un nucleo pretrigeminale, un centro metencefalico ed uno mielencefalico; questi ultimi tre corrispondono al nucleo reticolare superiore, medio e inferiore del bulbo secondo la terminologia di Kappers.

Negli esemplari adulti da noi esaminati si ritrova chiaramente tale suddivisione generale oltre ad una particolare suddivisione dei centri in nuclei minori; rimandiamo la parte descrittiva ad un lavoro in esteso che uno di noi ha in preparazione.

L'esame comparativo di questi centri negli « squaliformi » e nei « razziformi » (vedi fig. 2) ci fa constatare con assoluta evidenza come nei primi essi abbiano uno sviluppo estensivo assai più notevole, sia per il numero di elementi che per le dimensioni delle cellule.

Nel *Mustelus* troviamo nel mesencefalo una distinzione abbastanza netta tra il nucleo interstiziale della commissura posteriore e quello del fascicolo longitudinale mediale, mentre nella *Raia* si osserva un unico ammasso cellulare; nel complesso le cellule sono assai più numerose negli « squaliformi » dove le cellule raggiungono il diametro massimo di 60 μ mentre in *Raia* raggiungono solo i 45 μ.

Anche assai notevoli sono le differenze del centro rombencefalico. Mentre in *Raia* vi è una rarefazione di cellule tra il centro reticolare superiore e il centro reticolare medio, ciò non appare più con evidenza nel *Mustelus* dove il centro reticolare medio è differenziato solo per un assai più cospicuo addensamento di cellule che raggiungono le maggiori dimensioni (nel *Mustelus* diametro massimo di 90–100 μ, nella *Raia* di 60 μ).

Altra differenza rimarchevole di questo centro è la presenza negli « squaliformi » di un gruppo di grossi elementi fusiformi, spostati molto lateralmente e in stretta relazione con il nucleo di Deiters, elementi che mancano nei « razziformi ». Questi elementi hanno la tendenza a mostrarsi con una disposizione simmetrica nei due lati, sebbene non sia possibile la identificazione di coppie a sede definita nei vari individui. Il Beccari descrive alcuni elementi di grosse dimensioni nel nucleo di Deiters degli embrioni di *Scyllium canicula* e di forma affusata molto simili a questi da noi descritti. Secondo noi si possono distinguere questi elementi dal nucleo di Deiters vero e proprio per le caratteristiche tegmentali evidenti e per l'analogia con gli elementi tegmentali giganti di altri Pesci e dei Ciclostomi, dei quali riteniamo siano omologhi (elementi giganti del nucleo reticolare medio laterale tra

(7) VAN HOEVELL, *Remarks on reticular cells of the oblongata in different Vertebrates.* « Proc. Kon. Akad. Wetensch. », Amsterdam (1911).

(8) N. BECCARI, *Il differenziamento dei centri tegmentali nell'asse cerebrale degli embrioni di Selaci.* « Mon. Zool. It. », 40 (1929). *I centri tegmentali nell'asse cerebrale dei Selaci* « Arch. Zool., », XIV (1930).

cui vanno ascritte le cellule di Mauthner di molti Teleostei a Anfibi urodeli e, secondo le ricerche uno di noi, dei Petromizonti).

Anche il nucleo reticolare inferiore presenta notevoli differenze nei due gruppi di animali pur essendo in tutti ben distinte le tre colonne: una mediale o del rafe, una intermedia ed una laterale. Negli « squaliformi » sono costituite da cellule di maggiori dimensioni e più stipate. Dei tre, tuttavia, il nucleo del rafe presenta minore differenza ed è assai ben sviluppato anche nei « razziformi », di poco inferiore alla condizione degli « squaliformi ». Secondo Kooy, sarebbe questo il solo ed unico centro tegmentale mielencefalico poichè le due colonne laterali rappresenterebbero il primordio delle olive bulbari (*pars magnocellularis*). Tale primordio appare pertanto più esteso negli « squaliformi ».

In conclusione possiamo affermare esservi nei Selaci una diretta relazione tra la forma del corpo (cilindrica o appiattita) e la modalità di movimento natatorio con lo sviluppo dei centri tegmentali rombo-mesencefalici, centri coordinatori, e dei riflessi automatici dei movimenti.

Negli « squaliformi », in cui il nuoto si compie per attività della muscolatura segmentale del trònco e della coda, i centri tegmentali si presentano costituiti da un maggior numero di cellule più fittamente addossate e di dimensioni maggiori che nei «razziformi», in cui il nuoto si compie per l'ondulazione delle pinne laterali e in cui la muscolatura del tronco, e specialmente della coda, è assai più ridotta.

Particolarmente evidente è il maggior sviluppo negli « squaliformi» del centro mesencefalico, del nucleo reticolare medio (in cui si differenziano elementi omologabili agli elementi giganti di questo nucleo di altri Vertebrati, tra cui è la cellula di Mauthner) e del primordio delle olive inferiori.

Tale constatazione si ricollega ad altre fatte da uno di noi [9] che dimostrano le relazioni tra sviluppo dei centri tegmentali e sviluppo (estensione) della muscolatura metamerica del tronco a carattere più primitivo, e dimostra inoltre come già in questo gruppo di animali, che dopo i Ciclostomi sono tra i Vertebrati con costituzione più primitiva, si possano trovare degli stretti rapporti tra la struttura dei centri nervosi e le condizioni peculiari di vita.

(9) ALBERTO STEFANELLI, Vedi citazioni della prima chiamata.

Biologia. — *Il trattamento con chinoni e l'assunzione di ossigeno studiati sull'uovo in sviluppo di «Bufo vulgaris» e «Bufo viridis»* (*). Nota di E. URBANI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

È noto come varie sostanze posseggano un'azione antimitotica che si esplica in vari modi sulle cellule in divisione.

Tra le più studiate vi è la colchicina che ha la proprietà di arrestare la cariocinesi in metafase provocando nei vegetali la formazione di cellule con corredo cromosomico poliploide. La colchicina ha un'azione spiccatamente cariotropa che nelle cellule animali conduce ad alterazioni nucleari di varia entità che possono culminare con la distruzione del nucleo stesso. Molte altre sono le sostanze che possono alterare o arrestare le cariocinesi e Meyer e Algöwer (1) (1945) hanno resa nota l'azione antimitotica dei chinoni sulla divisione cellulare di culture di fibroblasti di pollo.

Lehmann e la sua Scuola hanno studiato l'azione di vari antimitotici su diversi materiali e recentemente Lehmann (2) (1947) ha pubblicato un lavoro, al quale rimando per la bibliografia sull'argomento, nel quale sono riferiti i risultati e interessanti considerazioni sull'azione del benzochinone, del fenantrenchinone, del naftochinone e di altri antimitotici sulla segmentazione dell'uovo del verme oligochete *Tubifex*. Questo Autore ha visto che nell'uovo di *Tubifex* i vari chinoni dànno quadri diversi e si può generalizzare dicendo che vi sono due tipi di azione. Nel primo tipo viene inibita l'attività plasmatica senza danno considerevole dell'apparato nucleare (naftochinone, benzochinone), nel secondo tipo si hanno invece lesioni e alterazioni dell'apparato nucleare (fenantrenchinone). L'azione del fenantrenchinone avrebbe perciò dei punti di contatto con l'azione della colchicina.

Secondo Hoffmann–Ostenhof (3) (1947) i chinoni si legherebbero alle proteine e la loro azione antimitotica sarebbe molto complessa e certamente ingranata con l'azione dei fermenti cellulari; anche secondo Lehmann e Hadorn i chinoni opererebbero una denaturazione delle proteine.

Ho voluto riprendere lo studio degli antimitotici da un punto di vista molto poco considerato e che a me sembra potrebbe dare dei risultati: studiare cioè il metabolismo di cellule e di organismi trattati con le dette sostanze e perciò inibiti nelle divisioni cellulari. Nella Nota (4) precedente a questa

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 marzo 1948.

(1) R. MEYER e M. ALGÖWER cit. da HOFFMANN–OSTENHOF.

(2) F. LEHMANN, «Experientia», *6*, 223 (1947).

(3) O. HOFFMANN–OSTENHOF, «Experientia», *4* e *5* (1947).

(4) Vedi fascicolo precedente di questi «Rendiconti».

ho esposto i risultati da me ottenuti sull'assunzione di ossigeno di uova di Anfibi trattate con colchicina. Tali risultati mostrano come nelle uova colchicinizzate il consumo di ossigeno sia inferiore a quello dei controlli. Continuando su questa strada ho voluto, come è logico, vedere l'azione di altri antimitotici e precisamente di alcuni chinoni sull'assunzione di ossigeno di uova di Anfibi nella segmentazione e nei primi stadi di sviluppo.

Richiamandomi ancora alle esperienze di Stefanelli [5] (1938) questo Autore ha dimostrato che durante la segmentazione delle uova di Anfibi non si ha un aumento apprezzabile del consumo di ossigeno: questo subisce solo un piccolo incremento allo stadio di blastula e poi un forte aumento all'inizio della gastrulazione. Questo fatto ha per il genere delle mie ricerche una grande importanza, infatti studiando l'azione dei chinoni sulla respirazione dell'uovo in segmentazione dove non vi sono fattori propri che fanno aumentare il consumo di ossigeno nel corso delle successive divisioni cellulari si può valutare con esattezza l'azione di queste sostanze sulla respirazione. Scopo di questa Nota preliminare è di esporre i primi risultati da me ottenuti con queste esperienze.

Ho sperimentato su uova di *Bufo vulgaris* e di *Bufo viridis* trattate con naftochinone (1–4) e con fenantrenchinone (9–10) a varie concentrazioni [6]. Le soluzioni madri di questi composti scarsamente solubili in acqua sono state allestite (Marini-Bettolo e Del Pianto 1946) [7] in alcool etilico a 90° (1/1.000) e poi portate in acqua di fonte alla concentrazione voluta che sarà indicata nei protocolli appresso riportati. La concentrazione in alcool delle soluzioni usate non ha nessun effetto controllabile nè sulla segmentazione nè sulla respirazione delle uova.

Le uova appena deposte [8] sono state liberate dalla ganga gelatinosa con forbicette e messe in numero di 30–60 in 60 cc. di soluzione del composto alle volute concentrazioni. Ho notato che le uova private della gelatina risentono prima e più regolarmente dell'azione dei chinoni di quelle poste nella soluzione con tutta la gelatina.

L'assunzione di ossigeno è stata determinata con un microrespirometro Stefanelli a campanelle con bordo smerigliato ponendo nella camera di reazione tre uova di *Bufo vulgaris* o dieci uova di *Bufo viridis* e operando le letture ogni cinque minuti primi. I valori che saranno appresso riportati hanno il significato di μl [9] di ossigeno assunto da un lotto di tre uova di *B. vulgaris* o da un lotto di dieci uova di *B. viridis* in cinque minuti primi e sono la media di varie determinazioni (da tre a dieci) eseguite su ciascun

(5) Alb. STEFANELLI, « Arch. Sc. Biol. », *24*, 411, (1938).

(6) Ringrazio il dott. Gino di Castro che ha preparato i chinoni usati.

(7) G. B. MARINI-BETTOLO e E. DEL PIANTO, « Commentationes Pont. Acc. Sc. », *10*, 87 (1946).

(8) Le uova usate in tutte le esperienze, ad eccezione di quelle della esperienza n. 3, sono state raccolte durante la deposizione nelle vasche del Laboratorio.

(9) μl = mm3.

lotto di uova ad un determinato stadio; i valori stessi sono ridotti a 0° e 760 mm. Hg.

La prima azione comune ai due chinoni impiegati è che essi provocano ad opportuna concentrazione la scomparsa dei limiti cellulari tra i blastomeri delle uova in segmentazione. Questo fenomeno di coalescenza dei blastomeri si osserva anche nelle uova trattate con colchicina il che fà supporre che in ambedue i casi nel momento precedente la fusione di blastomeri contiguì vi sia un abbassamento della viscosità protoplasmatica o una modifica della struttura delle membrane cellulari o di tensione superficiale nelle membrane stesse.

L'esame citologico delle uova trattate con chinoni sarà oggetto di descrizione a parte.

Riporto qui appresso i dati relativi a sette esperienze delle quali cinque eseguite con naftochinone e due con fenantrenchinone: le esperienze stesse illustrano gli stadi di sviluppo e l'assunzione di ossigeno di uova trattate con i detti chinoni dallo stadio di uovo insegmentato – due blastomeri fino allo stadio di blastula.

Esperienza N. 1.

3 febbraio 1948 ore 19.00.

Uova di *Bufo vulgaris* fecondate insegmentate poste in naftochinone 1/2.000.000–1/4.000.000–1/6.000.000–1/8.000.000.

4 febbraio 1948 ore 9.00.

Controlli a morula. 1/2.000.000.: morula con blastomeri in parte fusi. 1/4.000.000 : morula con blastomeri eguali o più grandi di quelli dei controlli. 1/6.000.000 , 1/8.000.000 : aspetto presso a poco eguale a quello dei controlli senza differenze bene apprezzabili.

Assunzione di O_2.

Ore 10.00 [10]	Controlli	μl	0,03332
	1/2.000.000	μl	0,04999
Ore 14.00	1/2.000.000	μl	0.04626
	1/4.000.000	μl	0,04194
Ore 17.00	Controlli allo stadio di blastula. . .	μl	0,03995
	1/2.000.000 : sono rimasti bloccati allo stadio indicato prima	μl	0,04836
	1/6.000.000 : blastule apparentemente eguali ai controlli	μl	0,03995

Temperatura di sviluppo 15° C ± 1° C. Temperatura del bagno termostatico durante le determinazioni manometriche 16° C.

(10) Le ore indicate si riferiscono alla prima determinazione (es. controlli), le determinazioni successive sono state eseguite a distanza di 40–50 minuti l'una dall'altra.

Esperienza N. 2.

4 febbraio 1948 ore 15.00.

Uova di *Bufo vulgaris* fecondate insegmentate poste in naftochinone 1/500.000–1/1.000.000–1/1.500.000 1/2.000.000.

Ore 19.00 Controlli a due blastomeri.

1/500.000 solo qualche uovo si trova a due blastomeri; gli altri insegmentati.

Nelle altre concentrazioni tutte le uova a due blastomeri.

Assunzione di O_2.

Ore 19.30	Controlli	μl	0,03021
	1/500.000 : il solco si è accennato ma non si è completato	μl	0,08832
	1/2.000.000 : a due blastomeri . . .	μl	0,03575
Ore 21.00	Controlli a quattro blastomeri . . .	μl	0,03259
	1/500.000 : non si sono segmentate .	μl	0,07362
	1/1.000.000 : si sono formati quattro blastomeri ma i limiti cellulari si vanno attenuando.	μl	0,06729
5 febbraio 1948 ore 10.00.			
	Controlli a morula–blastula	μl	0.03044
	1/500.000 la superficie dell'uovo è completamente liscia senza nessuna traccia di segmentazione	μl	0,02476

Temperatura di sviluppo 15°C ± 1°C. Temperatura del bagno termostatico durante le determinazioni manometriche 17°C.

Dalla presente esperienza risulta come nelle concentrazioni di naftochinone di 1/500.000 si abbia un forte aumento della quantità di ossigeno assunto che si mantiene elevato per un certo tempo e poi cade. Anche la concentrazione di 1/1.000.000 presenta contemporaneamente al blocco delle segmentazioni, un aumento del consumo di ossigeno.

Esperienza N. 3.

27 febbraio 1948 ore 14.00 circa.

Uova di *Bufo vulgaris* raccolte in campagna appena deposte.

Ore 18.00

Poste insegmentate in naftochinone alle concentrazioni 1/500.000–1/1.000.000 1/2.000.000–1/4.000.000.

Assunzione di O_2.

Ore 21.00	Controlli a 2–4 blastomeri	μl	0,03107
	1/500.000 : a 2–4 blastomeri, i limiti cellulari si vanno cancellando . .	μl	0,04217

	1/1.000.000 : a 4–8 blastomeri, i limiti cellulari sono irregolarmente marcati	μl	0,03053
Ore 23.00	Controlli a 16–32 blastomeri	μl	0,02897
	1/500.000 – : si sono formati 4 blastomeri ma ora i limiti cellulari sono quasi completamente cancellati	μl	0,05563
	1/1.000.000 ; si sono formati 8–16 blastomeri ed ora i solchi sono in regressione e in qualche zona scomparsi	μl	0,03061
28 febbraio 1948 ore 9.00			
	Controlli a morula	μl	0,03155
	1/500.000 : la superficie dell'uovo è completamente liscia	μl	0,02754
	1/1.000.000 : sono scomparsi quasi completamente i limiti cellulari .	μl	0,05583
	1/2.000.000 : aspetto di giovanissime morule con i limiti cellulari appena segnati	μl	0,04400
	1/4.000.000: morule senza apparenti differenze dai controlli	μl	0,03476

Temperatura di sviluppo 15° C ± 1° C. Temperatura del bagno termostatico durante le determinazioni manometriche 21° C.

Dalla presente esperienza risulta come il naftochinone alle concentrazioni di 1/500.000 e 1/1.000.000 elevi fortemente le ossidazioni contemporaneamente al blocco delle segmentazioni. Dopo un certo tempo anche qui nella concentrazione 1/500.000 è stata osservata la caduta dei valori elevati. Da tenersi presente che in questa esperienza le uova sono state poste nel naftochinone circa 4 ore dopo la fecondazione.

Esperienza N. 4.

28 febbraio 1948 ore 13.00.

Uova di *Bufo vulgaris* appena deposte insegmentate messe in naftochinone 1/500.000–1/1.000.000–1/2.000.000–1/4.000.000.

Assunzione di O_2.

Ore 19.00	Controlli a 4 blastomeri	μl	0,02901
	1/500.000 si sono formati i due solchi meridiani che in alcune zone si sono completamente cancellati . .	μl	0,05300
Ore 20.30	1/500.000 ; i limiti cellulari si sono completamente cancellati	μl	0,06025

1/1.000.000 : si sono formati 4 blastomeri ma ora i limiti cellulari sono meno marcati . . . . . µl 0,03470

I controlli si trovano a 32 blastomeri.

1/2.000.000 : si trovano a 16 blastomeri ma i limiti cellulari sono irregolari ed inegualmente profondi . µl 0,02952

1/4.000.000 : si trovano a 32 blastomeri senza apparenti differenze dai controlli . . . . . µl 0,02702

29 febbraio 1948 ore 10.00

Controlli a morula avanzata . . . . µl 0,03043

1/500.000 : sono quasi completamente scomparsi i segni di divisione cellulare . . . . . µl 0,04136

1/1.000.000: limiti cellulari quasi completamente cancellati . . . . . µl 0,02900

1/2.000.000 : morula con blastomeri irregolari nella forma e nelle dimensioni . . . . . µl 0,02952

Temperatura di sviluppo 15°C ± 1°C. Temperatura del bagno termostatico durante le determinazioni manometriche 20°C il 28 febbraio 18°C il 29 febbraio.

Esperienza N. 5.

1 marzo 1948 ore 14.00

Uova di *Bufo viridis* appena fecondate insegmentate poste in naftochinone 1/500.000–1/1.000.000–1/2.000.000–1/4.000.000.

Assunzione di O_2.

Ore 17.30 Controlli a 2 blastomeri . . . . . µl 0,02087

1/500.000 : stesso stadio dei controlli . µl 0,03705

1/1.000.000 : stesso stadio dei controlli. . . . . µl 0,02698

Ore 21.00 Controlli a 16 blastomeri . . . . . µl 0,02134

1/500.00 : si trovano a 4 blastomeri: µl 0,05018

Ore 23.00 1/500.000 : si sono formati 4 blastomeri ed ora i limiti cellulari stanno scomparendo . . . . . µl 0,03660

2 marzo 1948 ore 9.00.

Controlli a morula avanzata . . . . . µl 0,02202

1/500.000 : sono rimasti bloccati a 4 blastomeri ed i limiti cellulari non sono completamente scomparsi . . µl 0,03276

1/1.000.000 : morule di pochi blastomeri . . . . . μl 0,03549
1/2.000.000 : morule apparentemente eguali ai controlli . . . . . μl 0,02729

Temperatura di sviluppo 15° C ± 1° C. Temperatura del bagno termostatico durante le determinazioni manometriche 15° C.

Esperienza N. 6.

3 marzo 1948 ore 10.00.

Uova di *Bufo vulgaris* appena fecondate insegmentate poste in fenantrenchinone 1/100.000–1/250.000.

Assunzione di O_2.

Ore 14.30 Controlli a 2 blastomeri . . . . . μl 0,02078
1/250.000 : si trovano allo stesso stadio dei controlli . . . . . μl 0,07259
Ore 18.00 Controlli a 16 blastomeri . . . . . μl 0,02123
1/100.000 : si sono formati 4 blastomeri ed i limiti cellulari stanno scomparendo . . . . . μl 0,08784
1/250.000 : si trovano a 4–8 blastomeri con limiti cellulari in qualche punto cancellati . . . . . μl 0,06732

Temperatura di sviluppo 15° C ± 1° C. Temperatura del bagno termostatico durante le determinazioni manometriche 20° C.

Da questa esperienza risulta come il trattamento con fenantrenchinone blocchi le uova nel loro sviluppo ed elevi ancor più del naftochinone gli scambi respiratori.

Esperienza N. 7.

4 marzo 1948 ore 8.30.

Uova di *Bufo vulgaris* appena fecondate insegmentate poste in fenantrenchinone 1/250.000–1/500.000.

Assunzione di O_2.

Ore 14.00 Controlli a 2 blastomeri . . . . . μl 0,02600
1/250.000 : stesso stadio dei controlli . μl 0,07065
1/500.000 : si trovano a 4 blastomeri . μl 0,05728
Ore 19.00 Controlli a 16 blastomeri : . . . . μl 0,02667
1/250.000 : si sono formati 8 blastomeri ed ora i limiti cellulari stanno scomparendo . . . . . μl 0,07718
1/500.000 : si sono segmentate ma irregolarmente fino a 16 blastomeri, ora i limiti cellulari cominciano a regredire . . . . . μl 0,06250

5 marzo 1948	ore 10.00.	
	Controlli a blastula inizio della gastrulazione.	μl 0,03425
	1/250.000 : alcune zone delle uova si presentano lisce per fusione di blastomeri altre invece sono irregolarmente segmentate	μl 0,08674
	1/500.000 : presentano un aspetto quasi eguale alle precedenti . . .	μl 0,06597
Ore 17.00	Controlli: 1° solco falciforme	μl 0,04037
	1/250.000 : stesso stadio delle ore 10,00; sono rimaste bloccate . . .	μl 0,09208
	1/500.000 : stesso stadio delle ore 10,00 : sono rimaste bloccate . . .	μl 0,08249
6 marzo 1948	ore 9.00.	
	1/250.000 : non presentano differenze bene apprezzabili dalla osservazione precedente	μl 0,07754
	1/500.000 : non presentano differenze bene apprezzabili dalla osservazione precedente	μl 0,08294
Ore 18.00	1/250.000 : come alla precedente osservazione; una delle tre uova in esame presenta in una zona del polo animale segni di citolisi	μl 0,03740
	1/500.000 : compare al polo vegetativo che è scarsamente e irregolarmente segmentato un accenno di gastrulazione con un 1° solco falciforme molto irregolare	μl 0,08801
	In seguito la gastrulazione non è avvenuta.	

Temperatura di sviluppo 15°C ± 1° C. Temperatura del bagno termostatico durante le determinazioni manometriche 18°C il 4 marzo – 19°C il 5 marzo.

Anche da questa esperienza risulta come il fenantrenchinone operi unitamente al blocco più o meno accentuato delle divisioni cellulari una notevole elevazione della assunzione di ossigeno che rimane tale per un tempo abbastanza lungo, pur subendo delle oscillazioni quantitative, per poi cadere come è stato visto anche per il naftochinone.

Da tutte le esperienze risulta come le uova trattate con chinoni, già durante le prime segmentazioni e prima che si effettui il blocco mitotico presentino una elevata assunzione di ossigeno. Poichè questo aumento non si verifica durante la segmentazione dei controlli (Stefanelli) è evidente che deve essere attribuito alla azione dei chinoni usati.

Il blocco della segmentazione e la scomparsa dei limiti cellulari che si ottengono nelle uova di *Bufo vulgaris* e di *Bufo viridis* trattate con naftochinone e nelle uova di *Bufo vulgaris* [11] trattate con fenantrenchinone si accompagnano ad un aumento della assunzione di ossigeno. Questo aumento è di notevole entità per le concentrazioni più elevate usate e nelle prime ore susseguenti al trattamento per le uova trattate con naftochinone. Ancora più elevato e di maggior durata è l'aumento dell'assunzione di ossigeno nelle uova trattate con fenantrenchinone [12]. Come risulta dai protocolli delle esperienze nn. 2–3–7 dopo un certo tempo la elevata quantità di ossigeno assunto diminuisce e scende a valori inferiori a quella dei controlli. Le concentrazioni di naftochinone da 1/500.000 a 1/4.000.000 mostrano una certa gradazione di azione e sullà segmentazione e sulla assunzione di ossigeno; le concentrazioni stesse non permettono la gastrulazione mentre le più deboli permettono la formazione della blastula. Le concentrazioni di fenantrenchinone usate non permettono anche loro la gastrulazione che si verifica a concentrazioni più deboli di 1/500.000.

Le osservazioni Clowes e Krahl [13] (1936) mostrano dei punti di contatto con le presenti esperienze. Questi Autori hanno trattato le uova di *Arbacia* con alofenoli e nitrofenoli ed hanno visto che questi composti bloccano le mitosi dell'uovo e contemporaneamente elevano in modo notevole le ossidazioni cellulari. Con il dinitrofenolo per esempio hanno trovato che al blocco cariocinetico si accompagna un consumo di ossigeno superiore al normale del 292 %. Queste sostanze perciò hanno la proprietà di arrestare le mitosi e di elevare la respirazione, le stesse caratteristiche dei due chinoni da me impiegati.

Altro fatto di interesse è che il *ginogamone I* di Hartmann e Collaboratori o Echinocromo A non è altro che un derivato naftochinonico che avrebbe secondo Friedheim [14] il potere di aumentare fino a sedici volte la respirazione dell'uovo vergine di Riccio di mare, mentre la stessa sostanza non avrebbe secondo Tyler [15] questa azione. Sono, queste ricerche, da tenere presenti negli ulteriori sviluppi delle mie esperienze.

Se si comparano i presenti risultati con quelli da me ottenuti sulla assunzione di ossigeno di uova di *B. vulgaris* trattate con la colchicina si vede la profonda differenza agli effetti della respirazione tra l'azione della colchicina e quella del naftochinone e del fenantrenchinone.

(11) Non ho sperimentato con fenantrenchinone sulle uova di *Bufo viridis*.

(12) MARINI-BETTOLO e DEL PIANTO (loc. cit.) hanno visto che tra i vari chinoni da loro usati il fenantrenchinone possiede la più forte azione antibiotica. Questa concordanza di dati tra azione antibiotica e potere di elevare la assunzione di ossigeno meriterebbe un più profondo esame comparando l'azione del fenantrenchinone e di un maggior numero di chinoni, a parità di concentrazione molecolare, sulla assunzione di ossigeno.

(13) CLOWES e KRAHL, « J. Gen. Physiol. », *20*, 145 e 173 (1936).

(14) Cit. da BRACHET, *Embryologie chimique* (1944).

(15) Cit. da BRACHET, *Embryologie chimique* (1944).

La prima arresta le mitosi, provoca la scomparsa dei limiti cellulari e abbassa il tasso delle ossidazioni, i secondi arrestano le mitosi provocano la scomparsa dei limiti cellulari ed elevano le ossidazioni.

Per quanto riguarda i rapporti tra questi fatti e i più approfonditi reperti di morfologia embriologica rimando ad ulteriori comunicazioni.

Premessa fondamentale nella impostazione del presente lavoro e del precedente è stata la osservazione di Alberto Stefanelli che le cariocinesi che determinano una suddivisione nella massa dell'uovo durante la segmentazione, nella quale non vi è aumento di massa citoplasmatica, non portano ad aumenti quantitativi apprezzabili dell'assunzione di ossigeno. Le sostanze usate che provocano o depressione o attivazione degli scambi ossidativi contemporaneamente a quadri vari di alterazioni o modificazioni delle strutture cellulari mostrano come le alterazioni dei fenomeni di divisione cellulare possano essere dissociati dall'attività respiratoria del protoplasma del germe considerato nel suo complesso.

Embriologia sperimentale. — *Sulle relazioni causali di sviluppo «otocisti–cresta neurale» in trapianti embrionali negli Anfibi* (*). Nota di M. A. Barbasetti di Prun, presentata (**) dal Corrisp. G. Brunelli.

In una serie preliminare di esperimenti di trapianto sull'addome di porzioni di cresta neurale (mesectoderma) della zona branchiale (trapianti autoplastici eterotopici di c. n. pura, di c. n. col sovrastante ectoderma, di c. n. con l'endomesoderma e l'endoderma sottostanti) in embrioni di *Rana esculenta* allo stadio di bottone codale, ho riscontrato la presenza, nella zona del trapianto, di alcune otocisti (sei). Queste si presentavano senza capsula cartilaginea quando il trapianto non comprendeva endomesoderma, a volte con capsula cartilaginea quando questo tessuto era compreso nel trapianto, ciò che conferma ancora una volta che la capsula cartilaginea proviene dall'endomesoderma (1).

La presenza di una delle sei otocisti è certamente dovuta al fatto che durante l'operazione (trapianto di c. n. pura) l'abbozzo dell'orecchio interno, (che allo stadio operato consiste in una vescichetta già chiusa) deve essere

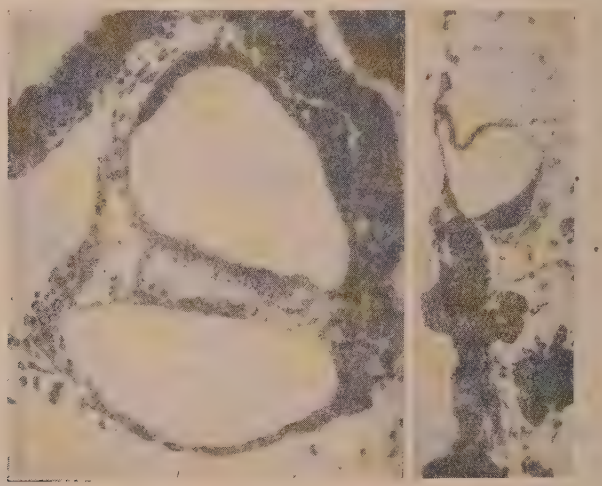
(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Bologna, diretto dal Prof. P. Pasquini.

(**) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) L. S. Stone, *Experiments on the development of the cranial ganglia and the lateral–line sense organs in «Amblystoma»*. « J. Exp. Zool. », 35 (1922). *Further experiments on the extirpation and transplantation of mesectoderm in «Amblystoma punctatum»*. « J. Exp. Zool. », 44 (1926); M. Ichikawa, *Experimental studies on the formation of the auditory capsule of Amphibians*. « Botany and Zoology », 4 (1939).

stato leso e parzialmente asportato: nella sede normale infatti l'otocisti è ridotta di volume e manca di canali semicircolari, mentre l'otocisti differenziata dal trapianto consta di una vescicola fornita di un epitelio di senso e provvista di un largo canale semicircolare (fig. 1, *a*).

In altri due casi le otocisti della regione operata, per quanto di dimensioni quasi regolari, mancano dei tre canali semicircolari. Benchè allo stadio operato l'orecchio interno rappresenti negli Anfibi un sistema a mosaico [2], sarebbe anche legittimo pensare che la vescicola piccola e rudimentale ottenuta nel trapianto e l'otocisti più grande, ma difettosa, nella sede normale, provengano da uno stesso abbozzo separato inegualmente all'atto del tra-



a *b*

Fig. 1. – *a*: otocisti con epitelio di senso e con un canale semicircolare (sotto); *b*): otocisti (indotta) con epitelio di senso. Oc. 5× Reichert, obb. 10× Reichert.

pianto. Ma per le altre tre otocisti questo dubbio non può valere: le corrispondenti otocisti normali sono ben sviluppate e non presentano difetti. Tantomeno quindi si può pensare che si tratti di trapianto di intere vescicole otiche, data la incapacità assoluta di rigenerazione di questo abbozzo dopo lo stadio di neurula. Non resta quindi che ammettere che le otocisti

(2) G. STREETER, *Experimental observations on the development of the Amphibian ear vesicle*. « Anat. Rec. », 3 (1909). H. SPEMANN, *Die Entwicklung des invertirten Ohrblaschen zum Labirint*. « Arch. Entw. Mech. », 30 (1910). K. EISINGER, e H. STERNBERG, *Beiträge zur Entwicklungsmechanik des inneren Ohres*. « Arch. Entw. Mech. », 100 (1924). H. W. KAAN, *Experiments on the development of the ear of « Amblystoma punctatum »*. « J. Exp. Zool. », 46 (1926). C. OGAWA, *Einige Experimente zur Entwicklungsmechanik der Amphibien Ohrblaschen*. « Folia Anat. Jap. », 4 (1926). C. GUARESCHI, *Saggio sulla morfologia causale dell'orecchio interno degli Anfibi*. « Riv. Biol. », 22 (1937)

siano state indotte dalla cresta neurale sull'ectoderma dell'addome (nei casi di trapianto di c. n. pura e di c. n. con endomesoderma ed endoderma), o sull'ectoderma branchiale (nel caso di trapianto di c. n. con l'ectoderma sovrastante).

Questo fatto non è tanto strano se si pensa che in tutti i lavori sulla determinazione delle otocisti tutti gli AA. hanno concordemente stabilito che essa è già determinata solo in embrioni che abbiano già sollevato le pieghe neurali [3], cioè esattamente in quegli embrioni in cui la c. n. ha già cominciato la sua migrazione ed ha già raggiunto la zona otica. Tra gli altri Röhlich [3] oltre a ciò nota che nel territorio derivato dal trapianto dell'abbozzo otico erano spesso ben riconoscibili, accanto all'otocisti, gangli nervosi e spesso melanofori, formazioni queste nelle quali la c. n. si differenzia anche in condizione di trapianto [4]. Inoltre, per quanto molti AA. [5] sostengano che l'induttore della vescicola otica sia il rombencefalo, altri hanno ottenuto otocisti ben formate anche in casi in cui il rombencefalo era difettoso o assente [6].

Recentemente il Trampusch (1941) [7] descrisse in *Amblystoma* induzioni di vescicole otiche trapiantando sulla parete addominale di un embrione allo stadio di bottone codale una porzione del tetto del tubo neurale o un pezzo di piega neurale, e ricoprendo la porzione trapiantata con epidermide presuntiva di una giovane gastrula. Benchè in questo modo non si possa evitare che nel trapianto si sviluppi anche tessuto nervoso, Trampusch ritiene di aver dimostrato a sufficienza che l'induttore dell'otocisti è la c. n.

I risultati di alcuni altri AA. [8] sembrano in contrasto con questo modo di vedere, in quanto tendono a dimostrare che l'abbozzo dell'orecchio

(3) H. W. Kaan, loc. cit. (1926). K. Röhlich, *Experimentellen Untersuchungen über den Zeitpunct der Determination der Gehörblase bei « Amblystoma » Embryonen.* « Arch. Entw. Mech. », *118* (1929). C. Guareschi, *Studi sulla determinazione dell'orecchio interno degli Anfibi Anuri.* « Arch. It. Anat. e Embr. », *35* (1935).

(4) L. Raunich, *Ricerche sullo sviluppo dell'apparato branchiale negli Anfibi. I. Trapianti eterotopi omoplastici e xenoplastici negli Anuri.* « Arch. It. Anat. e Embr. », *47* (1942).

(5) L. S. Stone, *Induction of the ear by the medulla and its relation to experiments on the lateralis system in Amphibia.* « Science », *74* (1931). C. Guareschi, loc. cit. (1935) ed altri.

(6) W. H. Lewis, *On the origin and differentiation of the otic vesicle in amphibian embryos.* « Anat. Rec. », *1* (1906). R. Tokura, *Entwicklungsmechanische Untersuchungen über das Hörblaschen und das akustische sowie faciale Ganglion bei den Anuren.* « Fol. Anat. Jap. », *3* (1925). A. Dalcq, *Contribution à l'étude du Potentiel Morphogénétique chez les Anoures. I. Expériences sur la zone marginale dorsale et le plancher du blastocoele.* « Arch. Biol. », *51* (1940).

(7) H. A. L. Trampusch, *On ear induction.* « Acta Nearl. Morph. », *4* (1941).

(8) H. G. Albaum, e H. A. Nestler, *Xenoplastic ear induction between « Rana pipiens » and « Amblystoma punctatum ».* « J. Exp. Zool. », *75* (1937). C. Yntema, *Self differentiation of heterotopic ear ectoderm in the embryo of « Amblystoma punctatum ».* « J. Exp. Zool. », *80* (1939). E. Zwilling, *The determination of the otic vesicle in « Rana pipiens ».* « J. Exp. Zool. », *86* (1941).

interno è già determinato prima della formazione delle pieghe neurali, nella gastrula avanzata; questa difficoltà mi sembra però che possa essere superata osservando che in stadi così giovani non si può escludere che nel trapianto sia stata compresa una porzione di c. n. presuntiva, già determinata a quello stadio in una zona continua lungo il bordo laterale della piastra neurale [9]. Ciò si può infatti desumere chiaramente, ad esempio, dai risultati dei trapianti dello Zwilling [8]: nella totalità dei casi si erano sviluppati melanofori e mesenchima e in buona parte anche gangli.

La induzione dell'otocisti è stata anche attribuita al mesoblasto sottostante alle pieghe midollari [10]. Sappiamo però che è il tetto dell'archenteron che induce le c. n., e la induce sempre, in condizione di trapianto, accompagnata o non da tessuto nervoso [11]; nulla vieta di credere che la formazione di otocisti negli esperimenti degli AA. citati fosse dovuta alla c. n. formatasi per induzione dal mesoblasto del tetto dell'archenteron. Anche Dalcq (1940, 1941) [12] non esclude che la c. n. abbia potere inducente per la formazione di otocisti, benchè egli affermi che questo potere sia trasmesso secondariamente alla c. n. da un centro organizzatore otico primario («un foyer du mésenchyme présomptif»), situato, secondo lo stesso A., nel mesoblasto paracordale.

Le otocisti ottenute nei miei esperimenti, per quanto siano provviste di creste acustiche ben evidenti, e accennino già a una divisione della primitiva vescicola in più parti, sono molto meno differenziate e progredite nello sviluppo delle otocisti normali; sono cioè molto più giovani, ciò che conferma che siano indotte più tardi delle normali. È vero che Yntema (1933) [13] in *Amblystoma* e Albaum e Nestler (1937) [14] in trapianti xenoplastici tra *Rana pipiens* e *Amblystoma* avevano notato come le vescicole otiche trapiantate in zone lontane dalla regione auditiva rimangano a uno stadio di meno avanzato sviluppo e differenziamento che non nella sede normale o vicino ad essa: nei miei casi però questo non sembra avverarsi, in quanto

(9) C. P. Raven, *Zur Entwicklung der Ganglienleiste*. III. *Die Inductionsfahigkeit des Kopfganglienleistenmaterials von «Rana fusca»*. «Roux' Arch.», *130* (1935). R. G. Harrison, *Die Neuralleiste*, «Verh. d. Anat. Ges.», Anat. Anz.», *85* (1938). R. C. Baker, e O.G. Grant, *The behaviour of the neural crest in the forebrain region of «Amblystoma»*. «J. Comp. Neur.», *71* (1939).

(10) R. G. Harrison, *Factors concerned in the development of the ear in «Amblystoma punctatum»*. «Anat. Rec.», *64* (1935). H. G. Albaum e H. A. Nestler, loc. cit. (1937). E. Zwilling, loc. cit. (1941).

(11) C. P. Raven, e G. Kloos, *Induction by medial and lateral pieces of the archenteron roof, with special reference to the determination of the neural crest*. «Acta Nearl. Morph.», *5* (1943-45).

(12) A. Dalcq, loc. cit. (1940). *Contribution à l'étude du Potentiel Morphogénétique chez les Anoures*. II. *Rotations partielles du Centre organisateur chez le Discoglosse*. «Arch. Biol.», *52* (1941).

(13) C. L. Yntema, *Experiments on the determination of the ear ectoderm in the embryo of «Amblystoma punctatum»*. «J. Exp. Zool.», *65* (1933).

(14) H. G. Albaum e H. A. Nestler, loc. cit. (1937).

ho riscontrato che trapiantando nella stessa sede una porzione di vescicola otica, questa raggiunge uno sviluppo e un differenziamento ben maggiore che nelle vescicole ottenute per induzione (fig. 1, *a*, *b*). E ciò è probabilmente dovuto al fatto che oltre alla porzione di vescicola otica era stata trapiantata anche una porzione non indifferente di c. n.; non è da escludersi che questa eserciti una influenza continua sullo sviluppo dell'otocisti, sia in sede normale, come già aveva notato Dalcq (1933)[15], sia in condizione di trapianto, come fa pensare anche l'osservazione di Guareschi (1930)[16], che rilevava come le otocisti trapiantate con una porzione dei tessuti che la circondano si sviluppano molto meglio di quelle trapiantate nude. Anche Stone (1932)[17] attribuisce al tubo neurale una influenza sullo sviluppo dell'abbozzo otico, sia normalmente che in trapianto, e non è difficile che questa influenza sia esercitata, più che dal tubo neurale di per sè, dalla c. n. che ne deriva.

Non si può per ora stabilire se l'otocisti possa essere indotta da una porzione determinata dell'ectomesoderma o da tutto indifferentemente; nei casi da me ottenuti sembrerebbe che l'induzione fosse stata prodotta dalla porzione dorsale della c. n. trapiantata, perchè le otocisti si sono rinvenute precisamente in una zona dorsale alle branchie che si erano ottenute nello stesso trapianto (a meno che questo fatto non sia dovuto ad una influenza delle branchie stesse), ma niente di certo si può per ora affermare data la scarsità dei risultati.

Dell'induzione avutasi sull'ectoderma indifferente credo che non si possa dubitare, se si pensa che l'otocisti è un organo sicuramente ectodermico, e che non è verisimile che possa venir formato dalla c. n. stessa; d'altro canto non si può fare a meno di notare lo straordinario potere di reazione alle induzioni (o *competenza* degli AA. inglesi) presentato dall'ectoderma di *Rana esculenta* allo stadio di bottone codale, mentre è noto che lo stesso fenomeno può avvenire in *Amblystoma*[18] solamente in stadi molto più giovani (neurula).

(15) A. Dalcq (1933) citato da A. Dalcq, loc. cit. (1940).

(16) C. Guareschi, *Studi sullo sviluppo dell'otocisti negli Anfibi anuri*. «Roux' Arch.», *122* (1930).

(17) L. S. Stone, *Some factors concerned in the development of the ear in «Amblystoma punctatum»*. «Anat. Rec.», 52 (1932).

(18) H. W. Kaan, loc. cit. (1926); C. L. Yntema, loc. cit. (1933).

Radiologia. — *L'azione dei raggi X sui catalizzatori organici e su soluzioni di bleu di metilene* (*). Nota di E. Gallico e B. Camerino, presentata (**) dal Socio P. Rondoni.

Da quando i raggi X e le sostanze radioattive hanno trovato un'applicazione terapeutica è sorto il problema di identificare come agiscono le radiazioni ionizzanti sugli organismi viventi. Problema vessato ed aperto più che mai. Anche infatti se si costringa la discussione entro i limiti della azione citolitica delle dosi terapeutiche, per esempio 1000–5000 *r*, non si è raggiunto ancora un consenso generale sul meccanismo d'azione.

Ora, un problema fondamentale di radiobiologia è quello se l'azione dei raggi X sia diretta, come ammette la Treffer–theorie o Target–theorie, o indiretta quale normalmente chiamata nella letteratura azione «radiochimica». La differenza può essere illustrata dall'interpretazione di alcuni risultati sperimentali.

Le concezioni che si sintetizzano nella teoria del bersaglio e le sue applicazioni in radiobiologia sperimentale sono state riassunte da numerosi autori (Lea, Haines e Coulson, Jordan, Zimmer ed altri).

L'azione è dovuta secondo le concezioni di questi autori alla distribuzione delle ionizzazioni, calcolabile statisticamente, contro un punto sensibile dell'organismo irradiato. Inscrivendo graficamente il fenomeno si ottiene una curva esponenziale se l'effetto è prodotto da una semplice ionizzazione, ovvero una curva più o meno in forma di S se due o più ionizzazioni sono necessarie per produrre l'effetto in questione.

In verità l'irradiazione di batteri e di organismi simili indifferenziati si svolge secondo la teoria del bersaglio, col presupposto che un singolo colpo uccida l'organismo ove ne colpisca la parte vitale.

Ma persino i sostenitori della teoria del bersaglio sono incerti se possa essere applicata ai risultati sperimentali in casi più complicati: per esempio nel lavoro di Zimmer si vede come le curve riproducenti il fenomeno studiato – l'uccisione di uova di Drosofila – possano essere spiegate soltanto ammettendo che l'effetto è prodotto da uno a sei colpi secondo i differenti stadi dello sviluppo.

Un secondo punto debole della teoria del bersaglio si è che essa non ammette la possibilità del riassestamento dall'insulto della radiazione ovvero l'influenza di reazioni reversibili.

Per quanto poi concerne i risultati dell'irradiazione di sostanze chimiche, alcune ricerche tenderebbero ad indicare una costante monomolecolare nell'azione dei raggi X. La distruzione (« inattivazione ») di pepsina e tripsina

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto del Cancro di Milano e nel Laboratorio di ricerche della Farmitalia.

(**) Nella seduta del 13 marzo 1948.

(Hussey e Thompsen, Clark e Northrop), la decomposizione dell'emoglobina (Fricke e Petersen), la trasformazione del fosforo bianco in rosso (Zimmer), tutti questi esperimenti porterebbero ad ammettere che le reazioni avvengono per colpo diretto contro la molecola senza alcuna partecipazione del solvente.

In molti casi tuttavia il numero delle molecole prodotte aumenta in modo lineare secondo la dose (ossidazione del $FeSO_4$ (Ficke e Morse), riduzione del $K_2Cr_2O_7$ (Fricke e Brownscombe), decomposizione di H_2O_2 (Risse) e $K_2S_2O_7$ (Glocker e Risse). Ed i risultati di queste esperienze non si accordano con la teoria che la trasformazione avvenga per colpo diretto contro le molecole: si otterrebbero allora delle curve esponenziali od in forma di S.

In tema, l'esperienza di Fricke e Morse, $FeSO_4 \xrightarrow{\text{raggi X}} Fe_2(SO_4)_3$ ci sembra particolarmente importante; infatti:

1° In un intervallo di concentrazione 1–20 la dose necessaria per ossidare 1 molecola di solfato ferroso era costante ($= 5{,}5 \times 10^7\, r$).

2° La reazione avviene linearmente fino alla dose critica e da quel momento ad una velocità inferiore, ma ancora costante. La dose critica è caratterizzata come segue: la quantità assoluta di solfato ferrico formata è equivalente all'ossigeno libero in soluzione.

La prova dunque che il rendimento è entro certi limiti indipendente dalla concentrazione è un accertamento che interviene nel fenomeno l'acqua od un suo ipotetico prodotto di trasformazione. Questo modo di azione dei raggi X è dunque indiretto.

Si potrebbe argomentare che la differenza tra azione diretta ed indiretta è puramente accademica e senza importanza biologica, poichè infine nel caso di azione indiretta il momento primario è pur tuttavia una ionizzazione od attivazione di una molecola seguìta da una trasmissione di energia al composto studiato. Se si considera tuttavia che 1000 r producono in media circa 10^{15} paio di ioni per cm^3 di tessuto o di soluzione acquosa, sono minime le possibilità di colpi diretti su una particolare qualità di molecole, allorquando siano presenti in una soluzione a bassa concentrazione.

Azione delle radiazioni ionizzanti sui catalizzatori organici. – L'effetto osservato irradiando un enzima è stato in generale una diminuzione della sua attività: ma non è stato ancora studiata la modificazione chimica subìta dall'enzima in seguito all'iradiazione: e questo perchè l'analisi chimica di un enzima è un problema molto complesso: si tratta infatti di catalizzatori organici complessi, in quanto essi sono a molecole grosse e hanno natura colloidale talora anzi dimostratamente proteica (Rondoni).

Nell'intento di semplificare eventualmente questa ricerca, abbiamo stimato interessante di studiare l'azione delle radiazioni ionizzanti sui catalizzatori organici. Come afferma Rondoni, se interesse hanno i catalizzatori inorganici, ancor più vicini ai veri biocatalizzatori o fermenti sono i catalizzatori organici, di cui taluni costituiscono dei veri modelli di fermenti.

Il Langenbeck ha dimostrato che la isatina rappresenta un modello di deidrasi privo di metalli. Lo Strecker accertò a sua volta che determinati aminoacidi vengono scissi dall'allossano, mentre fu posto in luce da Traube che, oltre all'allossano, pure l'isatina reagisce con gli aminoacidi, producendo una deidrogenazione: l'idrogeno tolto all'aminoacido reagisce allora facilmente con ossigeno o bleu di metilene. Si tratta perciò dell'attivazione dell'idrogeno nel senso della deidrogenazione secondo Wieland: l'isatina è dunque il primo esempio di un catalizzatore organico con attività deidrogenante.

Vorremmo ricordare a questo punto che Harward ha studiato con il metodo di Thumberg l'azione di dosi intensive di raggi X sulle deidrogenasi dell'acido lattico, del glucosio, dell'acido citrico e succinico: egli trovò che le radiazioni esercitavano solo una modestissima azione o talvolta addirittura nulla sui fermenti e concluse che raggi X e γ non esercitavano un'azione biologica decisiva sui fermenti respiratorî. Seize invece dimostrò, sempre con il metodo di Thunberg, che la attività deidrogenante per esempio per l'acido citrico e glutamico è accelerata dai raggi X e che questa azione, che esiste se pure in grado minore anche per la succinodeidrogenasi d'origine muscolare, non si determina che durante l'irradiazione. Egli pensò che gli elettroni prodotti dai raggi X, aumentando la pressione elettronica, cambiassero il potenziale d'ossido–riduzione verso il lato negativo, onde ne risulterebbe un'accelerazione di tutte le riduzioni sotto l'azione dei raggi X: noi facciamo osservare, come esporremo più estesemente in seguito, che i raggi X esercitano un'azione decolorante su soluzioni di bleu di metilene.

Durante le nostre esperienze non abbiamo potuto servirci dell'alanina, aminoacido molto costoso; abbiamo osservato che l'attività deidrogenante dell'isatina era ben manifesta anche con l'aminoacido più semplice, la glicocolla, di costo molto inferiore e che la casa Roche ha voluto gentilmente fornirci. Noi abbiamo dapprima controllato l'esperienza del Langenbeck con la sola differenza che abbiamo usato glicocolla al posto dell'alanina e corrente d'azoto invece di quella di CO_2. Si scioglievano $5 \cdot 10^{-4}$ moli d'isatina in 10 cc. d'acido acetico 50 % aggiungendo 0,5 gr. di glicocolla sciolti in 2, 8 cc. d'acqua bidistillata: la provetta era posta in un bagno a 70° ed infine si aggiungevano 5 cc. di una soluzione di bleu di metilene $n/1000$ previamente scaldata a 40°. La soluzione assumeva allora una colorazione bleu e l'attività deidrogenante si considerava avvenuta quando la soluzione da bleu, assumeva poscia, passando per il verde, una colorazione giallo–rossastra. Noi abbiamo ottenuto, lavorando in queste condizioni, un tempo di decolorazione di 12′–13′ affatto analogo a quello del Langenbeck. Per il proseguimento delle nostre esperienze, non disponendo di un bagno termostatico, che, sopratutto durante la stagione invernale, raggiungesse la temperatura di 70°, abbiamo preferito aumentare leggermente la concentrazione dell'isatina e diminuire la quantità di b.d.m. per poter provocare la reazione ad una temperatura inferiore.

Abbiamo allora eseguito le nostre esperienze in bagno termostatico a 50°, la quantità d'isatina sciolta in 10 cc. d'acido acetico puro in ogni cam-

pione essendo di 10^{-3} moli: si faceva passare una corrente d'azoto e l'esperienza aveva inizio quando s'introduceva nelle singole provette 1 cc. di b.d.m. *n*/1000.

Per l'irradiazione ci siamo serviti di un apparecchio Gorla, tubo A.E.G. 120 kV, 3 *m*A, 40 *r*/*m*, D. F. 30 cm., senza filtro, oppure di tubi di platino contenenti sale di radio, sospesi in *tandem* mediante un filo di seta nelle soluzioni contenute nelle provette.

Durante tutte le esperienze noi ci siamo serviti di provette in vetro neutro Murano, non contenente metalli ad alto numero atomico, come controllammo radiograficamente.

Sostanza irradiata	Modalità	Filtro (mm)	Dose	Decolorazione (min.)
isatina	radio	1 Pt.	7,225 mcd.	38
»	»	»	3,620 »	39
»	»	»	1,812 »	40
»	»	»	0,722 »	39
»	»	»	0,362 »	41
»	placca β terapia	0,2 Al	0,62 »	41
»	R. X.	—	2000 *r*	39
»	»	—	4800 »	39
»	»	—	6500 »	42
»	»	—	10000 »	41
glicocolla	»	—	4800 »	42
»	»	—	10000 »	41
»	placca β terapia	0,2 Al	2,48 mcd.	42
isat. + glicoc.	radio	1 Pt.	7,225 »	17

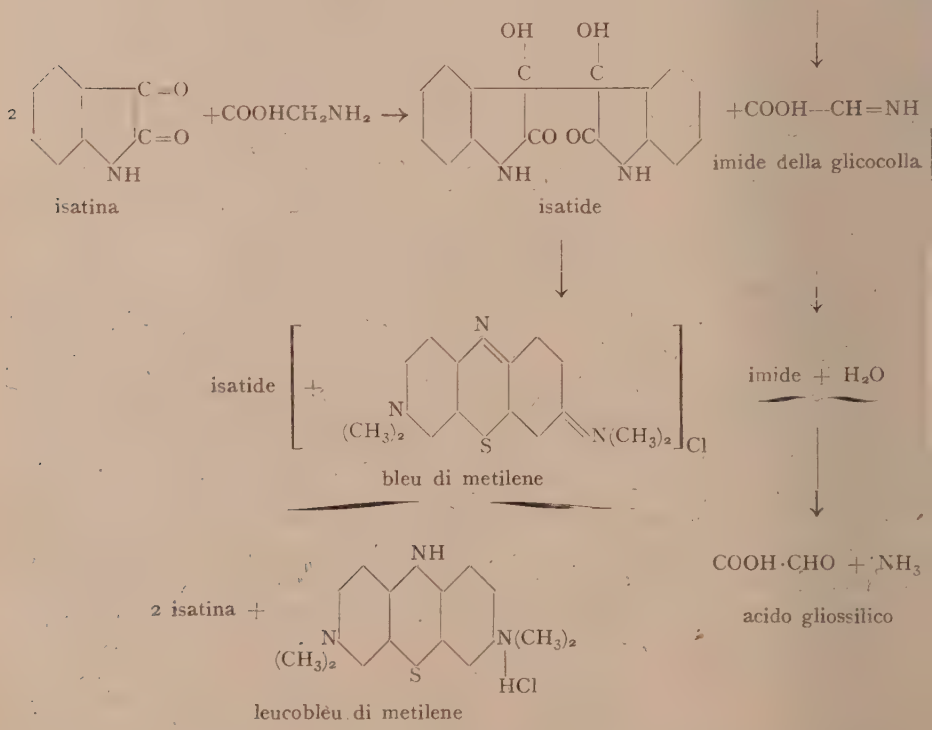
Ogni misura del tempo di decolorazione rappresenta la media di 3 determinazioni.

Come si può osservare, dopo aver riscontrato che l'irradiazione mediante radio o raggi X non modificava per nulla l'attività catalizzatrice dell'isatina, abbiamo provato ad irradiare glicocolla e isatina + glicocolla: soltanto in quest'ultimo esperimento abbiamo riscontrato una notevole accelerazione dell'attività deidrogenante: ma non poteva forse un tale fenomeno determinarsi dal contatto prolungato tra substrato e catalizzatore ? Abbiamo allora proceduto all'esperienza seguente: abbiamo lasciato in contatto substrato e catalizzatore durante tempi differenti e abbiamo poi misurato l'attività deidrogenante.

	Durata del contatto	Tempo di decolorazione
Provetta n. 1	10 h 30′	23 minuti
» n. 2	7 h 30′	24 »
» n. 3	5 h	28 »
» n. 4	2 h	34 »
» n. 5	0 h	43 »

Riportato graficamente, il fenomeno è rappresentato da un'iperbole (v. grafico n. 1).

Dalle esperienze sopra riportate possiamo affermare senz'altro che le radiazioni ionizzanti non modificano l'attività deidrogenante del catalizzatore organico isatina. Ora, le esperienze di ricercatori precedenti sopratutto di Fricke, Dale e Forssberg accertano che le azioni delle radiazioni su soluzioni sono indirette, risultanti cioè dall'eccitazione e ionizzazione delle molecole del solvente: noi ci sentiamo perciò autorizzati ad emettere l'ipotesi che le radiazioni esercitino una trascurabile azione ionizzante sull'acido acetico, solvente da noi impiegato. Inoltre ove pure avvenisse una ionizzazione dell'acido acetico dopo la nota espulsione di un elettrone, secondo la formula $CH_3COOH \rightarrow CH_3COO + H^+$ è possibile che l'ione H non possa esercitare un'azione efficace perchè il meccanismo della funzione deidrogenante dell'isatina comporta un doppio legame che potrebbe captare l'ione H e quindi neutralizzare la sua eventuale azione. Infatti, dal meccanismo prospettato dal Langenbeck usando come substrato l'alanina, noi possiamo così rappresentare il meccanismo con la glicocolla da noi studiata:



Per quanto riguarda il fenomeno da noi constatato dell'accelerazione dell'attività deidrogenante in funzione del tempo durante il quale glicocolla e isatina sono rimasti in contatto, noi crediamo che ciò sia dovuto al fatto che si tratta, per il sistema da noi studiato di reazione tra molecole organiche, ben diversa dalle reazioni istantanee, che avvengono tra ioni. A sostegno della nostra ipotesi, ricorderemo che la totalità delle reazioni organiche

avviene in un tempo determinato da leggi particolari, per esempio la reazione di un alcool con un alogenuro che solo formalmente è simile ad una reazione di neutralizzazione che procede invece istantanea (Karrer).

Azione dei Raggi X su soluzioni di bleu di Metilene. - Dopo aver dimostrato che i raggi X non modificavano l'attività deidrogenante del catalizzatore organico isatina e dopo aver tentato di fornire una congrua spiegazione di questo risultato, basandoci sulla teoria della ionizzazione e sul meccanismo biochimico del modello enzimatico stesso, abbiamo pensato che i raggi X, ionizzando le melecole d'acqua, avrebbero forse potuto ridurre

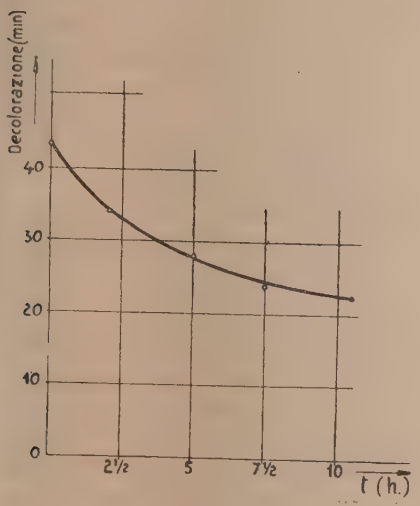


Grafico 1.

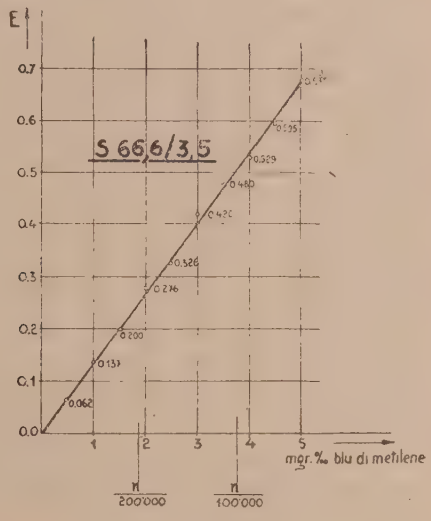


Grafico 2.

una soluzione di bleu di metilene. Sarebbesi allora raggiunta una prova decisiva dell'azione ionizzante delle radiazioni sul solvente.

Come ricorda il Rondoni, la riduzione del b.d.m., colore a struttura chinoide, consiste in una idrogenazione, nella quale dunque il colore è accettore; per esempio nella Nota reazione di Schardinger (aggiungendo formaldeide al latte fresco e quindi del bleu di metilene, questo è scolorato) si ha a fare con una ossidazione dell'aldeide ad acido e contemporanea riduzione del colore chinoide a leucobase idrochinoide. Il b.d.m. è stato largamente usato per dimostrare la funzione riducente (ossidabilità) dei tessuti animali e vegetali e dei batteri, espressione del contenuto in substrati ossidabili e deidrogenabili (donatori di H) e di enzimi (deidrogenasi) catalizzanti il trasporto di idrogeno da tali substrati all'accettore: per esempio con il metodo di Thunberg, che è una messa a punto di questa tecnica, uno di noi (v. bibliografia) ha potuto controllare la diminuzione in succino e malicodeidrogenasi dei tessuti tumorali.

Per studiare se i raggi X esercitasserò un'azione riducente su soluzioni di b. d. m. noi abbiamo costruito una curva di taratura, con lo spettro–fotometro di Pulfrich. Dopo varie misure coi diversi filtri, abbiamo scelto, come il più adatto, il filtro S. 66,6/3,5 (grafico n. 2).

Come si può osservare l'estinzione obbedisce alla legge di Lambert–Beer ed abbiamo calcolato tang. $\alpha = 1{,}339$.

Vorremmo ricordare a questo punto che è stata dimostrata una riduzione fotochimica del bleu di metilene da parte del latte (fenomeno del Viale), fenomeno, poi, studiato estesemente dal Lepri, il quale trovò che la sostanza attiva è presente nel siero di latte e secondo il Martini la sostanza termostabile, idrosolubile, che alla luce si ossida, mentre il b.d.m. si riduce, sarebbe il glutatione. Inoltre il Loiseleur, durante un esame approfondito degli stadi successivi di ossido–riduzione di soluzioni sottoposte all'azione dei raggi X, ha studiato pure le modificazioni del potenziale d'ossido–riduzione di soluzioni di b.d.m.: egli, che condusse le sue esperienze in atmosfera d'ossigeno, osservò una variazione del rH che, riportata graficamente, mostrava una curva ad S, di cui la prima fase corrisponderebbe all'attivazione preponderante dell'ossigeno, la seconda a quella dell'idrogeno.

Noi, al contrario, abbiamo eseguito le nostre esperienze in atmosfera d'azoto. Per ridurre al minimo l'utilizzazione degli apparecchi radiologici, noi abbiamo dapprima, in via d'orientamento, irradiato soluzione di b.d.m. con tubi di radio sospesi in tandem con filo di seta: ne riportammo l'impressione che la soluzione si decolorasse, ma non abbiamo potuto tuttavia eseguire misure esatte per evidenti difficoltà di tecnica (per esempio assorbimento del colorante dal filo di seta, difficoltà di mantenere l'atmosfera di azoto per varî giorni ecc.). Abbiamo irradiato allora, con le modalità stesse che per l'isatina, 10 cc. di soluzioni b. d. m. n/100.000 e n/200.000 in provetta in vetro neutro Murano non contenente, come sopra menzionammo, elementi ad alto numero atomico.

Poichè si ammette che 1000 r producono $1{,}61 \times 10^{15}$ paia d'ioni, applicando il numero d'Avogadro ($6{,}06 \times 10^{23}$), irradiando una soluzione n/100.000 caratterizzata da $E = 0{,}51$ che corrisponde, secondo la curva di taratura a mgr. 2,85 °/₀₀, noi abbiamo potuto procedere al calcolo del numero delle molecole ridotte:

Dose (r)	E	Mgr. ridotti °/₀₀	Mol. ridotte °/₀₀	Quoziente ionico (M/N)
1200	0,493	0,15	$2{,}44 \times 10^{17}$	0,126
3600	0,402	0,85	$1{,}38 \times 10^{18}$	0,238
6000	0,334	1,30	$2{,}105 \times 10^{18}$	0,219
8300	0,315	1,50	$2{,}44 \times 10^{18}$	0,182
10000	0,256	1,90	$3{,}09 \times 10^{18}$	0,192

Riportato graficamente il fenomeno presenta un andamento lineare (v. grafico n. 3). Per essere certi che la riduzione da noi osservata fosse una conseguenza propria del meccanismo d'ionizzazione dell'acqua noi abbiamo

irradiato una soluzione questa volta in alcool etilico $n/100000$ di b.d.m. con 10.000 r nelle condizioni sopra descritte: non constatammo allora alcuna azione riducente. Inoltre semplici campioni d'acqua irradiata con 10.000 r non mostrarono alcuna azione riducente su soluzioni di b.d.m.,ciò che è dovuto al fatto che i radicali formati in seguito all'irradiazione hanno durata brevissima.

Ci parve poi opportuno di esaminare se alcune sostanze aggiunte alle soluzioni acquose potessero determinare un'azione protettiva, come dalle esperienze di Forssberg sulla catalasi concludenti che tale azione è esercitata da sostanze non sature (per esempio acido fumarico e maleico) che reagiscono con i prodotti dell'acqua attivata.

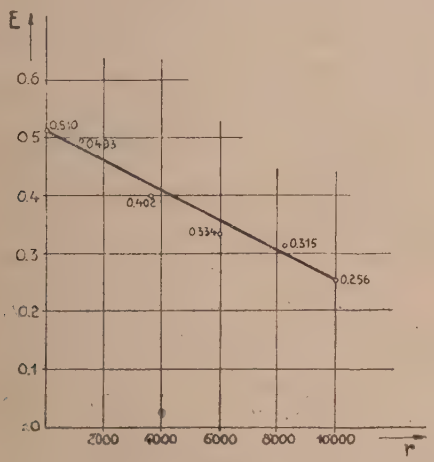


Grafico 3.

Tutte le soluzioni furono allora irradiate con 10.000 r: non abbiamo potuto studiare l'influenza dell'aggiunta di cisteina perchè questa sostanza di per sè è altamente riduttrice del b.d.m.: i risultati per le sostanze da noi controllate furono i seguenti (per brevità eliminiamo dalla presente stesura le varie fasi del calcolo):

Sostanza	Concentr. (mM)	Mol. ridotte × 10^{18}	Quoziente ionico (per paio d'ioni)
NaCl isotonico	1,45	2,44	0,1515
acido malonico	0,1	1,54	0,0960
cistina	0,1	0,975	0,0605
acido succinico	0,1	0,81	0,0505
NaCl ipertonico	14,5	0,65	0,0404
NaCl ipotonico	0,145	0,568	0,0353
gelatina 1 %	—	0,1625	0,011
acido fumarico	0,1	0	0

Come si può osservare, l'acido fumarico svolge un'azione perfettamente produttiva sulla riduzione del b.d.m., ma tale azione, se pure in grado minore determinano altresì sostanze sature come l'acido malonico e succinico: perciò possiamo concludere che il meccanismo di profezione dall'acqua attivata da parte di sostanze non sature, per esempio acido fumarico e maleico che reagirebbero con i prodotti dell'acqua ionizzata, non può essere trasferito alla reazione radio-chimica da noi studiata.

Bibliografia

H. Clark e J. H. Northrop, « J. gen. Physiol. », *9*, 87 (1926).

W. M. Dale, « J. Biochem. », *34*, 1367 e *36*, 80, 1940; « Brit. J. Radiol. », XVI, 171 (1943); « Nature », *151*, 280, 1943; « J. Physiol. », *102*, 50 (1943).

A. Forssberg, « Arkiv for Kemi, Mineralogi och Geologi », *21*, 1, 1945; « Acta Radiol. » *3*, 281, 1946; « Nature », *159*, 308 (1947).

H. Fricke e E. R. Brownscombe, « J. Am. Chem. Soc. », *55*, 2358 (1933).

H. Fricke e S. Morse, « Phil. Mag. », *7*, 129 (1929).

H. Fricke e B. W. Petersen, « Am. J. Roentgenol. », 17, 611 (1927).

E. Gallico, « Tumori », *3*, 199 (1947).

R. Glocker e O. Risse, « Z. Phys. », *48*, 845 (1928).

R. Harvard, « Brit. J. Radiol. », *8*, 787 (1935).

R. Hussey e W. R. Thompson, « J. gen. Physiol. », *5*, 647, (1923); *9*, 211 (1926).

P. Jordan, « Z. Physik », *39*, 345 (1938), « Naturwiss. », *26*, 537 (1938), « Biol. Zbl. », *59*, I (1939).

P. Karrer, *Trattato di chimica organica*, Sansoni, 1942.

W. Langenbeck, *Die Organischen Katalysatoren*, Springer, Berlin, 1935.

D. E. Lea, R. B. Haines, C. A. Coulson, « Proc. Roy, Soc. », London, *120*, 47 (1936).

Lepri, « Atti Soc. Toscana Sc. Natur. » (1926).

J. Loiseleur, « Bull. de la Soc. de Chimie Biol. », *25*, 21 (1943).

E. Martini, « Biochem. Zeit. », *260*, 153 (1933).

O. Risse, « Z. phys. Chem. », *140*, 133 (1929).

P. Rondoni, *Elementi di biochimica*, Utet, Torino (1945).

W. Seitz, « Radiologica », *2*, 4 (1938).

A. Strecker, « Liebigs Ann. », *123*, 363 (1862).

W. Traube, « Ber. », *44*, 3145 (1911).

G. Viale, « Arch. Sc. biol. », *1*, 259 (1920).

K. G. Zimmer, « Biol. Zbl. », *63*, 72 (1943).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica alla Classe la dolorosa notizia della morte, avvenuta il 24 dello scorso marzo, del Grande Ammiraglio Senatore PAOLO THAON DI REVEL, Socio Onorario dell'Accademia dal marzo 1919. Ricorda le sue altissime benemerenze patriottiche, la sua figura di soldato e di condottiero che rimarrà nella storia d'Italia a testimonianza dei sacrifici e degli eroismi della nostra Marina durante la prima guerra mondiale. Alla memoria del Duca del Mare il Presidente, rendendosi interprete dell'unanime sentimento dei Colleghi, invia il riverente saluto dell'Accademia dei Lincei che si onorò di averlo tra i suoi Soci Onorari.

Ma un'altra dolorosa notizia il Presidente deve dare alla Classe. Il gruppo dei Soci stranieri ha subìto nuovamente un grave lutto. ALFREDO LACROIX, Socio dell'Accademia dal 1908, è morto a Parigi il 16 marzo scorso. È una gravissima perdita per la mineralogia e la geologia, di cui il Lacroix era illustre cultore. Con le sue esplorazioni compiute in tutte le regioni del mondo egli ha scoperto e illustrato oltre ottanta nuove specie mineralogiche. Da trentaquattro anni occupava il posto di Secrétaire perpétuel dell'Accademia delle Scienze di Parigi e in tale ufficio aveva potuto dar prova delle sue eccezionali qualità amministrative e organizzative.

L'Accademia ha preso viva parte al lutto della consorella di Parigi e ha inviato al Presidente del sodalizio francese un messaggio in tal senso.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che la prossima seduta della Classe, fissata dal calendario accademico per sabato 8 maggio, deve intendersi rimandata al sabato successivo 15 maggio poichè l'8 maggio avrà luogo l'inaugurazione del 1° Parlamento della Repubblica Italiana.

Annuncia quindi imminente l'uscita del fascicolo di febbraio dei « Rendiconti » e assicura poi che la Presidenza sta curando con la massima sollecitudine che sia accelerato il ritmo di stampa dei « Rendiconti » stessi.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci Abetti, Segre, Boaga, Armellini, Brunelli, Signorini, Cotronei, Sergi, Krall, Lombardi (anche per il Socio Scarpa).

L'Accademico Segretario dà lettura dell'elenco delle Note pervenute all'Accademia.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Bonino G. B. e Mariani E. – Su un metodo grafico di calcolo dei coefficienti osmotici di soluzioni acquose concentrate di elettroliti forti.

Krall G. – Dinamica ed aerodinamica dei fili. Nota III – Problemi non lineari delle vibrazioni visibili ed acustiche.

Segre B. – Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota II.

Segre B. – Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota III.

Segre B. – Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota IV.

Sergi S. – I piegamenti della base nei paleantropi di Saccopastore e del Monte Circeo.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Andreotti A. – Questioni di equivalenza relative alle curve riducibili e ai punti base di un fascio di curve sopra una superficie algebrica. Nota I. (pres. dal Corrisp. B. Segre).

Andreotti A. – Questioni di equivalenza relative alle curve riducibili e ai punti base di un fascio di curve sopra una superficie algebrica. Nota II. (pres. dal Corrisp. B. Segre).

Barbieri G. A. – Nuovi composti complessi di rutenio e di osmio (pres. dal Socio G. B. Bonino).

D'Amato F. – Sull'attività colchicino-mitotica e su altri effetti citologici del 2,4-diclorofenossiacetato di sodio (pres. dal Socio A. Chiarugi).

Franchetta A. – Sulle involuzioni razionali appartenenti ad una superficie algebrica (pres. dal Socio G. Castelnuovo).

Fumi F. – Sulla natura dei legami interleptonici entro il complesso dei cristalli (pres. dal Corrisp. C. Perrier).

Ghizzetti A. – Sul prodotto di due variabili casuali gaussiane (pres. dal Socio M. Picone).

Giannuzzi M. A. – Orbita preliminare e parallasse di ζ Aquari (pres. dal Socio G. Armellini).

Manacorda T. – Vibrazioni forzate di un particolare sistema oscillante non lineare (pres. dal Corrisp. G. Sansone).

Pacella G. B. – Determinazioni gravimetriche in Etiopia (pres. dal Corrisp. G. Boaga).

Pompilj G. – Alcuni esempi di superficie algebriche a sistema canonico puro degenere (pres. dal Socio G. Castelnuovo).

Zwirner G. – Alcuni teoremi di geometria infinitesimale diretta relativi alle curve spaziali. Nota I (pres. dal Corrisp. R. Caccioppoli).

Zwirner G. – Alcuni teoremi di geometria infinitesimale diretta relativi alle curve spaziali. Nota II (pres. dal Corrisp. R. Caccioppoli).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario illustra le pubblicazioni pervenute in omaggio mettendo in particolare rilievo il volume « Fisica sperimentale » del Socio Amerio, uno studio del Socio Boaga su « Lo stato attuale della rete gravimetrica italiana », una Nota di F. Demichelis presentata dal Socio Perucca, pubblicata negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, due studi dei Soci Russo e Silvestri e alcuni lavori dei Soci stranieri Ross G. Harrison e Maurice Lugeon.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 10 gennaio 1948.

AMERIO Alessandro. — *Fisica sperimentale.* Vol. I. Meccanica – Acustica – Calore. 4ª ed. riveduta. Milano-Messina, Casa Ed. G. Principato, 1947. Pp. 608, con figg., in-8°.

ASTBURY W. T. — Vedi HARRISON ROSS G.

BOAGA Giovanni. — *Lo stato attuale della rete gravimetrica italiana.* Firenze, Istituto geografico militare, 1947. Pp. 65, in-4°. (Pubblicazioni della Commissione geodetica italiana. Memoria n. 4).

DEMICHELIS F. — *Come si comportano le pellicole metalliche sottili col tempo?* Estr. da « Atti della Accademia delle Scienze di Torino », voll. LXXXI-LXXXII, 1945-46, 1946-47.

HARRISON ROSS G., ASTBURY W. T. and RUDALL K. M. — *An attempt at an X-Ray analysis of embryonic processes.* Estr. da « Journal of experimental Zoology », vol. LXXXV, 1940, n. 3.

— *Cellular differentiation and internal environment.* Estr. da « Publications of the American Association for the advancement of Sciences », n. 14.

— *Facsimile of first announcement of the Journal of experimental Zoology.* Estr. da « Journal of experimental Zoology », Vol. C, 1945, n. 3.

— *National Research Council and its action in field of medical sciences.* Estr. da « Sixth annual scientific award Ceremony of the American pharmaceutical manufacturers Association », 1944.

— *Relations of symmetry in the developing embryo.* Estr. da « Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences », vol. XXXVI, 1945.

— *Sixth Pacific Science Congress.* Estr. da « Proceedings of the Sixth Pacific Science Congress », vol. I, 1940.

FANO Gino. — *Le trasformazioni di contatto birazionali del piano.* Estr. da « Commentarii mathematici Helvetici », vol. XX, 1947, fasc. 2.

— *Osservazioni varie sulle superficie regolari di genere zero e bigenere uno.* Estr. da « Revista de la Universidad Nacional de Tucumán », s. A, vol. IV, 1944, n. 1-2.

— *Su alcuni lavori di W. L. Edge.* Estr. da « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Sc. fisiche, mat. e nat., s. 8ª, vol. III, fasc. 3-4.

— *Sui cerchi ortogonali a due cerchi dati.* Estr. da « Revista de la Universidad Nacional de Tucumán », s. A, vol. II, 1941, n. 1-2.

LUGEON Maurice. — *A propos de la note de M. R. Barbier sur le problème de l'enracinement des Klippes de Savoie.* Estr. da « Bulletin de la Société géologique de France », s. 5ª, t. XVI, 1946.

— *A propos du prétendu métamorphisme du Trias autochtone Alpin.* Estr. da « Bulletin de la Société géologique de France », s. 5ª, t. XVI, 1946.

RUDALL K. M. — Vedi HARRISON ROSS G.

RUSSO Achille. — *Per la riattivazione delle nostre tonnare (la pesca luminosa e la cattura dei tonni)* (Nota preliminare). Estr. da « Bullettino delle sedute dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », s. 3ª, fasc. 22.

SILVESTRI Filippo. — *Descrizione di alcuni « Japyginae (Insecta Diplura) » del Nord America.* Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia agraria di Portici », vol. VIII, 1948.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 15 maggio 1948.

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria). — *Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche.* Nota II (*) del Corrisp. B. SEGRE.

7. Passiamo ora a considerare le forme F di dimensione dispari, per le quali stabiliremo il seguente teorema.

Gli spazi S_{n-1} *giacenti sulla forma cubica*

$$x_0^3 + x_1^3 + \cdots + x_{2n}^3 = 0 \qquad (n \geqq 2) \tag{19}$$

si distribuiscono in

$$\sigma_n = \binom{2n+1}{5} \rho_{n-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} (2n+1)(2n)\cdots(n-1)/5! \tag{20}$$

sistemi continui ∞^2 *distinti, permutati fra loro transitivamente dalle omografie che mutano in sè la* (19). *Più precisamente, gli* ∞^2 S_{n-1} *di ciascuno di quei sistemi ricoprono sei volte una* V_{n+1}^3, *coincidente colla* (19) *se* $n=2$ *e sezione della* (19) *con un opportuno* S_{n+2} *se* $n > 2$. *Uno di questi* S_{n+2} *può rappresentarsi colle equazioni*

$$x_{n+3} + \varepsilon_3 x_3 = x_{n+4} + \varepsilon_4 x_4 = \cdots = x_{2n} + \varepsilon_n x_n = 0, \tag{21}$$

dove le ε *sono radici cubiche dell'unità; la relativa sezione è il cono cubico determinato dalle* (21) *e dalla*

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_{n+1}^3 + x_{n+2}^3 = 0, \tag{22}$$

il quale ha per vertice l'S_{n-3}, *definito dalle* (21) *e dalle*

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_{n+1} = x_{n+2} = 0. \tag{23}$$

(*) Presentata nella seduta del 10 aprile 1948. - Continuazione della Nota I, apparsa in questo volume dei « Rendiconti », pp. 346-352.

Nell'S_{2n} in cui $(x_0, x_1, \cdots, x_{2n})$ sono coordinate omogenee di punto, ogni S_{n-1} può ottenersi ponendo $n+1$ legami lineari indipendenti fra le x. Disponendo di un'omografia trasformante in sè la (19) (n. 1), possiamo ridurci ad un S_{n-1} rappresentato da equazioni della forma

$$(24) \qquad \begin{gathered} x_0 = f_0(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad , \quad x_{n+1} = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \\ x_{2n} = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{gathered}$$

dove le f denotano forme lineari nei loro argomenti. Affinchè lo spazio (24) giaccia sulla (19) occorre e basta che risulti

$$(25) \qquad \begin{gathered} x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 \equiv \\ \equiv -[f_0^3(x_1, x_2, \cdots, x_n) + f_1^3(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + f_n^3(x_1, x_2, \cdots, x_n)] \end{gathered}$$

identicamente nelle $x_1, x_2, \cdots, x_n$; sicchè, in un S_{n-1} ove si assumano queste variabili quali coordinate omogenee di punto, le equazioni

$$(26) \qquad x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = 0$$

$$(27) \qquad f_0^3(x_1, x_2, \cdots, x_n) + f_1^3(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + f_n^3(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 0$$

rappresentano una medesima forma cubica. Da qui, con argomentazione simile a quella svolta nel n. 2, si deduce che le $n+1$ forme $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ non possono annullarsi simultaneamente per valori non tutti nulli dei loro argomenti; dunque fra esse intercede una ed una sola relazione lineare, che non è restrittivo supporre espressa dall'identità.

$$(28) \qquad f_0(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv c_1 f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + c_n f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

dove le c sono costanti, il che implica che le $f_1, \cdots, f_n$ siano fra loro linearmente indipendenti.

Esprimiamo ora che le hessiane delle forme (26), (27) coincidono. La prima di tali hessiane è

$$(29) \qquad x_1 x_2 \cdots x_n = 0,$$

eppertanto si spezza in n iperpiani indipendenti; lo stesso deve dunque valere per la seconda. Ora questa hessiana, tenuto conto della (28), può con facile calcolo venire rappresentata mediante l'equazione algebrica di grado n:

$$(30) \qquad f_0 f_1 \cdots f_n \left(\frac{1}{f_0} + \frac{c_1^2}{f_1} + \cdots + \frac{c_n^2}{f_n} \right) = 0.$$

Distinguiamo due casi, secondochè il numero delle costanti c non nulle non supera o supera il due.

8. Nel primo caso, disponendo di un'omografia trasformante in sè la (19), possiamo senza restrizione supporre

$$(31) \qquad c_3 = c_4 = \cdots = c_n = 0.$$

Allora la (30) si riduce alla

$$(32) \qquad f_3 f_4 \cdots f_n (f_1 f_2 + c_1^2 f_0 f_2 + c_2^2 f_0 f_1) = 0,$$

e l'espressione entro parentesi diventa una forma binaria quadratica nelle f_1, f_2 in virtù delle (28), (31). Il primo membro della (32) conseguentemente si spezza in n fattori lineari, identificando i quali ai fattori del primo membro della (29) si ottengono n identità riducibili alla forma

$$(33) \qquad x_1 \equiv \alpha f_1 + \beta f_2 \quad , \quad x_2 \equiv \gamma f_1 + \delta f_2 \quad , \quad f_3 \equiv -\varepsilon_3 x_3 , \cdots , f_n \equiv -\varepsilon_n x_n ,$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e le ε sono costanti. In forza delle (28), (31), (33), e tenuto conto di quanto si è detto dianzi relativamente alle $f_0, f_1, \cdots, f_n$, dev'essere $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, sicchè da quelle relazioni seguono identità del tipo

$$f_0 \equiv \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \quad , \quad f_1 \equiv \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 \quad , \quad f_2 \equiv \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 ,$$
$$f_3 \equiv -\varepsilon_3 x_3 , \cdots , f_n \equiv -\varepsilon_n x_n .$$

Sostituendo nella (25) si vede intanto che sussistono le

$$\varepsilon_3^3 = \varepsilon_4^3 = \cdots = \varepsilon_n^3 = 1 ,$$

talchè le ultime $n-2$ equazioni (24) si riducono precisamente alle (21); si ottiene inoltre l'identità

$$x_1^3 + x_2^3 + (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^3 + (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)^3 + (\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)^3 = 0 ,$$

la quale esprime che, nell'S_4 $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = x_{n+3} = x_{n+4} = \cdots = x_{2n} = 0$, le prime tre equazioni (24) rappresentano una retta situata sulla V_3^3 ivi definita dalla (22).

È noto che le rette di tale V_3^3 costituiscono un sistema algebrico i r r i d u c i b i l e ∞^{2} [11], e che per un punto generico di V_3^3 passano s e i di quelle rette [12]. Gli S_{n-1} (24) risultano le proiezioni delle rette di detto sistema dall'S_{n-3} rappresentato dalle (21), (23); essi dunque costituiscono un sistema continuo ∞^2 soddisfacente alle condizioni espresse nel teorema del n. 7. E si vede subito che il numero, σ_n, dei sistemi deducibili da quello mediante le varie trasformazioni omografiche che mutano in sè la (19) (n. 1), è precisamente dato dalla (20).

9. Per completare la dimostrazione del teorema enunciato nel n. 7, ci resta ancora da discutere la seconda fra le alternative indicate alla fine del n. 7, e provare ch'essa non può presentarsi. Incominciamo collo stabilire che *fra le costanti c che figurano nelle* (28), (30) *non ve ne possono essere più di tre non nulle.*

Infatti, supposto per assurdo che così non sia (ciò che implica $n \geq 4$), si abbia per fissare le idee

$$(34) \qquad c_1 c_2 c_3 c_4 \neq 0 .$$

(11) Ved. G. FANO, *Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni*, « Atti Acc. Sc. Torino », *39*, 597–613 (1903–04), n. 4.

(12) Cfr. C. SEGRE, *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario*, « Mem. Acc. Sc. Torino » (2), *39*, 3–48 (1889), n. 2.

Poichè, come già si è detto, le (29), (30) debbono coincidere, così l'iperpiano tangente alla (30) in un qualunque suo punto s e m p l i c e dev'essere una componente della (30) medesima, in quanto di tale proprietà gode la (29). In virtù della (34), esiste qualche punto in cui

$$f_1 = f_2 = 0 \quad , \quad f_3 f_4 \cdots f_n (c_3 f_3 + c_4 f_4 + \cdots + c_n f_n) \neq 0 ;$$

e si vede agevolmente che un punto siffatto giace sulla (30) ed è semplice per questa, il relativo iperpiano tangente essendo

$$c_2^2 f_1 + c_1^2 f_2 = 0 .$$

Con facile calcolo si verifica infine che, in forza delle (28), (34) e dell'indipendenza delle forme lineari $f_1, f_2, \cdots, f_n$, tale iperpiano non può far parte della (30). La contraddizione a cui così siamo giunti, prova l'asserto.

10. Dobbiamo da ultimo esaminare il caso in cui esattamente t r e delle suddette costanti c siano non nulle, ad esempio, per fisssare le idee,

$$c_1 c_2 c_3 \neq 0 \quad , \quad c_4 = \cdots = c_n = 0 .$$

Allora si vede mediante l'argomentazione del n. 9 che, affinchè in forza della (28) la forma (30) si spezzi in n fattori lineari, occorre e basta sia $c_1^3 = c_2^3 = c_3^3 = -1$; e ci si può ridurre ad avere $c_1 = c_2 = c_3 = -1$ disponendo di un'omografia opportuna trasformante in sè la (19), con che la (28) diventa

$$f_0 \equiv -(f_1 + f_2 + f_3) . \tag{35}$$

Così la (30) si riduce alla

$$(f_2 + f_3)(f_3 + f_1)(f_1 + f_2) f_4 \cdots f_n = 0 ;$$

onde, identificando quest'equazione alla (29), si ottengono relazioni della forma

$$x_1 \equiv \lambda_1 (f_2 + f_3) \quad , \quad x_2 \equiv \lambda_2 (f_3 + f_1) \quad , \quad x_3 \equiv \lambda_3 (f_1 + f_2), \quad x_4 \equiv \lambda_4 f_4 , \cdots , x_n = \lambda_n f_n , \tag{36}$$

dove le λ sono costanti non nulle. Ma è subito visto che le (35), (36) non possono rendere soddisfatta la (25): e tale impossibilità completa la dimostrazione del teorema n. 7.

11. È noto che la V_5^3 generale di S_6 contiene esattamente ∞^2 piani [13]; questi costituiscono dunque una V_4, la quale – in forza di un classico risultato di Severi [14] – risulta l'intersezione completa di V_5^3 con una forma del suo spazio. In base al n. 7, nel caso della V_5^3 rappresentata dalla (19) per $n = 3$ la suddetta V_4 si spezza nelle sezioni di V_5^3 con certi $\sigma_3 = 63$ iperpiani, ciascuna sezione dovendo essere contata sei volte. Ne consegue che:

(13) Cfr. B. Segre, *Intorno agli S_k che appartengono alle forme generali di dato ordine.* (Note I e II), questo volume dei «Rendiconti», pp. 261–265 e 341–346.

(14) F. Severi, *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli*, questi «Rendiconti» (5) *15*, 691–696 $(1906)_2$.

Gli ∞^2 piani giacenti sulla V_5^3 generale di S_6 costituiscono una V_4 covariante di ordine $2 \cdot 7 \cdot 3^4 = 1134$, intersezione completa di V_5^3 con una forma di ordine $6 \cdot 63 = 378$ del suo spazio.

12. Il teorema del n. 7 riduce lo studio dei vari sistemi di S_{n-1} giacenti sulla forma (19), a quello del sistema formato dalle rette della V_3^3 di S_4 rappresentata dalla (22). Una ricerca proiettiva su questa particolare V_5^3 è già stata da tempo compiuta dal Fano [15]; ed al Fano medesimo devesi pure un'indagine sul sistema delle rette appartenenti alla V_5^3 generale di S_4 pensato come ente algebrico ∞^2 [16]. Tuttavia le rette di quella particolare V_3^3 godono di ulteriori proprietà algebriche ed aritmetiche degne di nota, di cui ora passiamo ad occuparci.

Incominciamo dalle proprietà algebriche, che esporremo per forme cubiche di S_4 un po' più generali delle (22), e precisamente per quelle rappresentate – nelle variabili omogenee (x, y, z, u, v) – da un'equazione del tipo

$$\varphi(x, y, z) = u^3 + v^3, \tag{37}$$

dove la φ denota una forma cubica ternaria che non possa ridursi a dipendere da due soli argomenti, talchè sul piano $u = v = 0$ la $\varphi(x, y, z) = 0$ rappresenterà una curva $\mathcal{C}$ del terzo ordine priva di punti tripli. Allora la (37) definisce in S_4 una forma cubica priva di punti tripli, e dotata al più di tre punti doppi, la quale dunque contiene ∞^2 rette formanti un unico sistema algebrico irriducibile [17]. Proveremo che:

Le rette della (37) possono rappresentarsi coi punti di un piano 18-plo, avente come curva di diramazione una curva, $\mathfrak{D}$, duale della $\mathcal{C}$. Tale piano 18 plo equivale ad una superficie tripla ciclica, definibile sul piano 6-plo ciclico del 6° ordine che ha la $\mathfrak{D}$ come curva di diramazione.

Incominciamo coll'osservare che, nell'S_4 in cui (x, y, z, u, v) sono coordinate omogenee di punto, la retta r di equazioni $x = y = z = 0$ sega la V_3^3 (37) in tre punti distinti, diciamoli P_1, P_2, P_3; per ciascuno di questi punti escono ∞^2 rette giacenti su V_3^3, e costituenti il cono cubico che dal punto medesimo proietta la $\mathcal{C}$. Un iperpiano di S_4 passante per r sega V_3^3 secondo una superficie cubica priva di punti doppi se, e soltanto se, esso non tocca $\mathcal{C}$. Detto iperpiano contiene allora $3 \cdot 3 = 9$ rette distinte di V_3^3 appoggiate alla r, e $27 - 9 = 18$ rette ulteriori distinte fra loro e dalle precedenti [18]. Una retta generica giacente su V_3^3 appartiene ad uno e soltanto un gruppo siffatto di 18 rette, e la totalità di questi gruppi risulta riferita omaloidicamente alla stella formata dagli ∞^2 iperpiani di S_4

(15) G. FANO, *Sopra una varietà cubica particolare dello spazio a quattro dimensioni*, « Rendic. Istit. Lombardo » (2), *37*, 554-566 (1904).

(16) G. FANO, *Sul sistema ∞^2 di rette contenuto in una varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni*, « Atti Acc. Sc. Torino », *39*, 778-792 (1903-04).

(17) La superficie cubica dianzi considerata rientra nella classe delle superficie biassiali, per lo studio delle quali cfr. B. SEGRE, *The biaxial surfaces, and the equivalence of binary forms*, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », *41*, 187-209 (1945).

passanti per r. Ciò fornisce appunto la rappresentazione del sistema delle rette giacenti su V_3^3 sopra un piano 18–plo. Gli elementi di diramazione provengono dagli iperpiani di quella stella che toccano $\mathcal{C}$; si vede più precisamente senza difficoltà che, in corrispondenza ad un iperpiano per r che abbia colla $\mathcal{C}$ incontro bipunto in un punto P, le 18 rette suddette si riducono alle PP_1, PP_2, PP_3 contate sei volte. Pertanto su quel piano 18–plo la curva $\mathcal{D}$ di diramazione risulta duale della $\mathcal{C}$, e va presa con molteplicità $3(6-1)=15$.

I risultati anzidetti possono confermarsi ed approfondirsi analiticamente nel modo seguente. Un iperpiano di S_4 passante per r si rappresenta con un'equazione della forma

$$z = \xi x + \eta y, \tag{38}$$

dove ξ ed η sono due parametri che possono assumersi come coordinate non omogenee dell'iperpiano nella stella di asse r. Posto per abbreviare

$$\varphi(x, y, \xi x + \eta y) \equiv \psi(x, y) \equiv ax^3 + 3bx^2 y + 3cxy^2 + dy^3, \tag{39}$$

talchè a, b, c, d risultano polinomi di terzo grado in ξ, η, si consideri il discriminante

$$D = a^2 d^2 + 4ac^3 - 6abcd + 4db^3 - 3b^2 c^2$$

della $\psi(x, y)$; allora è chiaro che l'equazione non omogenea

$$D(\xi, \eta) = 0$$

non è che l'equazione tangenziale di $\mathcal{C}$ [18]. In virtù delle (37)–(39) e di risultati noti sulle forme binarie [19], se $D \neq 0$ le 18 rette relative all'iperpiano (38) si determinano in S_4 mediante le equazioni (38) e

$$\begin{cases} ax^3 + 3bx^2 y + 3cxy^2 + dy^3 = u^3 + v^3 \\ (ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2 = \delta^2 uv, \end{cases} \tag{40}$$

ove si assuma

$$\delta = \sqrt[6]{D}; \tag{41}$$

più precisamente, per ognuna delle tre determinazioni di $\delta^2 = \sqrt[3]{D}$, le (38), (40) rappresentano complessivamente sei di quelle rette. Per separare queste sei rette basta in generale trovare i punti ov'esse incontrano lo spazio $y = 0$; a tal uopo, eliminando v fra le (40) dopo aver posto in esse $x = 1$, $y = 0$ ed osservato che ora risulta $\delta \neq 0$, otteniamo l'equazione di 6° grado in u:

$$\delta^6 u^6 - a\delta^6 u^3 + (ac - b^2)^3 = 0,$$

(18) Il grado di quest'equazione vale apparentemente 12, ma in realtà esso riducesi a 6.

(19) Cfr. B. SEGRE, *loc. cit.* in [16], § 16.

la quale fornisce

$$u^3 = \frac{a\delta^3 \pm (a^2 d - 3abc + 2b^3)}{2\delta^3}.$$

Notiamo che in quest'ultima equazione si può fissare senza restrizione il segno superiore, in quanto l'altra scelta si riduce alla suddetta col cambiare δ in $-\delta$, ciò che equivale semplicemente a mutare la determinazione di δ fornita dalla (41). Quelle 18 rette possono dunque ottenersi razionalmente dopo aver successivamente estratte la radice sesta (41) e la radice cubica

$$2u\delta = \sqrt[3]{4\,(a\delta^3 + a^2 d - 3abc + 2b^3)},$$

ciò che prova l'asserto.

Meccanica. — *Saggio di impostazione generale del problema delle deformazioni viscose.* Nota (*) del Socio G. COLONNETTI.

Consideriamo un solido elastico soggetto ad un dato sistema di forze esterne e ad un dato sistema di deformazioni impresse, ed immaginiamo che, sotto l'azione delle tensioni interne che caratterizzano il suo stato di equilibrio, il materiale presenti fenomeni viscosi; immaginiamo cioè che si verifichino nel solido delle deformazioni non elastiche lentamente crescenti col tempo.

Noi converremo qui di contrassegnare con un apice t gli incrementi che le componenti di tensione e di deformazione subiscono nell'intervallo di tempo compreso fra un istante o (che assumeremo come origine dei tempi) e l'istante generico t.

Dette perciò

$$\sigma_x \;,\; \sigma_y, \cdots, \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_x \;,\; \varepsilon_y, \cdots, \gamma_{xy}$$

$$\bar{\varepsilon}_x \;,\; \bar{\varepsilon}_y, \cdots, \bar{\gamma}_{xy}$$

rispettivamente le sei componenti speciali di tensione, le sei componenti della deformazione elastica e le sei componenti della deformazione impressa, che caratterizzano lo stato di equilibrio all'origine dei tempi, noi indicheremo con

$$\sigma_x + \sigma_x^t \;,\; \sigma_y + \sigma_y^t, \cdots, \tau_{xy} + \tau_{xy}^t$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_x^t \;,\; \varepsilon_y + \varepsilon_y^t, \cdots, \gamma_{xy} + \gamma_{xy}^t$$

$$\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_x^t \;,\; \bar{\varepsilon}_y + \bar{\varepsilon}_y^t, \cdots, \bar{\gamma}_{xy} + \bar{\gamma}_{xy}^t$$

i valori che alle stesse componenti rispettivamente competeranno nell'istante generico t.

(*) Presentata nella seduta del 15 maggio 1948.

Ciò posto è noto che le tensioni interne che caratterizzano lo stato di equilibrio iniziale sono quelle che rendono minima l'espressione

$$\int_v \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \cdots \tau_{xy})\, dV + \int_v (\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \cdots + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy})\, dV$$

per rapporto a tutti i valori che l'espressione stessa può assumere compatibilmente colla deformazione impressa e colle forze esterne date; per il che occorre e basta che sia soddisfatta l'equazione

$$(1) \qquad \int_v [(\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x)\, \delta\sigma_x + (\varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y)\, \delta\sigma_y + \cdots + (\gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy})\, \delta\tau_{xy}]\, dV = 0$$

per tutti i sistemi di variazioni piccolissime

$$\delta\sigma_x \quad , \quad \delta\sigma_y, \cdots \delta\tau_{xy}$$

in equilibrio per forze esterne tutte nulle.

Non diversamente le tensioni interne che caratterizzeranno lo stato di equilibrio all'istante t saranno quelle che soddisfano all'equazione

$$(2) \qquad \int_v [(\varepsilon_x + \varepsilon'_x + \bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}'_x)\, \delta\sigma_y + \cdots + (\gamma_{xy} + \gamma'_{xy} + \bar{\gamma}_{xy} + \bar{\gamma}'_{xy})\, \delta\tau_{xy}]\, dV = 0 .$$

Per differenza si ha subito:

$$(3) \qquad \int_v [(\varepsilon'_x + \bar{\varepsilon}'_x)\, \delta\sigma_x + (\varepsilon'_y + \bar{\varepsilon}'_y)\, \delta\sigma_y + \cdots + (\gamma'_{xy} + \bar{\gamma}'_{xy})\, \delta\tau_{xy}]\, dV = 0$$

Questa equazione, che definisce la variazione di stato dovuta all'intervento dei fenomeni viscosi, non differisce dalla (1) se non perchè al posto delle deformazioni impresse e delle deformazioni elastiche iniziali si trovano gli incrementi che esse subiscono nell'intervallo di tempo t.

Essa rappresenta perciò, nella teoria delle deformazioni viscose, quel che la (1) rappresenta nella teoria delle deformazioni plastiche.

È interessante constatare che, pur nella sua assoluta generalità, questa impostazione del problema permette già di dare una risposta precisa a due quesiti e di inquadrare in modo definitivo due classi di casi particolari di cui non tarderemo a riconoscere la fondamentale importanza.

Ci si può infatti chiedere, in primo luogo, **se un sistema di deformazioni viscose possa darsi nel quale tutte le tensioni interne, e quindi anche le deformazioni elastiche, restino immutate**; se cioè possa accadere che si abbia ovunque

$$\varepsilon'_x = \varepsilon'_y = \cdots = \gamma'_{xy} = 0$$

Ora in questa ipotesi la (3) assumerebbe la forma

$$\int_v [\bar{\varepsilon}'_x\, \delta\sigma_x + \bar{\varepsilon}'_y\, \delta\sigma_y + \cdots + \bar{\gamma}'_{xy}\, \delta\tau_{xy}]\, dV = 0$$

la quale esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema delle deformazioni viscose sia congruente.

Se il corpo è omogeneo e le deformazioni viscose si suppongono proporzionali alle tensioni interne ed alle conseguenti deformazioni elastiche, quel sistema potrà riuscir congruente solo se tale è già il sistema delle deformazioni elastiche, se cioè lo stato iniziale di equilibrio è esente da coazioni.

In caso contrario si può senz'altro affermare che ogni intervento di fenomeni viscosi implica, generalmente parlando, una alterazione dello stato di tensione.

Ci si può, per contro, chiedere **se un sistema di deformazioni viscose possa darsi nel quale resti invece invariato lo stato di deformazione totale, nel quale cioè non si verifichi mutamento alcuno di forma o di dimensioni del solido.**

Ciò equivale evidentemente ad imporre che si abbia ovunque

$$\varepsilon'_x + \bar{\varepsilon}'_x = \varepsilon'_y + \bar{\varepsilon}'_y = \cdots = \gamma'_{xy} + \bar{\gamma}'_{xy} = 0$$

con che la (3) resta identicamente verificata.

Ma perchè il nuovo stato che si viene così a definire sia ancora uno stato di equilibrio, occorre notoriamente che al sistema delle

$$\varepsilon'_x = -\varepsilon'_x \quad , \quad \varepsilon'_y = -\varepsilon'_y \cdots \gamma'_{xy} = -\bar{\gamma}'_{xy}$$

corrisponda un sistema di

$$\sigma'_x \quad , \quad \sigma'_y \cdots \tau'_{xy}$$

in equilibrio per forze esterne tutte nulle.

Nel solito caso particolare del solido omogeneo in cui le deformazioni viscose sono proporzionali alle tensioni interne, la eventualità prospettata potrà verificarsi solo se anche il sistema delle tensioni

$$\sigma_x \quad , \quad \sigma_y , \cdots , \tau_{xy}$$

è in equilibrio per forze esterne tutte nulle; se cioè lo stato iniziale di equilibrio è uno stato di coazione in assenza di forze esterne.

In ogni altro caso, se cioè il solido è soggetto all'azione di un qualsiasi sistema di forze esterne non tutte nulle, l'intervento di fenomeni viscosi implica, generalmente parlando, un cambiamento di forma o di dimensioni del solido.

Ritorniamo ora al caso generale definito dalla (3), ed osserviamo che nulla ci vieta di considerare la deformazione viscosa di componenti

$$\varepsilon'_x \quad , \quad \varepsilon'_y , \cdots , \bar{\gamma}'_{xy}$$

come risultante dalla sovrapposizione di due deformazioni viscose, l'una di componenti rispettivamente eguali a

$$\bar{\varepsilon}' + \varepsilon'_x \quad , \quad \bar{\varepsilon}'_y + \varepsilon'_y , \cdots , \bar{\gamma}'_{xy} + \gamma'_{xy}$$

e l'altra di componenti rispettivamente eguali a

$$-\varepsilon'_x \quad , \quad -\varepsilon'_y \cdots -\gamma'_{xy}$$

Della prima – se teniamo presente la (3) – possiamo senz'altro dire che è di per se stessa congruente, che cioè non implica deformazioni elastiche ulteriori; essa non darà quindi luogo a variazione alcuna dello stato di tensione.

Quanto alla seconda, è chiaro che, le sue componenti essendo ovunque eguali e contrarie alle componenti

$$\varepsilon'_x \ , \ \varepsilon'_y , \cdots , \gamma'_{xy}$$

della deformazione elastica, la (3) risulterà verificata identicamente; e non ne deriverà variazione alcuna di forma o di dimensioni del solido.

Se ne conclude che **una qualunque deformazione viscosa può sempre ottenersi per semplice sovrapposizione di due deformazioni viscose particolari, nell'una delle quali resta immutato lo stato di tensione, mentre nell'altra restano immutate la forma e le dimensioni del solido.**

La conoscenza della prima di queste due deformazioni viscose particolari può esser sufficiente allorquando si abbia soltanto per iscopo la determinazione delle variazioni di forma o di dimensioni del solido; mentre basta fermar l'attenzione sulla seconda quando ci si propone soltanto lo studio delle variazioni dello stato di tensione.

Naturalmente resta a vedersi se, e in quali casi particolari, la identificazione di queste due deformazioni viscose componenti è preventivamente effettuabile.

Se il solido è omogeneo, e le deformazioni viscose sono proporzionali alle tensioni, tutto si riduce al tradizionale principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio, in virtù del quale si possono studiare separatamente gli effetti delle forze esterne e quelli delle deformazioni impresse.

Allora, nel calcolo delle variazioni di forma e di dimensioni basterà partire dalla considerazione dello stato di tensione determinato dall'azione delle forze esterne, prescindendo dalla eventuale esistenza di stati di coazione dovuti a deformazioni impresse; nel calcolo delle variazioni delle tensioni ci si potrà invece limitare alla considerazione del solo stato di coazione iniziale, prescindendo completamente dalla esistenza di stati di tensione dovuti all'azione di forze esterne.

Ma le deformazioni viscose, in quanto proporzionali alle tensioni, sono necessariamente anche proporzionali alle deformazioni elastiche che quelle tensioni hanno precedentemente determinate ed a cui esse si vengono a sovrapporre.

In quella pertanto delle due deformazioni viscose componenti che dipende dall'azione delle forze esterne (e che non implica intervento di deformazioni elastiche ulteriori) le deformazioni viscose si concreteranno in un incremento proporzionale delle deformazioni elastiche.

Nell'altra, che dipende dall'esistenza di uno stato di coazione iniziale (e che non può realizzarsi senza l'intervento di deformazioni elastiche ulteriori) le

deformazioni viscose, dovendo essere accompagnate da deformazioni elastiche eguali in valore e di segno contrario, daranno origine ad un decremento proporzionale delle tensioni.

In linea assolutamente generale si può affermare che – se il solido è omogeneo e le deformazioni viscose sono proporzionali alle tensioni – il fenomeno viscoso si rende manifesto, nell'ordine geometrico, con un incremento proporzionale delle deformazioni dovute all'azione delle forze esterne; nell'ordine statico, con un decremento pure proporzionale delle tensioni proprie dello stato di coazione iniziale.

Matematica (Teoria degli aggregati). — *Sur un problème de M. N. Lusin.* Nota (*) del Socio W. SIERPIŃSKI.

Dans sa Note *Sur les parties de la suite naturelle* parue (en russe) dans les « Izwiestja » de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S. (1) M. Nicolas Lusin appelle *mutuellement orthogonaux*, deux ensembles de nombres naturels qui ont un nombre fini (ou nul) d'éléments communs. Il appelle deux familles F et G d'ensembles de nombres naturels *mutuellement orthogonales*, si chaque ensemble de la famille F est orthogonal à chaque ensemble de la famille G. Il appelle deux familles F et G d'ensembles de nombres naturels *séparables*, s'il existe deux ensembles disjoints de nombres naturels M et N, tels que pour $E \in F$ et $H \in G$ les ensembles $E - M$ et $H - N$ sont finis (ou vides).

M. Lusin pose (loc. cit., p. 406) le problème suivant: *Peut-on donner un exemple de deux familles mutuellement orthogonales d'ensembles de nombres naturels, non séparables, dont une est dénombrable et l'autre de puissance aleph-un?*.

Le but de cette Note est de démontrer que *la réponse au problème de M. Lusin est positive si l'on admet l'hypothèse du continu.*

Il suffira évidemment de définir deux familles mutuellement orthogonales d'ensembles de nombres naturels, non séparables, dont une est dénombrable, et l'autre de puissance du continu.

Posons, pour $k = 1, 2, \cdots$

$$E_k = \{2^{k-1}, 3.2^{k-1}, 5.2^{k-1}, \cdots\} \tag{1}$$

et $F = \{E_1, E_2, \cdots\}$, et soit G la famille de tous les ensembles

$$H = \{2n_1 - 1, 2(2n_2 - 1), 2^2(2n_3 - 1), \cdots\}, \tag{2}$$

où $n_1, n_2, \cdots$ est une suite infinie quelconque de nombres naturels.

D'après (1) et (2) on a évidemment, pour

$$k = 1, 2, \cdots: E_k H = \{2^{k-1}(2n_k - 1)\},$$

(*) Presentata nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) Tome II, 1947, pp. 403-410.

donc $\overline{\overline{E_k}\,\overline{H}} = 1$ pour $H \in G$, ce qui prouve que les familles F et G sont mutuellement orthogonales.

Admettons maintenant que les familles F et G sont séparables. Il existe donc deux ensembles M et N de nombres naturels, tels que $M\,N = 0$ et que, pour $E \in F$, $H \in G$, les ensembles $E - M$ et $H - N$ sont finis (ou vides).

Soit k un nombre naturel. Comme $E_k \in F$, l'ensemble $E_k - M$ est fini, et, l'ensemble E_k étant infini, on a $E_k\,M \neq 0$. D'après (1) nous concluons donc qu'il existe un nombre naturel m_k tel que $2^{k-1}(2\,m_k - 1) \in M$. Ceci étant vrai pour $k = 1, 2, \cdots$, on a donc

$$K = \{2\,m_1 - 1, 2(2\,m_2 - 1), 2^2(2\,m_3 - 1), \cdots\} \subset M,$$

et d'autre part, vu la définition de la famille G, on a $K \in G$, ce qui prouve que l'ensemble $K - N$ est fini, donc l'ensemble $K\,N$ est infini. Vu que $K \subset M$, nous concluons donc que $M\,N \neq 0$, contrairement à l'hypothèse.

L'hypothèse que les familles F et G sont séparables implique donc une contradiction.

Les familles F et G présentent donc l'exemple désiré.

Chimica generale. — *Su un metodo grafico di calcolo dei coefficienti osmotici di soluzioni acquose concentrate di elettroliti forti*(*). Nota di G. B. Bonino e E. Mariani, presentata(**) dal Socio G. B. Bonino.

Il calcolo degli abbassamenti crioscopici, innalzamenti ebullioscopici, pressioni osmotiche, abbassamenti della tensione di vapore, per soluzioni « reali » si riallaccia al calcolo dei coefficienti osmotici, ovverossia al calcolo dei coefficienti di attività del solvente nelle stesse soluzioni. In precedenti lavori (1) abbiamo sviluppato i particolari di questo calcolo che, nelle sue linee termodinamiche, è egregiamente trattato anche in libri di uso comune quale per esempio quello del Falkenhagen (2).

In questa Nota ci limiteremo perciò ad esporre brevemente alcune considerazioni che possono facilitare il calcolo di detti coefficienti osmotici in soluzione concentrata di elettroliti forti, sulla base di risultati da noi riassunti in precedenti lavori (3).

Ricordiamo (1) che l'equazione fondamentale termodinamica che descrive l'equilibrio in un sistema bifasico costituito da una soluzione in equilibrio con una seconda fase rappresentata dal solvente puro (sia allo stato di vapore

(*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica Fisica ed Idrologica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) Vedi per esempio G. B. Bonino e M. Rolla, « Mem. Acc. Ital. », IV, n. 15 (1933).

(2) Vedi per esempio l'edizione francese H. Falkenhagen, *Electrolytes*, Paris, 1934.

(3) G. B. Bonino, « Gazz. Chim. Ital. », aprile 1948; G. B. Bonino e E. Mariani, « Rend. Acc. Lincei », VIII, vol. III, p. 442 (1947).

che allo stato solido o allo stato liquido, come nel caso dell'equilibrio osmotico) è data da

$$(1) \qquad \frac{1}{R}[\omega' - \omega_0] = -\ln \gamma_0 f_0$$

dove ω' è il potenziale termodinamico molecolare di Planck del solvente nella fase pura e ω_0 il rispettivo potenziale molecolare del solvente nella soluzione, γ_0 la concentrazione termodinamica del solvente e f_0 il suo coefficiente di attività nella soluzione.

In pratica γ_0 si conosce dalla composizione della soluzione; resta perciò da valutare il coefficiente di attività del solvente f_0.

La termodinamica ricollega il coefficiente di attività del solvente f_0 ai « lavori interionici » y_i necessari per portare ciascuna delle particelle (molecole o ioni) dei soluti per via isoterma e reversibile dalla soluzione « reale » considerata ad una soluzione « ideale ». In funzione di questa grandezza termodinamica il coefficiente di attività del solvente è dato [4] dalla relazione seguente:

$$(2) \qquad \ln f_0 = \frac{1}{kT} \sum_1^s N_j \frac{\partial y_j}{\partial N_0} .$$

Nel caso di una soluzione di elettroliti forti gli N_j sono i numeri di ioni della specie j e N_0 il numero di molecole del solvente presenti in soluzione. La sommatoria è estesa e limitata a tutti gli s tipi di ioni disciolti.

Si passa al coefficiente osmotico φ_0 attraverso alla posizione:

$$-\ln \gamma_0 f_0 = \varphi_0 \sum_1^s \gamma_j .$$

L'introduzione del coefficiente osmotico φ_0 ci permette di esprimere le relazioni che ci interessano in funzione delle concentrazioni degli ioni disciolti anzichè in funzione della concentrazione del solvente.

La teoria di Debye–Hückel per soluzioni reali non diluite calcola le grandezze y_j attraverso alla espressione seguente:

$$(3) \qquad y_j = \frac{e^2 \chi_j^2}{D a_j} \left[\frac{1}{x_j} - \frac{1}{x_j^2} \ln (1 + x_j) \right]$$

dove e ci rappresenta la carica dell'elettrone, D la costante dielettrica del mezzo, χ_j la valenza e a_j il « raggio ionico di Debye » dello ione j [5], e:

$$(4) \qquad x_j = a_j \chi_0 = a_j \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{D_0 kT}} \cdot 10^{-3/2} \sqrt{\Gamma}$$

dove D_0 è la costante dielettrica del solvente puro, e χ_0 rappresenta il cosiddetto « spessore medio » dell'atmosfera ionica di Debye [5], N il numero di

(4) Vedi rifer. (1), p. 469, eq. (9).

(5) Vedi per esempio G. B. Bonino, « Mem. Acc. Ital. », vol. IV, n. 13 (1933).

Avogadro e $\Gamma = \Sigma c_i \zeta_i^2$ la forza ionica della soluzione (c_i = concentrazione mol/litro). Debye e Hückel risolvono il calcolo delle derivate $\frac{\partial y_j}{\partial N_0}$ per il caso di soluzioni abbastanza diluite e per le quali ci si può ritenere autorizzati a porre la costante dielettrica D della soluzione come uguale a quella D_0 del solvente puro.

Essi giungono così alle note relazioni per f_0 [6]. Ma per soluzioni più concentrate, come abbiamo avuto modo di discutere in precedenti lavori [5], occorre sostituire nei calcoli originari di Debye–Hückel la costante dielettrica del solvente con una « costante dielettrica della soluzione ».

La precisazione di questa grandezza ha costituito l'argomento di un noto lavoro di Hückel [6] ed ha attirato l'attenzione di altri AA. che si sono occupati della teoria moderna delle soluzioni di elettroliti forti [3].

In un nostro precedente lavoro [3] abbiamo ripreso questo problema proponendo per il calcolo di D una relazione esponenziale:

$$D = D_0 e^{-\mu} \tag{5}$$

dove

$$\mu = \frac{1}{D_0}\left[\bar{\eta} \sum_1^s \xi_i (a_i \chi_0)^{s/2}\right] \tag{6}$$

con $\bar{\eta}$ costante caratteristica, $\xi_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + \cdots}$ (estesa alle particelle dei soluti, escluso il solvente). Si dovrà allora porre per y_j la relazione:

$$y_j = \frac{e^2 \zeta_j^2}{D_0 a_j e^{-\mu}}\left[\frac{\sqrt{e^{-\mu}}}{x_j^0} - \frac{e^{-\mu}}{x_j^{02}} \ln\left(1 + x_j^0 \sqrt{e^{\mu}}\right)\right] \tag{7}$$

essendo: $x_j^0 = a_j \chi_0$ calcolato con $D = D_0$.

Il calcolo analitico delle derivate degli y_j rispetto ai numeri di molecole del solvente N_0 è stato fatto nell'approssimazione scelta dai lavori di Hückel utilizzando uno sviluppo in serie che, se pur facilita i calcoli, non fornisce per soluzioni concentrate garanzie sufficienti di rapida convergenza. Il metodo può perciò diventare illusorio specie per determinati elettroliti.

Di ciò uno di noi si era già accorto in un lavoro critico del 1933 sulla teoria di Hückel [nota [5] p. 440]. In tale lavoro, anzi, si prospettava la eventualità di giungere rapidamente per via grafica alle derivate delle y_j, eliminando completamente le approssimazioni analitiche proposte da Hückel. L'interesse che poteva avere il rendersi conto della consistenza di un tentativo del genere, specie dopo le modifiche portate alla teoria in un nostro recente lavoro [3], ci ha persuasi ad occuparci della cosa, in attesa di studiare la risoluzione analitica.

Le curve che rappresentano graficamente le y_j in funzione della concentrazione termodinamica del solvente γ_0, si possono derivare grafica-

(6) Vedi per esempio HÜCKEL, « Phys. Zeits. », XXVI, p. 115 (eq. 90/*a*) (1925).

mente entro ragionevoli limiti di approssimazione ai fini pratici del calcolo presente.

Abbiamo perciò tentato di ottenere da queste curve $y_j = f(\gamma_o)$ i valori delle derivate $\partial y / \partial N_o$ o meglio delle derivate $\partial \Sigma_\alpha y / \partial \gamma_o$ sottoponendo alla derivazione grafica anzichè le curve dei singoli y la curva che ci rappresenta una opportuna combinazione lineare $\Sigma_\alpha y$ imposta dai rapporti stechiometrici) dei lavori interionici come fra poco chiariremo.

È facile vedere come si possano utilizzare i valori di queste derivate per i calcoli dei coefficienti di attività del solvente.

Si indichi con $N_t = N_o + N_1 + N_2 + \cdots$ il numero totale delle particelle (ioni disciolti e molecole di solvente) presenti nella soluzione considerata, N_j il numero degli ioni della specie j e con N_o il numero di molecole di solvente all'equilibrio.

Ricordando che $\frac{N_j}{N_t} = \gamma_j$ e che $\frac{N_o}{N_t} = \gamma_o$ si ha immediatamente:

$$\sum_1^s N_j \frac{\partial y_j}{\partial N_o} = \sum_1^s \gamma\, N_j \frac{\partial y_j}{\partial \gamma_o} \frac{\partial \gamma_o}{\partial N_o} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \gamma_o}{\partial N_o} = \frac{1 - \gamma_o}{N_t}$$

la sommatoria essendo estesa a tutti gli ioni disciolti, solvente escluso. Perciò

$$\sum_1^s N_j \frac{\partial y_j}{\partial N_o} = \sum_1^s \gamma_j (1 - \gamma_o) \frac{\partial y_j}{\partial \gamma_o}$$

Per una soluzione di un elettrolita binario mono-monovalente tipo NaCl si ha:

$$\gamma_{Na^+} = \gamma_{Cl^-} = \gamma \quad ; \quad 1 - \gamma_o = 2\gamma$$

e perciò

$$\sum_1^s N_j \frac{\partial y_j}{\partial N_o} = 2\gamma^2 \frac{\partial (y_{Na^+} + y_{Cl^-})}{\partial \gamma_o} .$$

Per un elettrolita tipo $CaCl_2$ si avrà invece: $\gamma_{Cl^-} = 2\gamma_{Ca^{++}} = 2\gamma$; $(1 - \gamma_o) = 3\gamma$

$$\sum_1^s N_j \frac{\partial y_j}{\partial N_o} = 3\gamma_{Ca^{++}} \left[\gamma_{Ca^{++}} \frac{\partial y_{Ca^{++}}}{\partial \gamma_o} + 2\gamma_{Cl^-} \frac{\partial y_{Cl^-}}{\partial \gamma_o} \right] = 3\gamma^2 \frac{\partial (y_{Ca^{++}} + 2\, y_{Cl^-})}{\partial \gamma_o}$$

Perciò la risoluzione del problema si riporta alla derivazione grafica rispetto a γ_o delle combinazioni lineari sovraindicate delle y_j.

L'applicazione di questo metodo al calcolo di abbassamenti crioscopici di soluzioni acquose, anche molto concentrate, di elettroliti forti, ha mostrato (nei limiti di applicazione della teoria) che gli errori grafici che si commettono lavorando con regolare accuratezza con un ordinario tangentometro non superano i limiti degli errori sperimentali della misure crioscopiche correnti. Si verifica invero questa coincidenza fortunata e che cioè nel caso di soluzioni diluite dove la pendenza della curva da derivare è molto forte e

l'errore grafico di derivazione più sensibile, la derivata influisce assai poco sul coefficiente di attività del solvente, mentre nel campo delle medie e delle forti concentrazioni, dove un errore nella valutazione della derivata porterebbe a più sensibili conseguenze nel calcolo dei coefficienti di attività del solvente, le curve da derivare hanno un andamento più tranquillo e l'errore di derivazione risulta molto più piccolo.

In prossimi lavori daremo alcuni esempi dell'applicazione di questo calcolo grafico e potremo così discuterne meglio la portata.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Alcuni teoremi di geometria infinitesimale diretta relativi alle curve spaziali.* Nota I di G. Zwirner, presentata (*) dal Corrisp. R. Caccioppoli.

1. Il lemma fondamentale del calcolo integrale è stato esteso da Caccioppoli e da Petrovsky (1) e ha ricevuto da Caccioppoli la seguente formulazione geometrica:

Una linea piana, immagine continua di un segmento di retta, che abbia ovunque tangente determinata in posizione e passante per un punto fisso si riduce ad un cammino tracciato su una retta passante per tale punto.

Enunciatolo così, se ne scorgono subito delle possibili estensioni. Per esempio è banale la seguente:

Una linea L *dello spazio, immagine continua di un segmento di retta, che abbia ovunque tangente determinata in posizione e passante per un punto fisso (proprio o improprio) si riduce ad un cammino tracciato su una retta passante per tale punto.*

Infatti, supposto, per esempio, che L sia a tangente sempre parallela all'asse x, proiettandola ortogonalmente sul piano xy e sul piano xz si ottengono rispettivamente due linee L′ e L″ a tangente sempre orizzontale (2) e quindi, in virtù del risultato di Caccioppoli, riducentisi a cammini tracciati su rette parallele all'asse x. La linea L è quindi un cammino tracciato sulla retta intersezione dei due piani passanti rispettivamente per L′ e L″ e perpendicolari, il primo al piano xy e il secondo al piano xz.

(*) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) R. Caccioppoli, *Sul lemma fondamentale del calcolo integrale.* «Atti e Memorie della Acc. di Scienze, Lettere ed Arti di Padova», vol. 50, pp. 93–98 (1933–34); J. Petrovsky, *Sur l'unicité de la fonction primitive par rapport à une fonction continue arbitrarie.* [«Rec. Math. Soc. Math. Moscou», 41, 48–58 (1934)].

(2) Si osservi che se una retta r tende a una posizione limite r' non perpendicolare ad un piano π, la proiezione ortogonale di r su π tende alla proiezione ortogonale di r' fatta sullo stesso piano.

Un'altra estensione è stata indicata da me in un lavoro recente [3] nel quale ho fra l'altro dimostrato che una linea è piana se è rettificabile e se il contingente [4] in ogni punto è parallelo ad un piano fisso. L'ipotesi della rettificabilità è certamente sovrabbondante ma non sembra che da qualche ipotesi restrittiva possa prescindersi completamente, deducendo, per dirla in breve, il carattere piano di una curva dall'anologo carattere del contingente. Non è escluso infatti che una curva storta, anche semplice, possa avere addirittura paratingente costantemente parallelo ad un piano fisso: la costruzione di un esempio in proposito è stata annunciata (non però che io sappia pubblicata) da Bielecki [5].

In tale stato della questione ogni risultato parziale sembra meritevole di interesse. Nella prima parte di questo lavoro dimostro in proposito tre teoremi, il primo dei quali può riguardarsi come una estensione particolarmente semplice e naturale del teorema di Caccioppoli, sopra ricordato.

Nella seconda parte farò invece alcune applicazioni, dei risultati ottenuti nella prima, che avranno per scopo di completare un teorema di Picard–Painlevé [6].

E precisamente: il Picard e il Painlevé per dimostrare che l'equazione

$$\frac{dv}{dx} = f(x, y)$$

– ove $f(x, y)$ è una funzione olomorfa delle variabili complesse x, y – non ammette integrali non olomorfi, hanno ammesso come intuitiva la seguente proposizione:

(3) G. ZWIRNER, *A proposito di una interpretazione geometrica del lemma fondamentale del calcolo integrale*. [«Rend. del Sem. Mat. dell'Università di Padova», vol. XV, pp. 139–143 (1946)].

(4) Chiamo *contingente* alla curva continua

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

nel punto P_0 corrispondente al valore t_0 del parametro, l'insieme delle posizioni limiti, per h tendente a zero, della semiretta avente l'origine in P_0 e passante per $[\varphi(t_0+h), \psi(t_0+h), \chi(t_0+h)]$.

Chiamo *paratingente* alla stessa curva nel punto P_0 l'insieme delle rette limiti di rette congiungenti due punti della curva che tendono a P_0 sulla curva.

Naturalmente noi supponiamo che $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ non siano mai simultaneamente costanti in un intervallo. Cfr. G. BOULIGAND: *Introduction à la géometrie infinitésimale directe*. [Paris, Wuibert (1932)], Cap. X e XI. Le nozioni di contingente e di paratingente di C in P_0 coincidono rispettivamente con quelle di *insieme tangente* e di *insieme delle corde improprie* di C in P_0 date da F. SEVERI (ved. «Annales de la Soc. Pol. de Mathématique», t. IX, pp. 97–108 (1930).

(5) A. BIELECKI, *Sur une courbe gauche ayant partout le paratingent parallèle à un plan* [«Comptes Rendus de la Soc. Pol. de Mathématique», 24 avril 1945, in «Annales de la Soc. Pol. de Math.», p. 162 (1945)].

(6) E. PICARD, *Traité d'Analyse*. [Gauthier–Villars, Paris], t. II, pp. 384–386; PAINLEVÉ, *De la détermination unique des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires par les conditions de* CAUCHY. [«Bulletin de la Société Mathématique», pp. 191–196 (1900)].

Se

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

sono le equazioni parametriche di una curva continua l e $F(z) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$ *una funzione, definita in ogni punto* $z = x(t) + iy(t)$ *di l, tale che per ogni t dell'intervallo* $t_0 \leq t \leq t_1$ *il rapporto*

$$\frac{u(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - u(x(t), y(t)) + i[v(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - v(x(t), y(t))]}{x(t+\Delta t) - x(t) + i[y(t+\Delta t) - y(t)]}$$

tenda a zero al tendere a zero di Δt, *allora risulta*

$$F(z) = \text{costante}$$

su tutta l.

Ora questa proposizione equivale, come si vede immediatamente, ad ammettere che una curva continua dell'S_4 reale euclideo avente in ogni punto il contingente parallelo al piano xy, giace in un piano a questo parallelo.

L'affermazione fatta dagli Autori sopra citati non sembra quindi, dopo quanto abbiamo inizialmente detto, affatto intuitiva.

Nella seconda parte di questo lavoro indicherò perciò delle classi di curve per le quali valga la proposizione sopra enunciata [7].

Ricorderò infine che un'altra condizione per il carattere piano di una curva semplice è stata stabilita da G. Durand secondo una impostazione del problema data da G. Bouligand [8].

2. Teorema I. – *Una linea* C *dello spazio a punti semplici* [9], *immagine continua di un segmento di retta, che abbia ovunque tangente determinata in posizione e appoggiantesi ad una retta fissa (propria o impropria) si riduce ad un cammino tracciato su un piano passante per tale retta.*

Indichiamo con

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \qquad (a \leq t \leq b)$$

le equazioni parametriche della curva C e ammettiamo, per esempio, che sia a tangente parallela al piano xy.

In un punto di C, corrispondente ad un valore di t interno ad (a, b), definiamo una semiretta tangente come limite della semiretta di origine $[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]$ e passante per $[\varphi(t+h), \psi(t+h), \chi(t+h)]$, con h esclusivamente positivo. Indicheremo con $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ i coseni direttori di tale semiretta.

(7) Parte dei risultati contenuti in questo lavoro sono già stati pubblicati, in litografie, dalla Casa Editrice «Cedam» di Padova (1947).

(8) Cfr. loc. cit. per primo in (4), pp. 211–213.

(9) Cioè, che corrisponda topologicamente ad un segmento di retta.

Nelle ipotesi ammesse, la funzione

$$f(t,h)=\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{\sqrt{[\varphi(t+h)-\varphi(t)]^2+[\psi(t+h)-\psi(t)]^2+[\chi(t+h)-\chi(t)]^2}} \qquad (0<h\leq b-t)$$

è sempre continua in h perchè il denominatore si annulla soltanto per $h=0$. Inoltre, posto

$$f(t,0)=\lambda(t),$$

valgono le relazioni

$$\nu(t)=0 \quad , \quad f(t,0)=\lambda(t)=\lim_{h\to 0} f(t,h) \quad , \quad \mu(t)=\sqrt{1-\lambda^2(t)}.$$

Siccome la funzione $f(t,h)$ converge per $h\to 0$, si potrà in corrispondenza ad un numero positivo ε determinare un intervallo (α_1,β_1) contenuto in (a,b) sul quale la convergenza sia uniforme a meno di ε, cioè

$$|f(t,h)-f(t,k)|\leq\varepsilon \quad \text{per} \quad k<h\leq\sigma, \tag{2}$$

con σ numero positivo convenientemente scelto [10].

Sia t_1 un punto interno ad (α_1,β_1) ed h_1 un numero positivo non superiore a σ. Allora è possibile determinare su (α_1,β_1) un intorno (α_2,β_2) di t_1, per ogni t del quale intorno risulti:

$$|f(t,h_1)-f(t_1,h_1)|<\varepsilon$$

e ciò per la continuità della $f(t,h)$ rispetto a t.

Di qui, dalla (2) e dalla

$$|\lambda(t)-\lambda(t_1)|=|f(t,0)-f(t_1,0)|\leq$$
$$\leq|f(t,0)-f(t,h_1)|+|f(t,h_1)-f(t_1,h_1)|+|f(t_1,h_1)-f(t_1,0)|,$$

segue, in $\alpha_2\leq t\leq\beta_2$,

$$|\lambda(t)-\lambda(t_1)|<3\varepsilon. \tag{3}$$

Se in t_1 risulta $|\lambda(t_1)|\geq 5\varepsilon$, in (α_2,β_2) è quindi $|\lambda(t)|>2\varepsilon$, epperò dalla (2) segue

$$|f(t,h)|>\varepsilon \quad \text{per} \quad \alpha_2\leq t\leq\beta_2 \quad ; \quad 0<h\leq\sigma,$$

(10) La deduzione del testo è conosciuta [Cfr. CACCIOPPOLI, loc. cit. in (1) nota a piedi della pagina 96]. La riassumo per comodità del lettore. Se I_n è l'insieme dell'intervallo chiuso (a,b) formato dai punti in cui risulta

$$|f(t,h)-f(t,k)|\leq\varepsilon \text{ per } k<h\leq\frac{1}{n}\,(n=1,2,\cdots),$$

I_n è chiuso e $\sum_1^\infty{}_n I_n=(a,b)$. Detto J_n il complementare di I_n rispetto ad (a,b), l'affermazione del testo potrebbe non essere verificata soltanto a patto che tutti gli J_n fossero densi su (a,b). E questo a norma di un teorema di BAIRE [Cfr. P. ALEXANDROFF, *Topologie*. Berlin, Springer, p. 108 (1935)] è in contraddizione con la $\sum_1^\infty{}_n I_n=(a,b)$.

La deduzione si applica anche al caso che ad (a,b) venga sostituita una sua porzione perfetta.

e non è restrittivo supporre addirittura

$$\lambda(t_1) \geqq 5\varepsilon \quad , \quad \lambda(t) \geqq 2\varepsilon \quad , \quad f(t,h) > \varepsilon \quad (\alpha_2 \leq t \leq \beta_2 \ , \ 0 < h \leq \sigma).$$

Riducendo quindi, ove occorra, (α_2 , β_2) ad una ampiezza $\leq \sigma$, si avrà corrispondentemente su C un arco la cui proiezione ortogonale sul piano xz è una curva Γ a secanti inclinate sull'asse z e perciò di equazione $\zeta = \zeta(x)$; dippiù Γ avrà tangente sempre orizzontale [11] e di orientazione costante di modo che risulterà, per $\alpha_2 \leq t \leq \beta_2$,

$$\zeta = \chi(t) = \text{costante}.$$

Se in t_1 invece è $|\dot{\lambda}(t_1)| < 5\varepsilon$, per la (3) in (α_2 , β_2) risulta

$$|\mu(t)| > \sqrt{1 - 64\varepsilon^2} \geqq 5\varepsilon ,$$

pur di aver scelto ε abbastanza piccolo. E in questo caso, basta ripetere su (α_2 , β_2) il ragionamento svolto su (a , b) sostituendo $\mu(t)$ a $\lambda(t)$ per riconoscere che $\chi(t)$ è costante in un conveniente sottosegmento di (α_2 , β_2).

Possiamo perciò in ogni caso determinare sempre un intervallo (α , β) contenuto in (a , b) in cui risulti

$$\zeta = \chi(t) = \text{costante}.$$

Sia ora (α' , β') il massimo intervallo contenente (α , β) e su cui risulta ancora $\chi(t) = \text{costante}$.

Due intervalli del tipo (α' , β') sono esterni l'uno all'altro. Sopprimendo allora dall'intervallo aperto (a , b) tutti i punti interni a questi intervalli massimi di costanza per la z, resterà un insieme E perfetto sull'intervallo aperto (a , b).

Dimostriamo ora che E è vuoto con che si verrà senz'altro a provare il teorema enunciato.

Infatti, se ciò non fosse si potrebbe sempre determinare un intervallo (p , q) contenuto in (a , b) e contenente punti di E, tale che in tutti i punti di E che cadono in (p , q) valesse ancora la diseguaglianza (2). Ragionando allora come abbiamo fatto precedentemente si verrebbe a determinare un intervallo (p_2 , q_2), di ampiezza $\leq \sigma$, contenuto in (p , q) contenente ancora punti di E e tale che in tutti questi punti risulterebbero verificate sempre per esempio le

$$\lambda(t) > 2\varepsilon \quad , \quad f(t,h) > \varepsilon .$$

Consideriamo allora la curva $\bar{C}$ che si ottiene dall'insieme corrispondente su C ai punti di E contenuti in (p_2 , q_2) aggregandogli i segmenti rettilinei (paralleli al piano xy) congiungenti i punti corrispondenti agli estremi degli intervalli contigui a E in (p_2 , q_2).

(11) Cfr. nota (2).

La proiezione ortogonale di $\overline{C}$ sul piano $x\zeta$ è una linea di equazione $\zeta = \zeta(x)$, a tangente orizzontale e di orientazione costante; quindi

$$\zeta = \chi(t) = \text{costante} \quad \text{per} \quad p_2 \leq t \leq q_2 .$$

Ciò ovviamente sarebbe incompatibile con la definizione di E.

3. OSSERVAZIONE. – *Il teorema del numero precedente continua a sussistere anche se si toglie l'ipotesi che la curva* C *sia a punti semplici, purchè si ammetta però che in ogni punto* P *di* C *esistano (al più) due sole semirette limiti per ogni insieme di semirette proiettanti da* P *i punti di* C, *distinti da* P, *e situati in un qualunque intorno di* P *e che queste semirette siano opposte e parallele al piano xy.*

Infatti, questo caso più generale si riconduce al precedente con un ragionamento noto e qui riassunto nelle sue linee essenziali.

Supponiamo che il teorema sia falso e consideriamo una porzione C′ di C corrispondente all'intervallo (a', b') e tale che le ζ negli estremi siano diverse. Sopprimiamo da C′ tutti i cappi. La linea C″ che così si ottiene ha gli stessi estremi di C′, non ha punti multipli e in ogni suo punto ha la tangente parallela al piano xy. Ma tutti questi fatti sono incompatibili, perchè a norma del risultato precedente si avrebbe che gli estremi di C″ (e quindi anche di C′) apparterebbero a uno stesso piano di equazione $\zeta = \text{costante}$ [12].

4. TEOREMA II. – *Una curva continua l dello spazio la quale abbia in ogni suo punto il paratingente* [13] *incompleto e parallelo ad un piano fisso* π [14], *giace su un piano a* π *parallelo.*

Preso, per esempio, come piano π il piano xy, supponiamo la curva l rappresentata dalle equazioni (1) e diciamo t_0 un valore generico del parametro t $(a < t_0 < b)$, P_0 il punto corrispondente su l e r una retta esclusa dal paratingente in P_0 alla linea l e parallela a π.

Dal fatto che il paratingente in P_0 non contiene r, in virtù di risultati noti [15], si deduce perciò che si può determinare un intorno completo (γ, δ) di t_0 tale che l'arco l_1 di l, corrispondente ai valori di t dell'intervallo (γ, δ) contenuti in (a, b), abbia in ogni suo punto il paratingente che escluda la direzione individuata da r. Proiettando allora ortogonalmente l_1 su un piano perpendicolare alla direzione r si ottiene una linea a tangente orizzontale e perciò, in virtù del teorema ricordato di Caccioppoli si ha, per ogni t dell'intervallo (γ, δ) contenuto in (a, b),

$$\zeta = \chi(t) = \text{costante}.$$

(12) Per uno sviluppo dettagliato della deduzione rimando al n. 3 della Nota citata di CACCIOPPOLI.

(13) Cfr. loc. cit. in (4).

(14) Dire che il paratingente di l nel punto P è incompleto e parallelo al piano π significa che quel paratingente è contenuto nel fascio di rette che proiettano da P i punti impropri di π e non esaurisce tale fascio.

(15) Cfr. loc. cit. per primo in (4), pp. 75–76.

Abbiamo perciò dimostrato che ad ogni punto t_0 di (a, b) possiamo associare un intorno completo entro il quale risulta sempre $\zeta = \chi(t) =$ = costante). Ma allora $\chi(t)$ risulta costante in tutto (a, b) e quindi il teorema è provato.

5. Dopo quanto abbiamo detto, è immediato il:

TEOREMA III. – *Una curva continua dello spazio il cui contingente* [16] *in ogni punto è parallelo ad un piano fisso* π *ed esclude una retta parallela a* π *e di direzione fissa, giace su un piano a* π *parallelo.*

Matematica. — *Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili.* Nota di C. MIRANDA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

L'estensione alle funzioni armoniche in tre o più variabili del teorema di Painlevé-Runge, sull'approssimazione di una funzione olomorfa di una variabile complessa mediante polinomi, è stata oggetto in passato di numerose ricerche.

Un primo risultato relativo alle funzioni armoniche in un dominio convesso rispetto a un punto si deve a St. Bergmann [1]. Più generalmente J. L. Walsh [2] ha dimostrato che: *una funzione armonica in un insieme aperto* T, *il cui complementare sia internamente connesso, può essere approssimato mediante polinomi armonici, uniformemente in ogni dominio chiuso e limitato contenuto in* T.

Infine, chi scrive ha fatto vedere [3], completando il risultato di Walsh, che: *se* T *è un insieme aperto e limitato, il cui complementare sia internamente connesso, ogni funzione armonica in* T *e continua in* T + FT *può essere approssimata mediante polinomi armonici uniformemente in* F + FT.

La dimostrazione di quest'ultimo teorema è valida sotto ipotesi di regolarità per FT che qui non mette conto di precisare, ma che sono peraltro assai generali. L'estensione di questi teoremi, dimostrati esplicitamente per il caso di tre variabili, al caso di $n > 3$ variabili non presenta serie difficoltà.

(16) Cfr. loc. cit. in (4).

(*) Nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) ST. BERGMANN, *Ueber die Entwiklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen.* [« Math. Annalen », Bd. 86, pp. 238–271, § 4 (1922)].

(2) J. L. WALSH, *The approximation of harmonic functions by harmonic polynomials and by harmonic rational functions.* [« Bull. of the Am. Math Society », vol. 35, pp. 499–544, n. 7 (1929)].

(3) C. MIRANDA, *Approssimazione di una funzione armonica di tre variabili mediante polinomi armonici.* [« Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », t. 56, pp. 239–244 (1932)].

Sono ancora da citare i lavori di A. Ghika (4), il quale ha considerato il caso di una funzione armonica in un dominio il cui complementare non sia internamente connesso; nell'approssimazione di una tale funzione intervengono allora, oltre ai polinomi armonici, anche quelle funzioni che si possono dedurre da essi mediante una trasformazione per raggi vettori reciproci. I risultati di Ghika hanno portata analoga a quelli di Walsh; essi potrebbero essere completati con lo stesso procedimento da me adoperato in (3).

Devo ancora aggiungere che dell'argomento si è occupato anche G. Szegö in un lavoro che mi rincresce però di non poter citare, dato che di esso ho avuto notizia solo attraverso la recensione di un lavoro di altri autori (5).

Recentemente sono tornati sull'argomento M. Nicolesco (6) e G. Fichera (7); a questi autori sono però, evidentemente, sfuggiti i lavori sopra citati. Sostanzialmente, infatti, i risultati di Nicolesco e Fichera rientrano, rispettivamente, in quelli di Walsh e di Ghika. Il procedimento dimostrativo di Fichera è però nuovo e notevole per sua eleganza.

Nella presente Nota mi propongo di dare una nuova dimostrazione dell'approssimabilità, uniforme in un dominio chiuso e limitato, di una funzione continua nel dominio e armonica nell'interno, mediante combinazioni lineari delle funzioni considerate da Ghika e da Fichera. Il procedimento dimostrativo è basato su alcune semplici considerazioni di analisi funzionale ed è analogo a quello di cui mi sono valso in una mia recente Nota (8) per dare una nuova dimostrazione dell'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet; esso ha il pregio di condurre direttamente al risultato senza bisogno di stabilire preventivamente un teorema del tipo di quello di Walsh come invece occorrerebbe volendo seguire il procedimento della mia Nota citata in (3). La mia dimostrazione è perciò indipendente dai precedenti risultati di Ghika e Fichera, mentre invece, come è ovvio, tali risultati si potrebbero subito dedurre dal teorema cui pervengo. La dimostrazione viene però qui svolta soltanto per il caso di tre variabili, perchè l'estensione al caso di più di tre variabili presenta qualche difficoltà che non sono ancora riuscito a superare (9).

(4) A. GHIKA, *Sur les séries de fonctions harmoniques.* [« C. R. de l'Acad. des Sci. de Paris », t. 199, pp. 560–662 (1934)] e *Sur la répresentation analytique des fonctions harmoniques.* [« Bull. Math. Soc. Roum. Sci. », t. 37, pp. 23–36 (1935)].

(5) Cfr. la recensione di una Nota di KELDYCH e LAVRENTIEFF pubblicata nel Bd. 17 del « Zentralblatt für Math. », p. 207 a firma G. Szegö.

(6) M. NICOLESCO, *Approssimazione delle funzioni armoniche in più variabili mediante polinomi armonici.* [« Rendiconti di Mat. e delle sue applicazioni » (Roma) ser. 5ª, vol. 6, pp. 410–423 (1947)].

(7) G. FICHERA, *Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili mediante successioni di particolari funzioni armoniche.* [Questi « Rendiconti », ser. 8ª, vol. III, pp. 508–511 (1947)].

(8) C. MIRANDA, *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche* [questi « Rendiconti », ser. 8ª, vol. III, pp. 55–59 (1947)].

(9) Contrariamente a quanto affermavo nell'introduzione alla mia Nota citata in (8) la stessa difficoltà si presenta ove si voglia estendere il procedimento di detta Nota alla dimo-

Sia D un dominio (chiuso e) limitato dello spazio la cui frontiera S sia una superficie semplice (anche composta di più parti staccate) dotata in ogni punto di piano tangente e di curvature principali continue [10]; si supponga inoltre che l'involucro del complementare CD di D sia composto di $p+1$ domini internamente connessi $T_0, T_1, \cdots, T_p$, a due a due privi di punti interni comuni, il primo dei quali non limitato, gli altri limitati.

In ogni dominio T_s fissiamo ad arbitrio un punto interno O_s [11] e diciamo $\rho_s, \theta_s, \varphi_s$ le coordinate polari di un generico punto P rispetto a un sistema di riferimento col polo in O_s. Detto $\{ Y_{mi}(\theta_s, \varphi_s) \}$ $(i = 1, 2, \cdots, 2m+1)$ un sistema fondamentale di funzioni sferiche di ordine m, poniamo con Fichera:

$$\omega_{mi}(P) = \rho_o^m Y_{mi}(\theta_o, \varphi_o) \quad , \quad \tau_{mi}^{(s)}(P) = \frac{Y_{mi}(\theta_s, \varphi_s)}{\rho_s^{m+1}}.$$

Se ordiniamo in una successione $\{ v_k(P) \}$ le infinite funzioni ω_{mi} e $\tau_{mi}^{(s)}$ che si ottengono dando agli indici s, m, i, i valori

$$s = 1, 2, \cdots, p \quad ; \quad m = 0, 1, 2, \cdots \quad ; \quad i = 1, 2, \cdots, 2m+1,$$

sussiste il teorema:

Ogni funzione $u(P)$ *continua in* D *e armonica in* $D - FD$ *può essere approssimata, uniformemente in tutto* D, *mediante combinazioni lineari di funzioni* $v_k(P)$.

Nello spazio Σ delle funzioni definite su S e ivi continue le funzioni f per le quali la soluzione del problema di Dirichlet,

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 & in \quad D - S \\ u = f & su \quad S \end{cases}$$

è approssimabile, uniformemente in D, mediante combinazioni lineari di funzioni v_k costituiscono una varietà Σ_1 lineare e chiusa. Pertanto, ragionando come nella mia Nota citata in [8], si vede che, per dimostrare il teorema, basta mostrare che, se per una funzione additiva e a variazione limitata $\mu(A)$ del generico insieme A (misurabile secondo Borel) di punti di S e per ogni funzione f di Σ_1 si ha:

$$(1) \qquad \int_S f \, d\mu = 0,$$

strazione dell'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet per le funzioni armoniche in più di tre variabili. La difficoltà si incontra nello stabilire certe proprietà di continuità per un potenziale della forma $\int d\mu / r^\alpha$ con $\alpha > 1$.

(10) Tali ipotesi potrebbero essere ridotte conformemente al contenuto del n. 3 della mia Nota citata in (8); su ciò però non insistiamo giacchè, stabilito il teorema nelle ipotesi enunciate, una riduzione di queste ipotesi, ben più sostanziale, potrebbe ottenersi col metodo della mia Nota citata in (3).

(11) Il punto O_0 può anche essere non interno a T_0.

la stessa (1) vale per ogni funzione continua f. Ora, detti $I_0, I_1, \cdots, I_p$ degli intorni sferici dei punti $O_0, O_1, \cdots, O_p$ tali che I_0 contenga nel suo interno D e I_s sia interno a T_s, comunque si prenda un punto P di

$$C I_0 + \sum_1^p I_s ,$$

la funzione del punto Q:

$$\frac{1}{\overline{PQ}}$$

risulta armonica in D, mentre per noti teoremi [12] i suoi valori su S appartengono a Σ_1. Ne segue che, se la (1) sussiste per tutte le funzioni f di Σ_1, dev'essere

$$W(P) = \int \frac{1}{\overline{PQ}} d\mu = 0 \quad in \quad C I_0 + \sum_{s=1}^{p} I_p$$

e quindi, per l'analiticità di W (P) e la connessione interna dei domini T_s

$$W(P) = 0 \quad in \quad CD .$$

Ma da ciò segue appunto [13] che la (1) è soddisfatta per ogni funzione continua f.

Matematica. — *Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti.* Nota di L. CASTOLDI, presentata [*] dal Socio M. PICONE.

A proposito della mia Nota III dallo stesso titolo, contenuta nel fascicolo 2, ser. 8ª, vol. IV (1948), p. 190 di questi «Rendiconti», debbo segnalare un rilievo dovuto alla cortesia del prof. M. PICONE, secondo il quale, in effetti, i risultati e in particolare gli esempi di quella Nota non contrastano, contrariamente a quanto ivi detto, con quelli del Coronato, nè col consueto teorema del Wronskiano, essendo essi stabiliti sotto ipotesi diverse (ammissione di discontinuità per le funzioni fondamentali e per le loro successive derivate) da quelle adottate dall'Autore citato».

(12) Si ricordino i noti sviluppi in serie di una funzione armonica all'interno e all'esterno di una sfera [cfr. per esempio M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Cap. II, n. 30. Ed. A. Rondinella Napoli, 2ª edizione (1946)].

(13) Cfr. la mia Nota citata in (8) n. 2).

(*) Nella seduta del 15 maggio 1948.

Calcolo delle probabilità. — *Sul prodotto di due variabili casuali gaussiane* (*). Nota di A. Ghizzetti, presentata (**) dal Socio M. Picone.

È noto che la funzione di Bessel $K_0(x)$ è una funzione pari, sempre positiva ed inoltre tale da aversi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_0(x)\,dx = \pi .$$

Ne segue che la funzione $\frac{1}{\pi} K_0(x)$ può pensarsi come *densità* di una legge di probabilità sull'asse x. Non mi risulta che sia stato osservato il semplice significato di tale legge che, come sarà provato più avanti, non è altro che la legge seguìta dal prodotto di due variabili casuali gaussiane U, V, indipendenti fra loro, aventi entrambe come densità la funzione $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Le U, V ora considerate hanno valor medio nullo; conviene però prendere in esame il caso di due valori medi affatto arbitrari α, β e pensare quindi che le densità $u(x), v(x)$ relative alle U, V siano espresse dalle

$$(1) \qquad u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\alpha)^2} \quad , \quad v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\beta)^2} .$$

Assumendo queste formule per le densità, gli scarti quadratici medi σ, τ delle U, V risultano entrambi uguali a 1; ma quest'ipotesi non è restrittiva perchè, ove non fosse verificata, basterebbe considerare, in luogo di U, V, le $U/\sigma, V/\tau$, venendo così ad alterare soltanto per un fattore costante il prodotto delle due variabili casuali.

Ciò premesso, sussiste il seguente teorema:

Considerate le due variabili casuali gaussiane U, V *con le densità* (1), *nell'ipotesi che esse siano indipendenti, la variabile casuale* $W = UV$ *ha una densità di probabilità* $w(x)$ *data dalla formula*:

$$(2) \qquad w(x) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)} \left\{ I_0\left(2\sqrt{\alpha\beta x}\right) K_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \right] I_{2n}\left(2\sqrt{\alpha\beta x}\right) K_n(x) \right\},$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 aprile 1948.

che nei casi particolari $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$; $\alpha = \beta = 0$ *si riduce rispettivamente alle*

$$w(x) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} x^n \mathrm{K}_n(x), \tag{2'}$$

$$w(x) = \frac{1}{\pi} \mathrm{K}_0(x) \text{ (1)}. \tag{2''}$$

Inoltre la funzione caratteristica $\varphi(t)$ *della* W *ha l'espressione seguente*:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} e^{-\frac{(\alpha^2+\beta^2)t^2 - 2i\alpha\beta t}{2(t^2+1)}}. \tag{3}$$

Si noti che *la densità* $w(x)$ *ha, in ogni caso, un infinito logaritmico nel punto* $x = 0$, proveniente dal termine in $\mathrm{K}_0(x)$. Di più, come si scorge immediatamente dalle (2'), (2''), *nel caso* $\alpha\beta = 0$ *la curva* $y = w(x)$ *riesce simmetrica rispetto all'asse* y; invece nel caso generale $\alpha\beta \neq 0$ la curva non ha asse di simmetria.

Per la dimostrazione basta partire dalle note formule

$$w(x) = -\int_{-\infty}^{0} u(\xi)\, v\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi} + \int_{0}^{+\infty} u(\xi)\, v\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi} = \tag{4}$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \left[u(-\xi)\, v\left(-\frac{x}{\xi}\right) + u(\xi)\, v\left(\frac{x}{\xi}\right)\right]\frac{d\xi}{\xi} \text{ (2)},$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} w(x)\, dx, \tag{5}$$

ed eseguire alcuni calcoli. Per le (1), la (4) diventa

$$w(x) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\xi^2 + \frac{x^2}{\xi^2}\right)} \cosh\left(\alpha\xi + \beta\frac{x}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi} \tag{6}$$

ed è subito visto che l'integrale scritto è convergente se si suppone $x \neq 0$, ipotesi che manterremo nel seguito.

Nel caso $\alpha = \beta = 0$ si ha

$$w(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\xi^2 + \frac{x^2}{\xi^2}\right)}\frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t} t^{-1} e^{-\frac{x^2}{2t}} dt, \qquad (\xi^2 = t),$$

(1) In queste formule le I_ν, K_ν sono le funzioni di Bessel di argomento immaginario (vedi G. N. WATSON, *Bessel functions*, pp. 77-80). Si noti che nella (2) l'argomento $2\sqrt{\alpha\beta}x$ delle I_{2n} può essere reale o immaginario puro; ma la $w(x)$ è sempre reale, giacchè le I_{2n} sono funzioni pari.

(2) Cfr. M. FRÉCHET, *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités* - Premier livre (*Generalités sur les probabilités – Variables aléatoires*), pp. 77-82.

ed applicando la nota formula (3)

$$(7)\qquad \int_0^\infty e^{-pt}\, t^{\nu-1}\, e^{-\frac{a^2}{4t}}\, dt = \frac{1}{2^{\nu-1}}\left(\frac{a}{\sqrt{p}}\right)^{\nu} K_\nu\left(a\sqrt{p}\right), \qquad (a \neq 0\ ,\ p > 0),$$

con $p = \frac{1}{2}$, $\nu = 0$, $a = x\sqrt{2}$, si ottiene precisamente la (2'').

Nel caso $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ la (6) diventa

$$w(x) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\xi^2 + \frac{x^2}{\xi^2}\right)} \cosh \alpha\xi \frac{d\xi}{\xi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}\, \xi^{2n-1}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\xi^2 + \frac{x^2}{\xi^2}\right)} d\xi .$$

Poichè per $\xi \geq 0$ si ha $\xi^{2n} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \leq (2n)^n e^{-n}$, $\frac{1}{\xi} e^{-\frac{x^2}{2\xi^2}} \leq \frac{1}{|x|\sqrt{e}}$, la serie che dobbiamo integrare ammette come maggiorante la

$$\frac{1}{|x|\sqrt{e}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{(2n)!} (2n)^n e^{-n}$$

e quindi anche la

$$\frac{1}{|x|\sqrt{e}} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!\sqrt{n}} (2\alpha^2)^n \right\},$$

giacchè, in virtù della formula di Stirling, si ha $n^n e^{-n} < n! / \sqrt{2\pi n}$. L'ultima serie scritta è convergente e perciò la serie che dobbiamo integrare è uniformemente convergente al variare di ξ in $(0, \infty)$; si ha quindi

$$w(x) = \frac{1}{\pi} e^{\frac{1}{2}\alpha^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty \xi^{2n-1}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\xi^2 + \frac{x^2}{\xi^2}\right)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t}\, t^{n-1}\, e^{-\frac{x^2}{2t}} dt, \qquad (\xi^2 = t),$$

ed applicando ancora la (7) con $p = \frac{1}{2}$, $\nu = n$, $a = x\sqrt{2}$, si perviene alla (2').

Esaminiamo infine il *caso* $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Tenuto conto che

$$\cosh\left(\alpha\xi + \beta\frac{x}{\xi}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r)!} \left(\alpha\xi + \beta\frac{x}{\xi}\right)^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2r} \frac{\alpha^s}{s!} \frac{(\beta x)^{2r-s}}{(2r-s)!} \frac{1}{\xi^{2(r-s)}},$$

(3) Cfr. G. N. Watson, op. cit., p. 183.

e che, essendo la serie doppia assolutamente convergente, si può anche scrivere, ponendo $r - s = n$:

$$\cosh\left(\alpha\xi + \beta\frac{x}{\xi}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=|n|}^{\infty} \frac{\alpha^{r-n}}{(r-n)!} \cdot \frac{(\beta x)^{r+n}}{(r+n)!} \frac{1}{\xi^{2n}};$$

la (6) diventa

$$(8) \quad w(x) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)} \int_0^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=|n|}^{\infty} \frac{\alpha^{r-n}}{(r-n)!} \frac{(\beta x)^{r+n}}{(r+n)!} \cdot \xi^{r-n} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2\xi^2}}}{\xi^{r+n+1}} d\xi .$$

Poichè

$$\xi^{r-n} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \leq (r-n)^{\frac{r-n}{2}} e^{-\frac{r-n}{2}}, \quad e^{-\frac{x^2}{2\xi^2}} \Big/ \xi^{r+n+1} \leq \frac{1}{|x|^{r+n+1}} (r+n+1)^{\frac{r+n+1}{2}} e^{-\frac{r+n+1}{2}},$$

la serie doppia ora scritta ammette come maggiorante la

$$\frac{1}{|x|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=|n|}^{\infty} \frac{|\alpha|^{r-n}}{(r-n)!} \frac{|\beta|^{r+n}}{(r+n)!} [(r-n)^{r-n} e^{-(r-n)}]^{\frac{1}{2}} [(r+n+1)^{r+n+1} e^{-(r+n+1)}]^{\frac{1}{2}}$$

e quindi, applicando la formula di Stirling come nel caso precedente, anche la

$$\frac{1}{|x|\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{2n+1}}{\sqrt{(2n)!}} |\beta|^{2n} +$$

$$+ \frac{1}{|x|\sqrt{2\pi}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=n+1}^{\infty} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{r=-n}^{\infty} \right) \frac{|\alpha|^{r-n}}{\sqrt{(r-n)!}} \frac{|\beta|^{r+n}}{\sqrt{(r+n)!}} \sqrt[4]{\frac{r+n+1}{r-n}} .$$

Poichè quest'ultima è convergente, la sopracitata serie doppia è uniformemente convergente per $\xi \geq 0$, onde dalla (8) segue

$$w(x) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=|n|}^{\infty} \frac{\alpha^{r-n}}{(r-n)!} \frac{(\beta x)^{r+n}}{(r+n)!} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \xi^{-(2n+1)} e^{-\frac{x^2}{2\xi^2}} d\xi ,$$

sempre con assoluta convergenza della serie doppia. Con la sostituzione $\xi^2 = t$ e successiva applicazione della (7) si trova che l'integrale qui scritto vale $x^{-n} K_{-n}(x)$ e perciò, essendo $K_{-n}(x) = K_n(x)$:

$$w(x) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=|n|}^{\infty} \frac{\alpha^{r-n}}{(r-n)!} \frac{\beta^{r+n}}{(r+n)!} x^n K_n(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)} \left\{ K_0(x) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta x)^r}{(r!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x) \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha\beta x)^r \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{(r-n)!\,(r+n)!} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)} \left\{ K_0(x) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta x)^s}{(s!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \right| (\alpha\beta x)^n K_n(x) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta x)^s}{s!\,(s+2n)!} \right\}.$$

Introducendo le funzioni di Bessel di 1ª specie $I_\nu(t)$ definite dalla

$$I_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2s}}{s!\,(s+\nu)!},$$

si può scrivere

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta x)^s}{s!\,(s+2n)!} = \frac{I_{2n}\left(2\sqrt{\alpha\beta x}\right)}{(\alpha\beta x)^n}$$

e quindi in definitiva si ottiene la (2).

Passiamo a dimostrare la (3), alla quale arriveremo tenendo conto della classica formula

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\, e^{-a^2y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{-\frac{t^2}{4a^2}}, \qquad (a>0).$$

Dalla (1), (4), (5) segue

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dx \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{1}{2}(\xi+\alpha)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi}+\beta\right)^2} + e^{-\frac{1}{2}(\xi-\alpha)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi}-\beta\right)^2} \right] \frac{d\xi}{\xi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\xi+\alpha)^2} \frac{d\xi}{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi}+\beta\right)^2} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\xi-\alpha)^2} \frac{d\xi}{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi}-\beta\right)^2} dx;$$

ma, eseguendo la sostituzione $\frac{x}{\xi} \pm \beta = y$ ed applicando la (9), si trova

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi}\pm\beta\right)^2} dx = \sqrt{2\pi}\cdot\xi\, e^{\mp i\beta t\xi}\, e^{-\frac{1}{2}t^2\xi^2},$$

cosicchè risulta

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-i\beta t\xi - \frac{1}{2}(\xi+\alpha)^2 - \frac{1}{2}t^2\xi^2} d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{i\beta t\xi - \frac{1}{2}(\xi-\alpha)^2 - \frac{1}{2}t^2\xi^2} d\xi$$

ovvero, cambiando ξ in $-\xi$ nel primo integrale

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta t\xi - \frac{1}{2}(\xi-\alpha)^2 - \frac{1}{2}t^2\xi^2} d\xi.$$

Con la sostituzione $\xi = y + \frac{\alpha}{t^2+1}$ ed applicando ancora la (9), si trova la (3).

Nella dimostrazione precedente abbiamo ricavato direttamente le (2′), (2″); è quasi superfluo rilevare che esse possono anche ottenersi come casi limiti della (2), com'è facile verificare.

Notiamo ancora che, poichè per la formula d'inversione della trasformata di Fourier deve essere

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \varphi(t)\, dt \quad , \quad (x \neq 0),$$

da quanto precede si trae anche la seguente notevole relazione, valida per $x \neq 0$:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} e^{\frac{2i\alpha\beta t + \alpha^2 + \beta^2}{2(t^2+1)}} dt =$$

$$= I_0\left(2\sqrt{\alpha\beta x}\right) K_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right] I_{2n}\left(2\sqrt{\alpha\beta x}\right) K_n(x),$$

la quale potrebbe essere dedotta in modo diretto, mediante applicazione della formula di Basset relativa alla $K_n(x)$ (4). Ma tale deduzione non è semplice, e perciò la omettiamo.

Geometria. — *Alcuni esempi di superficie algebriche a sistema canonico puro degenere.* Nota di G. POMPILJ, presentata (*) dal Socio G. CASTELNUOVO.

Nelle prime ricerche di geometria sulle superficie algebriche si era ritenuto (Noether) che il sistema canonico puro di una superficie potesse degenerare solo quando fosse esistito, sulla superficie stessa, un fascio di curve ellittiche, nel qual caso, come è noto, le curve canoniche risultano spezzate in curve di questo fascio; di modo che restava esclusa la possibilità che le curve del sistema canonico puro degenerassero in una componente fissa e in una parte variabile oppure che, tolta questa eventuale parte fissa, si spezzassero in più curve, di genere maggior d'uno, appartenenti ad un medesimo fascio. Ma tale presunzione risultò infondata. Già in una monografia del 1896 G. Castelnuovo e F. Enriques (1) ponevano chiaramente il problema delle superficie a sistema canonico puro degenere; e più tardi F. Enriques costruiva esempi di superficie, di genere geometrico $p_g > 1$, il cui sistema canonico puro risulta formato da curve degeneri in una componente fissa di genere maggior di zero e in una parte variabile irriducibile. Non mi risulta invece che siano stati costruiti esempi di superficie, di genere geometrico $p_g > 2$, per le quali la parte variabile del sistema canonico puro sia degenere in più curve, di genere maggior d'uno, appartenenti ad un fascio.

(4) Cfr. G. N. WATSON, op. cit., p. 172.

(*) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) Vedasi G. CASTELNUOVO-F. ENRIQUES, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*. «Math. Ann.», Bd. XLVIII (1896).

Nella presente Nota fornisco alcuni esempi in proposito e precisamente costruisco certe superficie regolari, di genere geometrico p_g comunque grande, sulle quali il sistema canonico puro, a prescindere da una componente fissa, è degenere in $p_g - 1$ curve di genere 2 appartenenti ad un fascio lineare che nel seguito indicherò con $|\mathfrak{R}|$.

Per costruire tali superficie mi servo della loro rappresentazione sul piano doppio [2] che si ottiene approfittando delle g_2^1 canoniche che si trovano sulle curve del fascio $|\mathfrak{R}|$ le quali, come si è detto, sono di genere 2.

La Nota è divisa in due paragrafi; nel primo costruisco le curve di diramazione di questi particolari piani doppi, nel secondo invece studio le loro caratteristiche. E precisamente, con una diretta costruzione (§ I) dimostro l'esistenza di curve irriducibili D_{6h}, d'ordine $6h$ (con $h > 1$), possedenti un punto O di molteplicità $6(h-1)$ ed aventi inoltre $4(h-1)$ punti $[3, 3]$ situati su una curva irriducibile L_{h-1}, d'ordine $h-1$, passante per O con molteplicità $h-2$. Il sistema canonico dei piani doppi che hanno per curva di diramazione una D_{6h} sopra definita ha come immagine (§ II) il sistema lineare di curve degeneri nella curva fissa L_{h-1} e in $2(h-1)$ rette per O; inoltre i caratteri di tali piani doppi sono:

$$\begin{cases} p_g = p_a = 2h - 1 \\ p^{(1)} = p^{(2)} + 1 = 8h - 9. \end{cases}$$

Il sistema canonico di tali superficie, pur essendo degenere, è connesso e quindi [3] i sistemi pluricanonici sono regolari. Questa osservazione permette di calcolare subito i plurigeneri ottenendo in particolare:

$$\begin{cases} P_2 = p_a + p^{(1)} = 10(h-1) \\ P_3 = p_a + 3p^{(1)} - 2 = 26h - 30 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Vale forse la pena d'osservare esplicitamente che, siccome le superficie così costruite posseggono un fascio di curve di grado zero e genere due, il sistema bicanonico appartiene all'involuzione I_2 che dà luogo al piano doppio, nel senso che viene trasformato in sè curva per curva da tale involuzione del second'ordine.

§ I. – Costruzione delle curve di diramazione.

1. In questo paragrafo mi propongo di fornire un procedimento atto a costruire delle curve irriducibili D_{6h} d'ordine $6h$ $(h > 1)$ con un punto O di molteplicità $6(h-1)$ e con $4(h-1)$ coppie di punti tripli infinitamente

(2) Per le nozioni riguardanti la teoria dei piani doppi di cui avrò bisogno nel seguito, vedasi per esempio F. Enriques L. Campedelli, *Lezioni sulla teoria delle supeficie algebriche*. Cedam, Padova.

(3) Vedasi F. Severi, *Teoremi di regolarità sopra una superficie algebrica*. « Rend. di matematica e delle sue applicazioni », p. 346 (1947).

vicini situati su una curva L_{h-1} d'ordine $h-1$ la quale passa per il punto O con molteplicità $h-2$.

Nel seguito, uniformandomi a quanto comunemente si fa, invece di «coppia di punti tripli infinitamente vicini» dirò più brevemente: «punto $[3, 3]$».

Si può facilmente calcolare un valore per difetto della dimensione r del sistema lineare $|D_{6h}|$, di tutte le curve d'ordine $6h$ che in certi punti assegnati hanno le molteplicità previste, ragionando come se le condizioni così imposte fossero tutte indipendenti; si ha infatti:

$$r \geqq \frac{6h(6h+3)}{2} - \frac{6(h-1)(6h-5)}{2} - 8(h-1)6 = 33 - 6h;$$

si osservi però che la precedente diseguaglianza ci assicura che la dimensione effettiva r è non negativa solo quando $6h \leqq 33$ cioè quando $h \leqq 5$. Tuttavia nei numeri che seguono costruirò effettivamente tali curve D_{6h} qualunque sia il valore di h.

2. A tale scopo si fissino una generica curva irriducibile C_{2h}, d'ordine $2h$, passante per O con molteplicità $2(h-1)$ ed una generica curva, pure irriducibile, L_{h-1}, d'ordine $h-1$, che passa per O con molteplicità $h-2$. Fuori del punto O le due curve s'incontrano in certi $4(h-1)[=2h(h-1)+2(h-1)(h-2)]$ punti distinti $A_1, A_2, \cdots, A_{4(h-1)}$.

Indichiamo poi con $|C_{2h}|$ il sistema lineare delle curve d'ordine $2h$ passanti per O con molteplicità $2(h-1)$ e tangenti alla C_{2h} nei $4(h-1)$ punti A_i.

3. *Il sistema* $|C_{2h}|$ *ha dimensione tre.*

Si costruiscono infatti subito ∞^2 curve del sistema $|C_{2h}|$ associando alla L_{h-1} contata due volte altre due generiche rette per O; queste curve degeneri formano un sistema lineare che, ampliato con la prefissata C_{2h}, fornisce un sistema lineare di dimensione 3 sicuramente contenuto in $|C_{2h}|$; ed anzi si verifica subito che esso coincide con C_{2h} perchè viceversa imponendo alle curve di quest'ultimo sistema di passare per un assegnato punto della L_{h-1}, tale curva si stacca due volte lasciando come residuo due rette per O.

4. Dentro il sistema $\infty^3 |C_{2h}|$ così costruito si fissino due generiche terne di curve, ciascuna delle quali costituisce una curva d'ordine $6h$ avente in O un punto di molteplicità $6(h-1)$ a tangenti distinte ed in $A_1, A_2, \cdots, A_{4(h-1)}$ altrettanti punti $[3, 3]$ con la stessa tangente. Il fascio individuato da queste due particolari curve spezzate è, per un noto teorema di E. Bertini, formato da curve irriducibili D_{6h} le quali risolvono pienamente il problema che ci eravamo posto.

§ II. – Studio dei piani doppi.

5. Studiamo ora i piani doppi che hanno per curva di diramazione le D_{6h} costruite nel numero precedente, le quali, come si è visto, sono d'ordine $6h$, hanno un punto singolare ordinario O di molteplicità $6(h-1)$ e posseggono inoltre $4(h-1)$ punti $[3,3]$ $A_1, A_2, \cdots, A_{4(h-1)}$ situati su una curva L_{h-1}, d'ordine $h-1$, passante per O con molteplicità $h-2$.

L'immagine del sistema canonico di questi piani doppi è fornito dalle curve $K_{3(h-1)}$ d'ordine $3(h-1)$ passanti con molteplicità $3(h-1)-1$ per il punto O e semplicemente per i $4(h-1)$ punti $A_1, A_2, \cdots, A_{4(h-1)}$; queste curve incontrano virtualmente la L_{h-1} in $-1\,[=3(h-1)^2+-(3h-4)(h-2)-4(h-1)]$ punti e quindi sono tutte spezzate nella L_{h-1} e in una parte residua la quale, dovendo passare per il punto O con molteplicità $2(h-1)$ eguale al suo ordine, sarà a sua volta degenere in $2(h-1)$ rette per O.

Ne segue che su un modello del nostro piano doppio privo di curve eccezionali, il sistema canonico (puro) $\mathcal{K}$ é degenere in una parte fissa $\mathcal{L}$ e in una parte variabile a sua volta spezzata in $2(h-1)$ curve $\mathcal{R}$ appartenenti ad un fascio lineare.

6. *La curva fissa $\mathcal{L}$ è di genere $2h-3$ e grado -2.*

Per valutare il genere della curva $\mathcal{L}$ basta osservare che essa viene rappresentata doppiamente sulla curva razionale L_{h-1} con $4(h-1)$ punti di diramazione in corrispondenza ai $4(h-1)$ punti $[3,3]$; di modo che possiamo concludere che la $\mathcal{L}$ possiede una g^1_2 con $4(h-1)$ punti doppi; ed allora, indicando con π il genere della curva $\mathcal{L}$, possiamo scrivere la relazione:

$$2\pi + 2 = 4(h-1)$$

da cui appunto segue: $\pi = 2h-3$.

Per calcolare il grado ν della curva osserviamo che il sistema residuo della curva rispetto al sistema canonico la sega in $2\pi-2-2\nu$ punti; ma il sistema residuo è formato da gruppi di $2(h-1)$ curve $\mathcal{R}$, ciascuna delle quali sega la $\mathcal{L}$ in due punti da cui:

$$2\pi - 2 - 2\nu = 4(h-1)$$

dopo di che sostituendo a π il suo valore sopra calcolato si ottiene $\nu = -2$. c. d. v.

7. *Le curve $\mathcal{R}$ hanno genere 2 e grado 0.*

Il genere si ottiene subito osservando che le curve $\mathcal{R}$ sono rappresentabili su una retta doppia con 6 punti di diramazione; indicato allora con p il genere di tali curve si ha $2p+2=6$ da cui $p=2$.

Per calcolare il grado n basta osservare che il sistema canonico deve segare una curva $\mathcal{R}$ in $2p-2-n$ punti, cioè, essendo $p=2$, in $2-n$ punti

i quali si distribuiscono nei 2 punti comuni alla $\mathfrak{F}$ prefissata e alla Σ e nei $2(h-1)n$ punti comuni alla $\mathfrak{R}$ e alle $2(h-1)$ curve del fascio $|\mathfrak{R}|$ che insieme alla Σ, formano una curva canonica, si ha cioè:

$$2n = 2 + 2(h-1)n$$

da cui $n = 0$. c. v. d.

8. *Il piano doppio possiede i seguenti caratteri*:

$$\begin{cases} p_g = p_a = 2h - 1 \\ p^{(1)} = p^{(2)} + 1 = 8h - 9 . \end{cases}$$

Anzitutto per un noto teorema di M. De Franchis [4], il nostro piano doppio è regolare; inoltre siccome la parte variabile del sistema canonico è degenere in $2(h-1)$ curve di un fascio si ha senz'altro:

$$p_g = p_a = 2h - 1$$

perchè tanti sono i gruppi indipendenti di $2(h-1)$ curve di un fascio.

Per il calcolo del genere lineare possiamo ricorrere alla formula di Valentiner-Noether [5] che dà il genere di una curva spezzata, ottenendo nel caso nostro:

$$p^{(1)} = 2h - 3 + (2h-2)2 + (2h-2)2 - (2h-2) = 8h - 9 .$$

Il $p^{(2)}$ si calcola subito in base alla formula:

$$p^{(2)} = [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}] = [\Sigma + 2(h-1)\mathfrak{R}, \Sigma + 2(h-1)\mathfrak{R}] =$$
$$= [\Sigma, \Sigma] + 4(h-1)[\Sigma, \mathfrak{R}] + 4(h-1)^2[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$$

dopo di che: ricordando che si ha:

$$[\Sigma, \Sigma] = -2 \quad , \quad [\Sigma, \mathfrak{R}] = 2 \quad , \quad [\mathfrak{R}, \mathfrak{R}] = 0 ,$$

si ottiene:

$$p^{(2)} = 8h - 10$$

cioè, come del resto era da aspettarsi: $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$.

9. *Il sistema bicanonico è regolare e il bigenere è dato da:* $P = p_a + p^{(1)} = 10(h-1)$.

La regolarità del sistema bicanonico, dato che nel caso nostro il sistema canonico è connesso, è assicurato dai recenti criteri di regolarità di F. Severi [6], tuttavia in questo caso elementare possiamo raggiungere direttamente tale risultato.

(4) Vedasi M. DE FRANCHIS, *I piani doppi dotati di due o più differenziali totali di prima specie*. « Rend. Acc. Lincei », ser. 5, t. XIII 1904).

(5) Vedasi per esempio F. ENRIQUES O. CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Zanichelli, Bologna, vol. III, p. 399.

(6) Vedasi F. SEVERI, loc cit. (3).

Anzitutto osserviamo che, siccome la superficie possiede un fascio $|\mathfrak{R}|$ di curve di grado o e genere 2, il sistema bicanonico è composto con l'involuzione che dà luogo al piano doppio; infatti le curve del sistema bicanonico debbono segare sulle curve $\mathfrak{R}$ di grado o il doppio della serie canonica, ma su una curva di genere 2 il doppio della serie canonica è composto con la g_2^1 canonica stessa e quindi tutte le curve bicanoniche che passano per un punto P della superficie passano anche per il punto P′ coniugato di P nella g_2^1 canonica della curva $\mathfrak{R}$ che passa per P; d'altra parte i punti P e P′ sono anche coniugati nell'involuzione che dà luogo al piano doppio e quindi si conclude, come già si era preannunciato, che il sistema bicanonico è composto con detta involuzione.

Ne segue che il sistema bicanonico è rappresentato sul piano doppio dal sistema delle seconde aggiunte $H_{6(h-1)}$ d'ordine $6(h-1)$, alla curva di diramazione D_{6h}, di modo che il bigenere P è dato dal numero di queste curve $H_{6(h-1)}$ linearmente indipendenti.

Con facili calcoli si trova che il genere delle seconde aggiunte $H_{6(h-1)}$ è $6h-8$ mentre l'ordine della serie caratteristica è $16h-20$ $(=2p^{(2)})$; segue da questi dati che la serie caratteristica (essendo $h>1$) è non speciale e quindi, siccome per un noto teorema di G. Castelnuovo [7] la serie caratteristica di un sistema lineare completo di curve piane è sempre completa, possiamo concludere che la dimensione del sistema delle $H_{6(h-1)}$ è:

$$P-1=(16h-20)-(6h-8)+1=10h-11;$$

da questa relazione segue immediatamente che il bigenere è:

$$P=10(h-1).$$

Geometria. – *Sulle involuzioni razionali appartenenti ad una superficie algebrica*. Nota di A. Franchetta, presentata [*] dal Socio G. Castelnuovo.

In due Note pubblicate nei « Rendiconti » dell'Accademia dei Lincei del 1934 [1], F. Severi ha considerato le involuzioni razionali sopra una superficie algebrica quali serie d'equivalenza. In questa Nota mi propongo di arrecare ulteriori contributi ai risultati di Severi.

Sia I_m una involuzione razionale, d'ordine m, su una superficie algebrica F, supposta priva di singolarità in un conveniente iperspazio. Indichiamo con T la corrispondenza fra i punti di F nella quale due punti si corri-

(7) Vedasi G. Castelnuovo, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*. « Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino », ser. 2ª, t. XLII, 1891; riprodotta in *Memorie scelte*. Zanichelli, Bologna, p. 137.

(*) Nella seduta del 18 aprile 1948.

(1) Vol. XIX, pp. 751 e 831. Cfr. anche F. Severi, *Serie e sistemi d'equivalenza*. Ed. Cremonese, Cap. IV, § 4, p. 278 e sgg. (1942).

spondono quando appartengono ad uno stesso gruppo di I_m. Sulla varietà $V = F \times F$, immagine delle coppie (ordinate) di punti di F, la T si rappresenta con una superficie $\overline{T}$; se si indica con U la corrispondenza identica di F, e con $\overline{U}$ la superficie che la rappresenta in V, le coincidenze di T rispondono ai punti comuni alle superficie $\overline{T}$ ed $\overline{U}$; due superficie di V si segano normalmente in un numero finito di punti; quindi normalmente l'involuzione I_m ha solo un numero finito di punti doppi. Può accadere però che le superficie $\overline{T}$ e $\overline{U}$ abbiano infiniti punti in comune, ossia che l'involuzione I_m abbia una linea doppia D; ma in ogni caso si può definire una serie di gruppi di punti, che Severi indica con (T, U), la quale contenga come gruppo totale il gruppo dei punti doppi di I_m, se essi sono numero finito; e che costituisce l'equivalenza funzionale della curva D, nell'ipotesi opposta.

Nel lavoro citato è stabilita una relazione funzionale tra il gruppo della serie (T, U), il gruppo G dell'involuzione I_m e il gruppo S della serie di Severi della superficie F, nell'ipotesi che l'involuzione I_m abbia ordine invariantivo uno o due, che cioè i gruppi dell'involuzione si possano porre in corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, con i punti di un piano o di una quadrica. Nel primo caso si ha $S \equiv 3G - (T, U)$, nel secondo $S \equiv 4G + -(T, U)$. In questa Nota considero il caso di un'involuzione razionale qualunque e trovo che, *detto* $p^{(1)}$ *il genere lineare relativo dell'involuzione, si ha*

$$S \equiv (13 - p^{(1)})\, G - (T, U).$$

Il Severi si occupa inoltre delle curve fondamentali dell'involuzione, in rapporto ad una rete di curve della superficie, di cui l'involuzione sia la serie caratteristica. Egli mostra che nè le curve fondamentali della rete generatrice sono necessariamente fondamentali per l'involuzione, nè le curve fondamentali per l'involuzione sono necessariamente fondamentali per una rete generatrice: si pone così il problema di caratterizzare le curve fondamentali della rete generatrice, che sono fondamentali per l'involuzione; io trovo che *condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva fondamentale per la rete generatrice sia fondamentale anche per l'involuzione è che, detto* ν *il suo grado virtuale, calcolato assegnando su di essa i punti base della rete, esso soddisfi alla relazione* $\nu < m$ [2]. Altre osservazioni riguardanti le suddette curve fondamentali sono svolte nel n. 3.

1. Sia Φ una superficie razionale, priva di singolarità, in corrispondenza biunivoca senza eccezione con i gruppi dell'involuzione I_m; rappresentando Φ su un piano π, siano $A_1, \cdots, A_h$ i punti di Φ che si mutano in curve eccezionali di π; e $B_1, \cdots, B_k$ i punti di π che si mutano in curve eccezionali di Φ; indichiamo con $G_1, \cdots, G_l$ i gruppi dell'involuzione I_m che corrispondono ai punti $A_1, \cdots, A_h$.

(2) Nel proporre questa questione (vedasi « Rend. del Sem. Mat. dell'Un. di Roma », questione 75, marzo 1941, p. 121) il SEVERI ha previsto che la condizione richiesta dovesse esprimersi mediante il grado virtuale della curva.

Trasformiamo birazionalmente la superficie Φ in modo da mutare in curve eccezionali i punti $A_1, \cdots, A_h$; e la superficie F in modo da mutare in curve eccezionali i punti che costituiscono i gruppi $G_1, \cdots, G_h$; le trasformazioni siano scelte in modo da non introdurre altre curve eccezionali; indichiamo con $\overline{\Phi}, \overline{F}$ le superficie così trasformate, e con $\overline{I}_m$ la trasformata dell'involuzione I_m. Nella corrispondenza fra Φ e π non vi sarà nessun punto di $\overline{\Phi}$ che si muta in una curva di π; e quindi le curve $\overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_k$ che rispondono ai punti $B_1, \cdots, B_k$ di π sono eccezionali di prima specie.

Consideriamo due fasci di rette, in posizione generica, del piano π; ed indichiamo con $|C^{(1)}|, |C^{(2)}|$ i fasci di curve che corrispondono ad essi su $\overline{F}$. Il gruppo base di ciascuno di questi due fasci è costituito da un gruppo dell'involuzione $\overline{I}_m$; una curva $C^{(1)}$ e una curva $C^{(2)}$ generiche si segano in un gruppo dell'involuzione. Consideriamo, con Severi, le corrispondenze T e T*, così definite: due punti sono coniugati in T quando fanno parte di uno stesso gruppo dell'involuzione $\overline{I}_m$; due punti sono coniugati in T* quando per essi passano una $C^{(1)}$ e una $C^{(2)}$. Siano $\overline{T}$ e $\overline{T}^*$ le superficie che rappresentano T e T* nella varietà $V = F \times F$.

La superficie $\overline{T}^*$ è costituita: dalla superficie $\overline{T}$; dalla superficie rappresentativa delle coppie di punti della curva C_0, comune ai due fasci; dalle k superficie rappresentative delle coppie di punti di una stessa curva b_i; cioè

$$(1) \qquad \overline{T}^* = \overline{T} + C_0 \times C_0 + \Sigma b_i \times b_i$$

la superficie $C_0 \times C_0$ è equivalente alla superficie $C^{(1)} \times C^{(2)}$, rappresentativa della coppie di punti di una curva generica del primo, e di una curva generica del secondo fascio. Quanto alla superficie $b_i \times b_i$, indicando con $C_i^{(1)}$ e $C_i^{(2)}$ le curve residue di b_i rispetto ai fasci $|C^{(1)}|$ e $|C^{(2)}|$ si ha

$$b_i \times b_i = \left(C_i^{(1)} + b_i - C_i^{(1)}\right) \times \left(C_i^{(2)} + b_i - C_i^{(2)}\right) = \left(C_i^{(1)} + b_i\right) \times \left(C_i^{(2)} \times b_i\right) +$$
$$- C_i^{(1)} \times \left(C_i^{(2)} + b_i\right) - C_i^{(2)} \times \left(C_i^{(1)} + b_i\right) + C_i^{(1)} \times C_i^{(2)}.$$

Ma

$$\left(C_i^{(1)} + b_i\right) \times \left(C_i^{(2)} + b_i\right) \equiv C^{(1)} \times C^{(2)} \quad ; \quad C_i^{(1)} \times \left(C_i^{(2)} + b_i\right) \equiv C_i^{(1)} \times C^{(2)};$$
$$C_i^{(2)} \times \left(C_i^{(1)} + b_i\right) \equiv C^{(1)} \times C_i^{(2)}$$

quindi

$$b_i \times b_i \equiv C^{(1)} \times C^{(2)} - C^{(1)} \times C_i^{(2)} - C_i^{(1)} \times C^{(2)} + C_i^{(1)} \times C_i^{(2)}.$$

Sostituendo nella (1) si ha

$$\overline{T}^* \equiv \overline{T} + (k+1)\, C^{(1)} \times C^{(2)} + \Sigma \left(- C^{(1)} \times C_i^{(2)} - C_i^{(1)} \times C^{(2)} + C_i^{(1)} \times C_i^{(2)}\right).$$

Di qui, segando i due membri con $\overline{U}$ e notando che $\left(C_i^{(1)} \times C_i^{(2)}, \overline{U}\right) \equiv 0$, mentre ciascuno dei gruppi $\left(C^{(1)} \times C^{(2)}, \overline{U}\right)$, $\left(C_i^{(1)} \times C^{(2)}, \overline{U}\right)$, $\left(C^{(1)} \times C_i^{(2)}, \overline{U}\right)$

risponde su $\bar{F}$ ad un gruppo dell'involuzione $\bar{I}_m$, si ha, sulla superficie $\bar{F}$, la relazione

$$(T^*, U) \equiv (T, U) + (k+1)\,\bar{G} - 2k\bar{G} \equiv (T, U) - (k-1)\,\bar{G}$$

ove $\bar{G}$ è un gruppo dell'involuzione. D'altra parte, nel lavoro citato, Severi ha dimostrato che

$$\bar{S} \equiv 4\,\bar{G} - (T^*, U)$$

ove $\bar{S}$ è un gruppo della serie di Severi di $\bar{F}$; si ha dunque

$$\bar{S} \equiv (3+k)\,\bar{G} - (T, U).$$

Se ora si ritorna alla superficie F, $\bar{G}$ si muta in un gruppo G dell'involuzione I_m; (T, U), gruppo jacobiano (o equivalenza funzionale della curva doppia) dell'involuzione $\bar{I}_m$, si muta nel gruppo jacobiano di I_m, che continueremo ad indicare con (T, U); il gruppo $\bar{S}$ si trasforma nel gruppo S della serie di Severi di F aumentata dai punti che si mutano in curve eccezionali di $\bar{F}$, ossia dei gruppi $G_1, \cdots, G_h$ dell'involuzione I_m; si ha dunque

$$S \equiv (3 + k - h)\,G - (T, U).$$

Tenuto conto che il genere lineare di Φ è dato da

$$p^{(1)} = 10 + h - k$$

si ottiene infine

$$S \equiv (13 - p^{(1)})\,G - (T, U).$$

2. Per esaminare il comportamento delle curve fondamentali di una rete generatrice dell'involuzione, osserviamo che, rappresentando i gruppi dell'involuzione con i punti di un piano π, che risulterà in corrispondenza $(1, m)$ con la superficie F, le reti generatrici dell'involuzione sono tutte e sole le trasformate delle reti omaloidiche di π.

Sia $|C|$ una rete generatrice, ed ω una sua curva fondamentale, tale che il sistema residuo $|C_1| = |C - \omega|$ non abbia componenti fisse; detto ν il grado virtuale di ω, considerando assegnati su di essa i punti base di $|C|$, si ha $-\nu \leq m$. Proviamo che la ω non è fondamentale per l'involuzione, se $-\nu = m$. In questa ipotesi si ha infatti

$$[C_1, \omega] = [C - \omega, \omega] = -[\omega, \omega] = m$$

$$[C_1, C_1] = [C - \omega, C - \omega] = [C, C] - 2[C, \omega] + [\omega, \omega] = 0$$

ossia: le curve C_1 segano ω, fuori dei punti base di $|C|$, in m punti; il fascio $|C_1|$ ha punti base solo nei punti base di $|C|$. Se ne deduce che gli m punti del gruppo (C_1, ω) sono tutti variabili. Sia P un punto di ω, diverso dai punti base di $|C|$; esso individua una curva C_1, e quindi il gruppo dei punti (C_1, ω), costituito da $P = P_1, P_2, \cdots, P_m$.

Il gruppo $P_1, \cdots, P_m$ è un gruppo dell'involuzione. Infatti le curve $|C|$ segano su C_1 una g^1_m, costituita da gruppi dell'involuzione; sia $|\bar{C}|$ un fascio di curve di $|C|$ che seghi la g^1_m su C_1; quando la $\bar{C}$, variando nel fascio, si spezza nella ω e in una residua C_1, la curva $C_1 + \omega$ sega su C_1 il gruppo $P_1, \cdots, P_m$; questo gruppo appare dunque come limite di un gruppo dell'involuzione, e pertanto è esso stesso un gruppo dell'involuzione.

Il gruppo di I_m individuato da $P = P_1$ è unico; infatti sia $\bar{G}$ un gruppo variabile dell'involuzione che abbia per limite un gruppo G_0, contenente P; $\bar{G}$ appartiene, per ogni sua posizione, ad una $\bar{C}_1$ di $|C_1|$; il limite di $\bar{C}_1$, quando $\bar{G}$ tende a G_0 è la C_1 per P; su C_1 i gruppi dell'involuzione formano una g^1_m; quindi P individua un solo gruppo dell'involuzione.

Supponiamo ora $-\nu < m$, ossia $-\nu = m - h$, con $h > 0$; proviamo che in questo caso ω è fondamentale per l'involuzione. Con le notazioni già adottate si avrà che il fascio $|C_1|$ ha qualche punto base, fuori dei punti base di $|C|$, e le curve C_1 segano ω solo in $m - h$ punti. Ragionando come nel caso precedente, si vede che il gruppo individuato da un punto P di ω, diverso dai punti base di $|C_1|$, è costituito dalle intersezioni di C_1 con una curva $\bar{C}_1 + \omega$ di $|C|$ che contiene come parte ω, ed è quindi costituito dal gruppo delle intersezioni di C_1 con ω, e dai punti base di $|C_1|$, che non sono punti base di $|C|$, contati con una certa molteplicità. Questi ultimi punti non variano, al variare di P, e quindi ω è fondamentale.

3. Aggiungiamo le seguenti osservazioni.

a) Detta Ω una curva fondamentale per l'involuzione, si può sempre trovare qualche rete generatrice dell'involuzione, per la quale Ω non sia fondamentale.

Sia infatti $|C|$ una rete di curve generatrice dell'involuzione, per la quale Ω sia fondamentale; se si riferiscono proiettivamente le sue curve alle rette di un piano π, la curva Ω corrisponderà all'intorno di un punto O di π; scegliendo una rete omaloidica di curve di π che abbia un punto base in O, ad essa corrisponderà sulla superficie F una rete generatrice dell'involuzione, che non ha Ω come curva fondamentale.

b) Possono esistere delle curve fondamentali per l'involuzione, che non sono fondamentali per nessuna rete generatrice dell'involuzione.

Infatti, detta Ω una curva fondamentale per l'involuzione e $|C|$ una rete generatrice che non abbia Ω come curva fondamentale, riferendo le curve di $|C|$ alle rette di un piano π, la curva Ω si trasforma in una curva razionale $\bar{\Omega}$ di π; affinchè esista su F una rete generatrice dell'involuzione che possegga Ω come curva fondamentale occorre e basta che la curva Ω sia cremonianamente trasformabile in una retta; e cioè che Ω sia priva delle successive aggiunte; questa condizione non è sempre verificata, come dimostra il seguente esempio.

Si consideri una rete di curve $|C|$, di ordine abbastanza elevato, in un piano α, avente un punto sestuplo, a tangenti variabili, nell'origine delle coordinate; scegliendo opportunamente la rete $|C|$ si può ottenere che la

g_6^2 subordinata dalle tangenti alle C in O, sia dotata solo di coppie neutre (e non di gruppi neutri di un numero maggiore di rette); queste coppie neutre sono 10. La serie caratteristica di $|C|$ è un'involuzione razionale, che ha O come punto fondamentale; se si rappresentano le curve di $|C|$ con le rette di un piano, all'intorno di O corrisponde una curva $\bar{\Omega}$ del sesto ordine, dotata di 10 punti doppi, e quindi non trasformabile nell'intorno di un punto. La curva Ω luogo dei punti coniugati ai punti infinitamente vicini ad O è dunque una curva fondamentale per l'involuzione generata da $|C|$, e non può essere fondamentale per nessuna rete generatrice dell'involuzione.

Geometria. — *Le superficie razionali prive di curve eccezionali di prima specie.* Nota di G. VACCARO, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

È noto che le curve eccezionali di seconda specie si presentano esclusivamente sulle superficie razionali o riferibili a rigata (1), ma queste possono anche contenere curve eccezionali di prima specie (2).

Ora per le superficie rigate è noto il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una rigata astratta di genere maggiore di zero sia priva di curve eccezionali di prima specie è che tutte le generatrici siano irriducibili (3).

In particolare, pertanto, tutte le rigate proiettive di genere maggiore di zero non possiedono curve eccezionali di prima specie (il che è evidente *a priori*, perchè una curva eccezionale, essendo razionale, non può segare una generatrice generica).

Nella presente Nota determino le superficie razionali che non possiedono curve eccezionali di prima specie, dimostrando il teorema:

Le sole superficie razionali che non possiedono curve eccezionali di prima specie sono, oltre i coni razionali astratti (4), *quelle di ordine invariantivo relativo* (5) 1 *o* 2.

Si trae quindi la conseguenza che *le superficie razionali il cui numero base è* 1 *sono tutte lineari.*

(*) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) Cfr. G. CASTELNUOVO e F. ENRIQUES, *Su alcune proprietà fondamentali nella teoria delle superficie algebriche.* « Ann. Mat. », serie 3ª, to. VI (1901).

(2) Le superficie razionali possono anche contenere infinite curve eccezionali di prima specie. Cfr. A. FRANCHETTA, *Sulle curve eccezionali di prima specie appartenenti a una superficie algebrica.* « Boll. U. M. I. », ser. II, a. III, n. 1 (1940).

(3) Cfr. F. SEVERI, *Sulla classificazione delle rigate algebriche.* « Rend. di Mat. e delle sue applicaz. », ser. V, vol. II, n. 3 (1941).

(4) Cfr. F. SEVERI, loc. cit. in (3), n. 15.

(5) I concetti di ordini invariantivi assoluto e relativo sono stati introdotti da F. SEVERI. Cfr. *Conferenze di geometria algebrica*, raccolte da B. SEGRE, Bologna, Zanichelli, p. 63 (1930). Cfr. anche F. SEVERI, *Serie, sistemi di equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche.* Roma, Ed. Cremonese, p. 20 (1942).

1. Sia F una superficie razionale priva di curve eccezionali di prima specie. Il sistema lineare rappresentativo delle sezioni piane o iperpiane della F sarà dato, su un piano π, da un sistema di curve C, $|C|$, dotato di un certo numero e di punti base, che possiamo supporre tutti distinti. L'intorno di uno dei punti base corrisponde ad una curva eccezionale della F, che per ipotesi non può essere di prima specie; ne segue che per quel punto base deve passare qualche curva fondamentale per il sistema $|C|$ che si trasformi in un punto semplice della superficie F: il suo grado virtuale (considerati i punti base di $|C|$ come assegnati) risulta pertanto -1. Possiamo dunque affermare che l'ipotesi che la F sia priva di curve eccezionali di 1ª specie porta che su π ogni punto base di $|C|$ deve stare su almeno una curva θ di genere virtuale zero e grado virtuale -1, che sia fondamentale per $|C|$, ed inoltre ogni altra curva di genere e grado virtuali zero e -1, che non sia fondamentale per $|C|$ deve incontrare almeno una curva θ; in particolare debbono incontrare una curva θ le rette che congiungono a due a due gli e punti base, qualora esse non siano fondamentali per $|C|$.

Ogni curva θ possiede pertanto le seguenti proprietà:

a) ha genere virtuale zero;

b) ha grado virtuale -1;

c) ha una sola intersezione con le curve del sistema $|C-\theta|$, escluse le intersezioni assorbite dal gruppo base assegnato.

Inoltre sussiste la proprietà:

d) i punti base di $|C|$ sopra una curva θ (con le loro molteplicità) offrono alle θ condizioni indipendenti.

Infatti, se r indica l'ordine della θ ed $r_1, r_2, \cdots, r_e$ le sue molteplicità negli e punti base $A_1, A_2, \cdots, A_e$, essendo la θ di genere virtuale zero, è:

$$\frac{1}{2}(r-1)(r-2)-\sum_{h=1}^{e}\frac{1}{2}r_h(r_h-1)=0$$

da cui:

$$r^2-\sum_{h=1}^{e}r_h^2-3r+\sum_{h=1}^{e}r_h+2=0$$

ma, per la *b*) è:

$$r^2-\sum_{h=1}^{e}r_h^2=-1$$

e quindi:

$$3r-\sum_{h=1}^{e}r_h=1.$$

Ne viene:

$$\frac{1}{2}r(r+3)-\sum_{h=1}^{e}\frac{1}{2}r_h(r_h-1)=0$$

con che la proprietà risulta dimostrata.

Ora, le 4 proprietà suesposte caratterizzano le curve irriducibili che si staccano dall'aggiunto del sistema $|C|$ [6].

(6) Cfr. F. Conforto, *Le superficie razionali*. Bologna, Zanichelli, p. 212 (1945).

Ma ogni sistema lineare dal cui aggiunto si stacchino delle curve fisse $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_\varrho$, può essere ridotto ad un sistema

1° privo di curve θ; ovvero

2° dotato di una curva θ che sia una retta congiungente due punti A e B molteplicità r, s, con $r + s = n$, il sistema trasformato $|C|$ non avendo altri punti base che A e B; ovvero:

3° dotato di $\sigma \leqq \varrho$ curve θ, ridotte a σ rette congiungenti un punto O di molteplicità $n - r$ massima, con dei punti $A_1, A_2, \cdots, A_\sigma$, di molteplicità r, infinitamente vicini ad O sulle σ rette predette (7).

Nelle nostre ipotesi il primo caso non può verificarsi, a meno che il sistema $|C|$ trasformato risulti privo di punti base, nel qual caso la superficie F risulta in corrispondenza birazionale senza eccezioni col piano. Nel caso 2° la F è una superficie in corrispondenza birazionale senza eccezioni con una quadrica; nel caso 3° la F è un cono astratto. Si conclude pertanto che *le superficie razionali prive di curve eccezionali di prima specie sono, oltre i coni razionali astratti, il piano, la quadrica e le loro trasformate birazionali senza eccezioni, cioè* (secondo Severi) *quelle di ordine invariantivo relativo* 1 *o* 2.

OSSERVAZIONE. – Le superficie algebriche il cui numero base è uguale ad 1 non possiedono curve effettive di grado $\nu \leqq 0$ (8) e non possono quindi possedere curve eccezionali di prima specie. In particolare, dunque, per il teorema precedentemente dimostrato, le superficie razionali il cui numero base è 1 si possono mettere in corrispondenza birazionale senza eccezioni col piano (sia i coni che la quadrica hanno infatti numero base 2); e si conclude come si è enunciato alla fine dell'introduzione.

Geometria. — *Questioni di equivalenza relative alle curve riducibili e ai punti base di un fascio di curve sopra una superficie algebrica.* Nota I di A. ANDREOTTI, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

Una questione importante per stabilire alcuni teoremi di geometria sopra una superficie algebrica, è di dimostrare che nel calcolo dell'invariante di Zeuthen-Segre di una superficie algebrica F mediante gli elementi di un fascio H, il contributo portato dalle curve dotate di punto doppio o riducibili è sempre non negativo (1).

(7) Cfr. F. CONFORTO, loc. cit., p. 209 e sgg.

(8) Cfr. F. SEVERI, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*. « Math. Annalen », Bd. 62, p. 216 (1906). Tali superficie non posseggono anzi curve (virtuali) di grado zero che non siano divisori dello zero algebrico.

(*) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) La ricerca fu iniziata, fino al punto che occorreva per i loro scopi, da CASTELNUOVO–ENRIQUES nella Memoria, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*. « Annali di Matematica », t. VIII, 1901.

La ricerca è stata approfondita e conclusa da Campedelli [2] sotto la ipotesi che la superficie sia priva di curve eccezionali di prima specie e che il fascio non abbia punti base.

Ci occuperemo anzitutto (n. 1, 2) del problema di trovare l'equivalenza funzionale entro un gruppo della serie di Severi [3], delle curve riducibili e dei punti base del fascio H. Nella Nota II (dal n. 3 in poi) presenteremo sotto forma più semplice la dimostrazione un po' laboriosa del risultato di Campedelli e la libereremo dalle suddette ipotesi restrittive, valendoci della traduzione numerativa dell'equivalenze precedentemente stabilite.

1. Supporremo la superficie F priva di singolarità, immersa in un conveniente spazio (ciò che non è restrittivo); svolgeremo dapprima l'analisi nel caso che H sia un fascio razionale facendo su H alcune ipotesi restrittive di cui ci libereremo in un secondo tempo e passeremo quindi al caso che il fascio sia irrazionale.

a) Il fascio H *sia razionale.* Supponiamo dapprima che, inoltre, la generica curva di H sia irriducibile e che H sia privo di punti base.

Siano:

$$C' = \mu'_1 \Theta + \cdots + \mu'_{h_1} \Theta_{h_1}; \quad C'' = \mu''_1 \Theta''_1 + \cdots + \mu''_{h_2} \Theta''_{h_2}; \cdots; \quad C^{(k)} = \mu^{(k)}_1 \Theta^{(k)}_1 + \cdots + \mu^{(k)}_{h_k} \Theta^{(k)}_{h_k},$$

le curve riducibili di H, spezzate rispettivamente nelle componenti irriducibili Θ^i_r contate μ^i_r volte rispettivamente, $(i = 1, 2, \cdots, k; r = 1, 2, \cdots, h_i)$.

Sia L un fascio generale di curve D, genericamente disposto rispetto ad H e sia $\mathcal{T}$ la curva dei contatti delle C colle D.

La $\mathcal{T}$ conterrà come parti le Θ^i_r, contate rispettivamente $\mu^i_r - 1$ volte, cosicchè avremo:

$$\mathcal{T} = T + \sum_i^k \sum_r^{h_i} (\mu^i_r - 1)\,\Theta^i_r$$

ove con T si è indicata la parte residua che non può mancare.

Consideriamo su T il gruppo jacobiano della serie g^1 (lineare o d'equivalenza secondo che T è o no irriducibile) segatavi dal fascio H.

Questo gruppo equivale su T al gruppo

$$2\,(C, T) + M\,(T)\ [4].$$

2. CAMPEDELLI. *Sul computo dell'invariante di Zeuthen-Segre per una superficie algebrica* e *Ancora sul computo dell'invariante di Zeuthen-Segre per un superficie algebrica.* Rend. Acc. Naz. Lincei », t. XIX, 1934. V. anche una Nota di GODEAUX nelle «Mémoires de la Société des Sciences du Hainaut », 1920.

3. Si veda per la nozione di serie di equivalenza e di serie di SEVERI il volume di SEVERI: *Serie e sistemi di equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* a cura di F. CONFORTO ed E. MARTINELLI, ed. Cremonese, Roma 1942 ed anche per l'introduzione di questi concetti, dal punto di vista gruppale, la Memoria dello stesso autore su *Commentarii matematici helvetici*, 1948, fasc. 3°. Pel problema in esame vedasi volume citato, p. 240, nota a piè di pagina.

4. Con M T si suole indicare un gruppo canonico della curva T. Se T è spezzata si veda op. cit. in (3) alla pagina precedente: p. 181.

D'altra parte questo medesimo gruppo consta:

1° del gruppo $\dot{J}_C$ dei punti doppi « isolati » delle curve di H; In $\dot{J}_C$ vanno contati anche gli eventuali punti doppi delle Θ_r^i ciascuno $2\mu_r^i - 1$ volte.

Invero T deve passare semplicemente per ciascuno di essi, altrimenti ognuno di quei punti sarebbe $(2\mu_r^i - 2)$-plo per $\mathfrak{T}$ e non $(2\mu_r^i - 1)$-plo com'è necessario (5).

2° del gruppo Ω dei punti di « osculazione » delle curve di H con quelle di L.

3° del gruppo (D , D) dei punti base di L.

4° dei k gruppi $\sum_{C(r,s)} (\mu_r^i + \mu_s^i - 1)\,(\Theta_r^i , \Theta_s^i)$ $(i = 1 , 2 , \cdots , k)$; la sommatoria essendo estesa alle combinazioni semplici degli indici r , s $(r , s = 1 , 2 , \cdots , h_i)$.

Invero ciascuno dei punti del gruppo $(\Theta_r^i , \Theta_s^i)$ è $(\mu_r^i + \mu_s^i)$-plo per C^i epperò, ragionando come in 1°), là T vi deve passare semplicemente.

5° dei k gruppi $\sum_1^{h_i} (\mu_r^i - 1)\,\{ 2\,(D , \Theta_r^i) + M\,(\Theta_r^i) \}$ $(i = 1 , 2 , \cdots , k)$, costituiti dai gruppi jacobiani delle serie lineari segate da L sulle Θ_r^i ciascuno contato $\mu_r^i - 1$ volte.

Invero T deve passare semplicemente per ciascuno di quei punti, dato che, avendosi ivi un contatto $2\mu_r^i$-plo, la $\mathfrak{T}$ deve avere in quel punto $2\mu_r^i - 1$ intersezioni con la D ivi tangente.

Si ha pertanto su T l'equivalenza:

$$(1) \qquad 2\,(C , T) + M\,(T) \equiv \dot{J}_C + \Omega + (D , D) +$$

$$+ \sum_1^k \sum_{C(r,s)} (\mu_r^i + \mu_s^i - 1)\,(\Theta_r^i , \Theta_s^i) + \sum_1^k \sum_1^{h_i} (\mu_r^i - 1)\,\{ 2\,(D , \Theta_r^i) + M\,(\Theta_r^i) \}.$$

Analogamente, considerando la serie segata su T dal fascio L si ha su T l'altra equivalenza:

$$(2) \qquad 2\,(D , T) - 2\,(D , D) + M\,(T) \equiv \dot{J}_D + \Omega.$$

Ora il gruppo (C , T) equivale su C al gruppo jacobiano della g^1 segatavi da L. Pertanto:

$$(3) \qquad (C , T) \equiv 2\,(C , D) + M\,(C).$$

Analogamente considerando la g^1 segata da H su una D generica, si ha:

$$(D , \mathfrak{T}) \quad (D , D) = (D , T) + \sum_1^k \sum_1^{h_i} (\mu_r^i - 1)\,(D , \Theta_r^i) - (D , D) = 2\,(C , D) + M\,(D)$$

ossia:

$$(4) \qquad (D , T) = (D , D) + 2\,(C , D) + M\,(D) - \sum_1^k \sum_1^{h_i} (\mu_r^i - 1)\,(D , \Theta_r^i).$$

(5) Un punto α-plo di g^1 si deve contare $\alpha - 1$ volte nel gruppo jacobiano. Vedi SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*. Zanichelli, Bologna, p. 113 (1926).

Ma gruppi equivalenti su una stessa curva risultano equivalenti anche su F. Le relazioni (1), (2), (3), (4), si possono quindi pensare come equivalenze superficiali.

Eliminando Ω da (1) e (2) e sostituendo i gruppi (C , T) e (D , T) colle espressioni fornite da (3) e (4), otteniamo in definitiva l'equivalenza superficiale:

$$(5) \qquad S \equiv \dot{J}_D - 2\,M\,(D) - (D\,,\,D) \equiv$$

$$\equiv \dot{J}_C - 2\,M\,(C) + \sum_1^k{}_i \sum_{C(r\,s)} (\mu_r^i + \mu_s^i - 1)\,(\Theta_r^i\,,\,\Theta_s^i) + \sum_1^k{}_i \sum_1^{h_i}{}_r (\mu_r^i - 1)\,M\,(\Theta_r^i).$$

La (5) mostra che, nel caso in esame, l'*equivalenza funzionale entro S dovuta alla presenza in* H *di curve riducibili, è data dal gruppo*:

$$(6) \qquad \sum_1^k{}_i \sum_{C(r\,s)} (\mu_r^i + \mu_s^i - 1)\,(\Theta_r^i\,,\,\Theta_s^i) + \sum_1^k{}_i \sum_1^{h_i}{}_r (\mu_r^i - 1)\,M\,(\Theta_r^i).$$

L'equivalenza (5) è sempre valida anche se H è tutto costituito di curve riducibili senza componenti fisse: basta indicare con C^1 , C^2 , $\cdots$, C^t, quelle curve del fascio con componenti multiple o ulteriormente spezzate.

Invero la sola modificazione da portare al ragionamento precedente è che in luogo della serie lineare g^1 segata da L su C, va considerata la serie di equivalenza segata da L sulla curva riducibile C. La (3) conserva il suo significato di equivalenza curvilinea e la (5) vale inalterata.

Liberiamoci ora dall'altra ipotesi restrittiva che il fascio H sia privo di punti base.

Supponiamo dapprima che H possieda solo punti base ordinari (semplici o multipli). Allora la (5) va sostituita colla:

$$(7) \qquad S \equiv \dot{J}_C - 2\,M\,(C) - G_C + \sum_1^k{}_i \sum_{C(r\,,\,s)} (\mu_r^i + \mu_s^i - 1)\,(\Theta_r^i\,,\,\Theta_s^i) +$$

$$+ \sum_1^k{}_i \sum_1^{h_i}{}_r (\mu_r^i - 1)\,M\,(\Theta_r^i)$$

ove G_C indica il gruppo dei punti base ciascuno preso una sola volta e ove nei gruppi J_C, $(\Theta_r^i\,,\,\Theta_s^i)$ non si tenga conto dei punti che cadono nei punti base.

Invero supposto per semplicità, che H abbia un sol punto base O siffatto, con una trasformazione birazionale si porti F in una superficie F_1 in modo che O si muti in una curva o_1 eccezionale di prima specie e senza che nascano altre curve eccezionali su F o su F_1 [6].

Il fascio omologo di H, quando O si pensi come punto base assegnato di molteplicità uguale alla effettiva, è privo di punti base e ad esso appli-

(6) Si può, ad esempio, prendere per F_1 l'immagine proiettiva di F eseguita mediante il sistema lineare segato su F dalle forme quadriche per O. Cfr. op. cit., p. 219.

casi la (5). Se S_1^* e S_1 sono rispettivamente il trasformato di un gruppo S di F ed un gruppo della serie di Severi di F_1 detto Q un punto qualsiasi di o_1 si ha su F_1 l'equivalenza superficiale:

$$S_1^* \equiv S_1 - Q \equiv \mathfrak{J}_{C_1} - 2\,M(C_1) - Q + \sum_1^k{}_i \sum_{(r,s)} (\mu_r^i + \mu_s^i - 1)(\Theta_r^i, \Theta_s^i) +$$

$$+ \sum_1^k{}_i \sum_1^{h_i}{}_r (\mu_r^i - 1)\, M(\Theta_r^i)$$

onde ripassando da F_1 a F si ha la (7).

Il procedimento si estende ovviamente al caso di punti base qualsiasi. Dovremo operare sui punti base di H e sui loro trasformati con successive trasformazioni birazionali del tipo indicato, fino a far scomparire del tutto quei punti base; dovremo applicare la (5) al fascio che si ottiene per ultimo e ripassare quindi alla superficie di partenza.

In questo modo:

1° ciascun punto base O di H viene contato in G_C tante volte quant'è il numero delle curve eccezionali di prima che occorre introdurre successivamente per farlo sparire come punto base del fascio.

Se è nota la composizione del punto base (cioè la struttura della singolarità che in esso presenta la curva formata con due curve generiche del fascio, quando ogni suo punto 2μ–plo immediato o infinitamente vicino, si conti come punto base μ–plo) ed s è la *specie* di quella singolarità, quel numero è uguale al *numero dei punti base distinti che trovansi rispettivamente negli intorni degli ordini da* 0 *ad* s (*inclusi*) *del punto* O (7).

2° nel gruppo $\mathfrak{J}_C$ non vengono considerati quei punti che eventualmente cadessero nei punti base.

3° nella costruzione del gruppo $\sum_1^k{}_i \sum_{C(r,s)} (\mu_r^i + \mu_s^i - 1)(\Theta_r^i, \Theta_s^i) +$ $+ \sum_1^k{}_i \sum_1^{h_i}{}_r (\mu_r^i - 1)\, M(\Theta_r^i)$ va tenuto conto di quelle curve razionali (infinitesime su F), che vengono a far parte come componenti semplici o multiple di curve del fascio che passano pei punti base con molteplicità diverse da quelle della curva generica.

Precisamente, *se la curva* C *di* H *ha in ogni punto base* μ*–plo immediato o infinitamente vicino, un punto* μ'*–plo, ciascuno di essi va pensato come una curva infinitesima facente parte di* C *con molteplicità uguale a:* $\dfrac{\Sigma\,\mu(\mu - \mu')}{\Sigma\,\mu}$ *ove la somma al numeratore va estesa a tutti i punti base successivi a quello considerato sui vari rami uscenti da esso, mentre la somma al denominatore va estesa solo ai punti base prossimi a quello in esame.*

Nel computo dei numeri μ' *va tenuto conto anche della presenza delle curve infinitesime precedentemente aggiunte le quali passano semplicemente pei punti prossimi a quello da cui provengono.*

(7) Vedi ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Zanichelli, Bologna, vol. II, libro IV; in particolare p. 409 e segg. (1918).

Ed invero sciogliendo nel modo indicato il punto O, la curva o_1 introdotta passa semplicemente pei punti (omologhi dei) punti prossimi ad O sicchè essa andrà considerata come facente parte della C un numero x di volte tale che:

$$(\alpha) \qquad \Sigma \mu (\mu^1 + x) + \Sigma \mu\mu^1 = \Sigma \mu^2$$

ove la prima sommatoria va estesa ai punti prossimi ad O, la seconda ai rimanenti punti successivi ad O e la terza a tutti i punti successivi ad O.

Infatti la (α) si ottiene scrivendo che in ciascuno dei nuovi punti base che si generano su o_1 (provenienti dai vari gruppi di punti prossimi ad O) la curva omologa di C, ha con la curva generica la stessa molteplicità d'intersezione che ivi presentano due curve generiche del fascio, e sommando le relazioni ottenute. Da (α) traesi la formula cercata pel punto O.

Lo stesso ragionamento vale poi per un qualsiasi punto base successivo ad O purchè si tenga conto delle curve eccezionali già introdotte e che fanno parte di C.

Ad esempio: si consideri nel piano (x_0, x_1, x_2) il fascio di cubiche cuspidate $x_0 x_2^2 + \lambda x_1^3 = 0$ aventi a comune in $A_0 = (1, 0, 0)$ la cuspide e la relativa tangente cuspidale $A_0 A_1$ $(A_1 = (0, 1, 0))$ e in $A_2 = (0, 0, 1)$ il flesso e la relativa tangente di flesso $A_2 A_1$.

Il punto A_0 va contato in G_C tre volte essendo costituito dal punto doppio A_0 cui sono *prossimi* due punti semplici successivi A_0', A_0'' sullo stesso ramo.

Il punto A_2 va contato in G_C anch'esso tre volte essendo costituito da tre punti semplici successivi A_2, A_2', A_2'' su un ramo lineare.

Inoltre $x_0 x_2^2 = 0$ contiene la curva razionale infinitesima A_0' semplicemente.

La curva $x_1^3 = 0$ contiene le curve razionali infinitesime A_0, A_2, A_2' come componenti rispettivamente semplice, doppia e semplice [8].

b) *Il fascio* H *sia di genere* $\omega > 0$. Si consideri entro H una serie lineare g_n^1 generica di gruppi di h curve. Il gruppo jacobiano della g_h^1 sarà costituito esclusivamente da curve doppie non spezzate [9]. Indicando con $C_1 + C_2 + \cdots + C_{2\omega-2}$ un gruppo canonico di curve entro H e con

(8) Calcolando, come riprova, l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE mediante la (7) otteniamo

$$[J_C] = 0 \;, \quad [M(C_i)] = 2 \;, \quad [G_C] = 6 \;, \quad \sum_1^k{}_i \sum_{(r,s)} (\mu_r^i + \mu_s^i - 1)\,[\Theta_r^i, \Theta_s^i] = 13 \;,$$

$$\sum_1^k{}_i \sum_1^{h_i}{}_r (\mu_r^i - 1)\,[M(\Theta_r^i)] = -8 \quad \text{epperò} \quad I = -1 \,.$$

(9) Supponiamo che le curve di H non siano tutte spezzate, cioè che H non sia costituito con una involuzione irrazionale entro un altro fascio irrazionale. Questo caso, del resto, può essere trattato alla stessa stregua di quello preso in considerazione; la formula (8) rimane invariata purchè si ricordi la nozione di gruppo canonico $M(C_i)$ di una curva C_i riducibile. V. op. cit., p. 181.

$C' + C'' + \cdots + C^{(h)}$ un gruppo generico di g^1_h, quel gruppo jacobiano equivale linearmente su H e quindi su F al gruppo di curve $2\sum_1^h C^{(i)} + \sum_1^{\omega-2} C_i$.

Pertanto dalla (5), applicandola al caso di un fascio lineare di curve riducibili, si ha con le solite notazioni;

$$
\begin{aligned}
S \equiv J_C - 2\sum_1^h M(C^{(i)}) + \sum_1^k \sum_{C(r\,s)} (\mu_r^i + \mu_s^i - 1)(\Theta_r^i, \Theta_s^i) + \\
+ \sum_1^k \sum_1^{h_i} (\mu_r^i - 1) M(\Theta_r^i) + 2\sum_1^h M(C^{(i)}) + \sum_1^{2\omega-2} M(C_i) \\
\equiv J_C + \sum_1^{2\omega-2} M(C_i) + \sum_1^k \sum_{C(r,s)} (\mu_r^i + \mu_s^i - 1)(\Theta_r^i, \Theta_s^i) + \\
+ \sum_1^k \sum_1^{h_i} (\mu_r^i - 1) M(\Theta_r^i).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Onde si conclude che *anche in questo caso l'equivalenza funzionale delle curve spezzate del fascio entro* S *è data dal gruppo* (6).

2. La traduzione numerativa delle formule (5), (6), (7), (8), dà le formule stabilite da Castelnuovo, Enriques e Campedelli; in particolare le (7) e (8) dànno:

$$I = [J_C] - 4p - n + \sum_1^k \sum_{C(r,s)} (\mu_r^i + \mu_s^i - 1)[\Theta_r^i, \Theta_s^i] + \sum_1^k \sum_1^{h_i} (\mu_r^i - 1)(2\rho_r^i - 2)$$

$$
\begin{aligned}
I = [J_C] + 4(\omega - 1)(p - 1) + \sum_1^h \sum_{C(r,s)} (\mu_r^i + \mu_s^i - 1)[\Theta_r^i, \Theta_s^i] + \\
+ \sum_1^k \sum_1^{h_i} (\mu_r^i - 1)(2\rho_r^i - 2) - 4
\end{aligned}
$$

ove si è indicato con p il genere della curva generica del fascio, con ρ_r^i quello della componente Θ_r^i e con n l'equivalenza numerativa del gruppo base.

Meccanica. — *Vibrazioni forzate di un particolare sistema oscillante non lineare* (*). Nota di T. MANACORDA, presentata (**) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. In un suo studio sulla dinamica dei sistemi oscillanti non lineari (1), A. Wenke accenna come esempio di moto forzato di un sistema non lineare, al seguente: Un punto M di massa m è collegato a due punti fissi A e B con due fili elastici della stessa natura e può muoversi sulla retta che passa

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) A. WENKE, *Die Instabilität linearer und nichtlinearer Schwingungen*, « Hoch freq. tecnik und Elektroakustik », 55, pp. 94-101; 109-119 (1940). In particolare cfr. p. 114.

per il centro del segmento AB ed è ad esso ortogonale. La massa è poi collegata con un eccentrico che le imprime delle vibrazioni forzate lungo l'asse del moto.

Poichè pare che il sistema descritto possa schematizzare anche sistemi non lineari aventi interesse tecnico, è sembrato non del tutto inutile dare almeno due casi in cui è rigorosamente accertata l'esistenza e l'unicità di una soluzione periodica con lo stesso periodo della forza perturbatrice.

Detta c la costante elastica dei fili AM e BM, $c\lambda$ il valore della forza elastica esercitata da ciascun filo quando M è sul segmento AB, $2l$ la lunghezza del segmento AB, e indicata con $mf(t)$ la componente della forza perturbatrice lungo l'asse y di moto, l'equazione che regge il movimento è:

$$\ddot{y} - \frac{2c}{m}(l-\lambda)\frac{y}{\sqrt{l^2+y^2}} + \frac{2c}{m}y = f(t),$$

dove della radice si prende il valore aritmetico.

Supponiamo che la forza $f(t)$ sia periodica col periodo T *e di più dispari*; effettuando allora la trasformazione

$$(1) \qquad t = \frac{T}{2\pi}\tau \quad , \quad y = lx,$$

l'equazione di moto diviene

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{d\tau^2} + \Gamma^2 x = F(\tau) + B^2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

con

$$(3) \qquad B^2 = \frac{2c}{ml}(l-\lambda)\frac{T^2}{4\pi^2} \quad ; \quad \Gamma^2 = \frac{2c}{m}\frac{T^2}{4\pi^2};$$

$$F(\tau+2\pi) = F(\tau) \quad ; \quad F(-\tau) = -F(\tau).$$

Se ammettiamo, come è evidente dato il loro significato fisico, che $\lambda < l$, la costante B^2 risulta reale e positiva. Osserviamo anche che nelle nostre ipotesi risulta $B^2 < \Gamma^2$.

2. *a*) L'equazione da studiare è dunque la (2) con le ipotesi (3). Per un risultato già noto relativo ad una classe di equazioni differenziali non lineari in cui rientra anche la (2), (3), è assicurata l'esistenza e l'unicità di una soluzione periodica col periodo 2π quando sia $\Gamma^2 + 2B^2 < \frac{1}{4}$ (2). Nel nostro caso è possibile migliorare sensibilmente questo risultato provando che *se nell'equazione*

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{d\tau^2} + \Gamma^2 x = F(\tau) + B^2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

(2) T. MANACORDA, *Soluzioni periodiche di una equazione differenziale non lineare*. « Rend. Lincei », (8), I, pp. 1046–1050 (1946).

con

$$(3_1)\quad F(\tau+2\pi)=F(\tau)\ ;\ F(-\tau)=-F(\tau);\qquad (3_2)\quad 0<B^2<\Gamma^2,$$

è

$$(4)\qquad 0<F\leq\frac{1}{2},$$

la (2) *ammette una ed una sola soluzione periodica col periodo* 2π.

b) Osserviamo che se nella (2) si cambia τ in $-\tau$ e contemporaneamente x in $-x$, l'equazione non cambia, onde se proviamo che esiste una ed una sola soluzione $x(\tau)$ della (2) nulla in 0 e π, poichè la soluzione $-x(\tau)$ soddisfa ancora alla (2) tra $-\pi$ e 0, ne rimane accertata la nostra proposizione.

Adopereremo anche qui il metodo di Hamel [3] già utilizzato nella Nota citata in [2].

L'integrale generale della (2) ha la forma

$$(5)\qquad x(\tau)=a\,\mathrm{sen}\,(\Gamma\tau+\alpha)+$$
$$+\frac{1}{\Gamma}\int_0^{\tau}\mathrm{sen}\,\Gamma(\tau-\xi)\left\{F(\xi)+B^2\frac{x(\xi)}{\sqrt{1+x^2(\xi)}}\right\}d\xi,\quad (a\text{ ed }\alpha\text{ costanti}),$$

e l'integrale nullo in 0 e π è

$$(6)\qquad x(\tau)=-\frac{1}{\Gamma}\int_0^{\pi}K(\tau,\xi)\,F(\xi)\,d\xi-\frac{B^2}{\Gamma}\int_0^{\pi}K(\tau,\xi)\frac{x(\xi)}{\sqrt{1+x^2(\xi)}}\,d\xi,$$

avendo posto:

$$(7)\qquad \begin{cases} K(\tau,\xi)\,\mathrm{sen}\,\Gamma\pi=\mathrm{sen}\,\Gamma\xi\,\mathrm{sen}\,\Gamma(\pi-\tau) & ,\quad \text{per}\quad 0\leq\xi\leq\tau;\\ K(\tau,\xi)\,\mathrm{sen}\,\Gamma\pi=\mathrm{sen}\,\Gamma\tau\,\mathrm{sen}\,\Gamma(\pi-\xi) & ,\quad \text{per}\quad \tau\leq\xi\leq\pi, \end{cases}$$

e basterà dimostrare che nelle nostre ipotesi la (6) ha una ed una sola soluzione per provare l'assunto.

c) Ricorrendo al metodo delle approssimazioni successive, posto

$$x_0=-\frac{1}{\Gamma}\int_0^{\pi}K(\tau,\xi)\,F(\xi)\,d\xi\quad,\quad x_{n+1}=x_0-\frac{B^2}{\Gamma}\int_0^{\pi}K(\tau,\xi)\frac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2}}\,d\xi,$$

si ha

$$|x_1-x_0|\leq\frac{B^2}{\Gamma}\int_0^{\pi}|K(\tau,\xi)|\left|\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}\right|d\xi\leq\frac{B^2}{\Gamma}\int_0^{\pi}|K(\tau,\xi)|\,d\xi.$$

(3) G. HAMEL, *Ueber erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden*, «Math. Ann.», 86, pp. 1-13 (1922).

Osservando ora che nelle nostre ipotesi $K(\tau, \xi)$ è positivo o nullo, e che per $0 \leq \xi \leq \tau$ è $\operatorname{sen}\Gamma\xi \operatorname{sen}\Gamma(\pi - \tau) \leq \operatorname{sen}\Gamma\xi \operatorname{sen}\Gamma(\pi - \xi)$, e che per $\tau \leq \xi \leq \pi$, $\operatorname{sen}\Gamma\tau \operatorname{sen}\Gamma(\pi - \xi) \leq \operatorname{sen}\Gamma\xi \operatorname{sen}\Gamma(\pi - \xi)$, e che quindi:

$$\int_0^\pi K(\tau, \xi)\, d\xi \leq \frac{1}{\operatorname{sen}\Gamma\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}\Gamma\xi \operatorname{sen}\Gamma(\pi - \xi)\, d\xi \leq \frac{1}{2\Gamma},$$

si ottiene

$$|x_1 - x_0| \leq \frac{B^2}{2\Gamma^2}.$$

Si ha ancora

$$x_2 - x_1| \leq \frac{B^2}{\Gamma} \int_0^\pi K(\tau, \xi) \left| \frac{x_1}{\sqrt{1 + x_1^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{x_0}{\sqrt{1 + x_0^2}} \right| d\xi \leq \frac{2B^2}{\Gamma} \int_0^\pi K(\tau, \xi) |x_1 - x_0|\, d\xi,$$

poichè

$$\left| \frac{x_1}{\sqrt{1 + x_1^2}} - \frac{x_0}{\sqrt{1 + x_0^2}} \right| \leq \left| \frac{x_1}{\sqrt{1 + x_1^2}} - \frac{x_0}{\sqrt{1 + x_1^2}} \right| +$$

$$+ |x_0| \left| \frac{1}{\sqrt{1 + x_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + x_0^2}} \right| \leq 2 |x_1 - x_0|.$$

Si ottiene così $|x_2 - x_1| \leq B^4/2\Gamma^4$, e in generale

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{B^{2n}}{2\Gamma^{2n}}.$$

Ricordando adesso la (3_2), si vede che la serie delle approssimazioni successive converge uniformemente verso una soluzione $x(\tau)$ della (6), e che si ha

$$|x(\tau) - x_n(\tau)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{B^2}{\Gamma^2} \right)^{n+1} \Big/ \left(1 - \frac{B^2}{\Gamma^2} \right).$$

Si ottiene inoltre la seguente limitazione dell'ampiezza

$$|x_{\max}| \leq \frac{1}{\Gamma} \max \int_0^\pi K(\tau, \xi)\, F(\xi)\, d\xi + \frac{B^2}{2\Gamma^2}.$$

d) La soluzione così trovata è unica. Difatti se ne esistesse un'altra $X(\tau)$, si avrebbe:

$$|X - x_1| \leq \frac{B^2}{\Gamma} \int_0^\pi K(\tau, \xi) \left| \frac{X}{\sqrt{1 + X^2}} - \frac{x_0}{\sqrt{1 + x_0^2}} \right| d\xi \leq \frac{B^2}{\Gamma^2}$$

e iterando, $|X - x_n| \leq \frac{B^{2n}}{\Gamma^{2n}}$ dalla quale passando al limite per $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} |X - x_n| = 0 .$$

3. Un altro caso, immediato, in cui esiste una ed una sola soluzione della (2) periodica col periodo 2π si ha osservando che se $\frac{B^2 \pi}{\Gamma |\operatorname{sen} \Gamma\pi|} < 1$ il procedimento ora descritto conduce ancora ad una serie convergente, e che se inoltre $\frac{B^2 \pi}{\Gamma |\operatorname{sen} \Gamma\pi|} < \frac{1}{2}$ la soluzione così trovata è unica. Abbiamo dunque che *per un qualsiasi valore di* $\Gamma > 0$ *e diverso da un intero, è possibile determinare un numero* B_0 *positivo tale che per ogni valore positivo o negativo di* B *in valore assoluto non superiore a* B_0 *la* (2), *nelle ipotesi* (3_1) *ammette una ed una sola soluzione periodica col periodo* 2π.

Chimica. *Nuovi composti complessi di rutenio e di osmio* (*). Nota di G. A. Barbieri, presentata (**) dal Socio G. B. Bonino.

I punti di contatto della chimica del ferro con la chimica del rutenio e dell'osmio, che furono oggetto di altra Nota (1), sono così scarsi che ritengo non privi di interesse i composti metalamminici qui sotto descritti nei quali ferro, rutenio e osmio rivelano fra loro, tanto nella forma bivalente quanto in quella trivalente, rapporti molto stretti di analogia. Tali composti sono stati ottenuti per mezzo dell'α–α_1–dipiridile $C_{10}H_8N_2$.

Fin dal 1898 è noto, per le ricerche di F. Blau (2), che l'ione ferroso forma con l'α–α_1–dipiridile l'ione complesso $[Fe^{II} dip_3]^{2+}$ di colore rosso vivo e di singolare stabilità.

Nel 1936 F. H. Burstall (3) descrisse una nuova serie di sali complessi del rutenio bivalente che contengono l'ione $[Ru^{II} dip_3]^{2+}$ intensamente colorato in rosso aranciato e molto più stabile del corrispondente complesso ferroso.

L'analogia tra i composti di ferro–dipiridile e quelli corrispondenti di rutenio dipiridile si rivela, oltre che nell'uguaglianza del grado di idratazione, anche nella somiglianza delle forme cristalline dalla quale deriva la possibilità di formazione di cristalli misti.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica agraria dell'Università di Bologna.
(**) Nella seduta del 10 aprile 1948.
(1) G. A. Barbieri, « Rendiconti Accad. Lincei », vol. IX, 6, 1° sem. 1015 (1929).
(2) « Monatsh. f. Ch. », XIX, 647 (1898).
(3) « Journ. Chem Soc. », 173 (1936).

Tra l'ione ferro–dipiridile e l'ione rutenio–dipiridile sembrava però esistere, nel loro comportamento con gli ossidanti, una profonda differenza che ricordava la diversità di comportamento, pure di fronte agli ossidanti, degli anioni $[Ru^{II}(CN)_6]^{4-}$ e $[Os^{II}(CN)_6]^{4-}$ in confronto dell'anione $[Fe^{II}(CN)_6]^{4-}$.

Mentre F. Blau aveva osservato che l'ione $[Fe^{II}\,dip_3]^{2+}$ sotto l'azione di ossidanti energici, per esempio del cloro, si trasforma nell'ione $[Fe^{III}\,dip_3]^{3+}$ e da rosso diventa verde–azzurro, il Burstall afferma che il cloro è senza azione sull'ione $[Ru^{II}\,dip_3]^{2+}$.

Il fatto molto singolare mi parve degno di un esame accurato. Siccome avevo avuto occasione di constatare che i sali cerici ossidano facilmente l'ione ferro–dipiridile, ne ho voluto sperimentare l'azione a freddo sull'ione rutenio–dipiridile: questo da rosso aranciato diventò subito verde. Lo stesso risultato si ottenne impiegando come ossidante una soluzione di persolfato potassico addizionata di traccie di nitrato d'argento. Infine mi decisi a far passare a freddo una corrente di cloro in una soluzione concentrata del composto $[Ru^{II}\,dip_3]\,Cl_2\cdot 6\,H_2O$ e contrariamente all'affermazione di Burstall, la soluzione rosso–aranciata diventò verde smeraldo.

Dalla soluzione verde per aggiunta di perclorato o perrenato o cloroplatinato di sodio vennero ottenuti come precipitati cristallini, i seguenti composti poco solubili di colore verde:

$$[Ru^{III}\,dip_3]\,(ClO_4)_3 \quad [Ru^{III}\,dip_3]\,(ReO_4)_3 \quad \text{e} \quad [Ru^{III}\,dip_3]_2\,[PtCl_6]_3\cdot 8H_2O.$$

Questi risultati mi invogliarono a ricercare se anche l'osmio, l'omologo superiore del ferro e del rutenio, secondo il sistema periodico, potesse formare nella forma bivalente e in quella trivalente composti complessi con l'α–α_1–dipiridile. La ricerca ebbe pieno successo. Venne anzitutto isolata una serie di composti del rutenio bivalente aventi la formula generale $[Os^{II}\,dip_3]\,X_2\cdot nH_2O$.

Questi composti si presentano in cristalli lucenti di un verde nero. Le loro soluzioni in acqua e in alcool sono brune, giallo-verdi per riflessione e rosse per trasparenza. I composti di osmio–dipiridile sono perfettamente analoghi sia nel grado di idratazione che nelle forme cristalline, ai composti corrispondenti di rutenio e di ferro, coi quali formano cristalli misti. I complessi dell'osmio bivalente vengono facilmente ossidati a complessi dell'osmio trivalente che sono colorati in violetto lilla, hanno la formula generale $[Os^{III}\,dip_3]\,X_3$ e sono molto più stabili, specie alla luce, dei composti corrispondenti del ferro trivalente e del rutenio trivalente.

Parte sperimentale.

$[Ru^{II}\,dip_3]\,(ClO^4)_2$. Venne ottenuto per precipitazione con perclorato sodico dalle soluzioni del composto $[Ru^{II}\,dip_3]\,Cl_2\cdot 6H_2O$ preparato secondo Burstall. In questo composto e nei seguenti il rutenio venne dosato per

via fotometrica. Dall'esame al fotometro di Pulfrich di soluzioni titolate di $[Ru^{II} dip_3] Cl_2 \cdot 6 H_2O$ si constatò che l'ione colorato $[Ru^{II} dip_3]^{2+}$, in accordo con la sua grande stabilità, obbedisce perfettamente alla legge di Lambert-Beer e quindi è possibile, determinando l'estinzione specifica nella soluzione di un qualunque sale di rutenio-dipiridile, risalire, mediante il fattore analitico A, al contenuto in rutenio–dipiridile o in rutenio. L'anione perclorico venne dosato col nitron.

Trovato % Ru 13,30; ClO_4 26,12. Calcolato % Ru 13,21; ClO_4 25,98.

F. H. Burstall attribuisce al perclorato sei molecole di acqua di cristallizzazione. Io ho sempre ottenuto il sale anidro tanto preparandolo a caldo che a freddo. Con l'assenza dell'acqua di cristallizzazione sta in accordo anzitutto il fatto che il sale scaldato in stufa a 110° per più ore non perde nulla del suo peso, poi anche il fatto che esso forma cristalli misti col perclorato di ferro-dipiridile che è anidro.

$[Ru^{II} dip_3] Br_2 \cdot 6 H_2O$ ottenuto, secondo Burstall, dal cloruro con bromuro di sodio: si presenta in squamette lucenti monocline che formano cristalli misti col composto $[Fe^{II} dip_3] Br_2 \cdot 6 H_2O$.

$[Ru^{II} dip_3] (SCN)_2 \cdot 3 H_2O$ dalle soluzioni del cloruro con solfocianuro di sodio. Squamette aranciate lucenti.

Trovato % Ru 13,60; SCN 15,36. Calcolato % Ru 13,75; SCN 15,68

Forma cristalli misti con $[Fe^{II} dip_3) (SCN)_2 \cdot 3 H_2O$ e con $[Ni dip_3] (SCN)_2 \cdot 3 H_2O$.

$[Ru^{III} dip_3] (ClO_4)_3$. Nella soluzione di gr. 2 di $[Ru^{II} dip_3] Cl_2 \cdot 6 H_2O$ in 40 cc. di acqua si fa passare una corrente di cloro fino a comparsa della colorazione verde, poi al liquido verde si aggiunge ugual volume di soluzione di $NaClO_4$ al 20 %. Cristalli verdi prismatici triclini. Il dosamento del rutenio venne eseguito per via fotometrica, previa riduzione del catione complesso con anidride solforosa.

Trovato % Ru 11,62; ClO_4 33,89; Calcolato % Ru 11,72; ClO_4 34,17.

Il sale, oltre che da tutte le sostanze riducenti (SO_2, solfato ferroso, sali di idrazina, alcool, KJ ecc.) viene ridotto, specie in soluzione, dalla luce solare e dalla luce ultravioletta.

$[Ru^{III} dip_3] (ReO_4)_3$. Venne preparato come il precedente impiegando una soluzione concentrata di perrenato sodico. Cristalli verdi prismatici triclini. L'anione perrenico venne dosato col nitron.

Trovato % Ru 7,62; ReO_4 56,25. Calcolato % Ru 7,68; ReO_4 56,92.

$[Ru^{III} dip_3]_2 (PtCl_6)_3 \cdot 8 H_2O$. Si ottenne dalla soluzione del cloruro ossidata con cloro, per aggiunta di cloroplatinato di sodio. Nell'analisi il platino venne separato per riduzione con acido formico.

Trovato % Ru 7,99; Pt 23,30. Calcolato % Ru 8,12; Pt 23,32.

$[Os^{II} dip_3]Cl_2 \cdot 6 H_2O$. Gr. 0,5 di OsO_4 vennero sciolti con gr. 1 di cloridrato di idrazina in 10 cc. di acido cloridrico concentrato e si evaporò su bagno-maria fino quasi a secchezza. Al residuo, colorato in bruno-rossastro, si aggiunsero gr. 5 di dipiridile e si scaldò a fiamma diretta finchè la massa assunse color verde bottiglia. Tutta la massa venne introdotta in un apparecchio a distillazione in corrente di vapore per ricuperare il dipiridile in eccesso. Il liquido verde oliva rimasto venne filtrato ed evaporato a bagno-maria. Per raffreddamento depositò una sostanza costituita da cristalli laminari, monoclini, di colore verde cupo e molto lucenti.

Trovato %	Os	22,65;	N	9,78;	Cl	8,62
Calcolato %	Os	22,80;	N	10,05;	Cl	8,46.

Forma cristalli misti con $[Ru^{II} dip_3]Cl_2 \cdot 6 H_2O$. Il complesso $[Os^{II} dip_3]^{2+}$ è molto più stabile di $[Fe^{II} dip_3]^{2+}$ ma forse meno stabile di quello di rutenio.

$[Os^{II} dip_3] Br_2 \cdot 6 H_2O$ dalle soluzioni concentrate di cloruro di osmio-dipiridile con un eccesso di NaBr. Squamette verdi lucenti. Data la stabilità del complesso $[Os\ dip_3]^{2+}$ si potè dosare in questo composto l'osmio per via fotometrica, utilizzando i risultati ottenuti al fotometro con soluzioni titolate del composto precedente.

Trovato % Os 21,15; Br 17,12. Calcolato % Os 20,84; Br 17,25.

Questo sale forma cristalli misti coi composti corrispondenti del rutenio e del ferro.

$[Os^{II} dip_3](ClO_4)_2$ dalla soluzione del cloruro con perclorato di sodio. Prismi triclini lucenti di un verde nero.

Trovato % Os 22,50; Calcolato % 22,26.

Forma cristalli misti coi perclorati di ferro-dipiridile e di rutenio-dipiridile.

$[Os^{III} dip_3](ClO_4)_3$. Una soluzione concentrata di $[Os\ dip_3]Cl_2 \cdot 6 H_2O$ viene facilmente ossidata da una corrente di cloro assumendo una colorazione lilla-violetta. L'aggiunta di una soluzione concentrata di $NaClO_4$ alla soluzione violetta determina la formazione di un precipitato costituito da minuti cristalli violetti triclini, riuniti in ciuffi raggiati.

L'osmio venne dosato per via fotometrica, previa riduzione del complesso con anidride solforosa.

Trovato % Os 19,76; ClO_4 31,70. Calcolato % Os 19,95; ClO_4 31,17.

Cristallochimica. — *Sulla natura dei legami interleptonici entro il complesso* [SiF_6] *nei cristalli*(*). Nota di F. FUMI, presentata (**) dal Corrisp. C. PERRIER.

Si deve a Linus Pauling un utile metodo per lo studio dei legami intercorpuscolari nelle molecole e nei cristalli (1) sulla base dei risultati forniti dalla meccanica quantistica per gli orbitali atomici di legame.

Solo nel 1946 in una relazione al 3° Congresso della Società Mineralogica Italiana, C. Perrier e F. Fumi (2) richiamarono su questo metodo l'attenzione dei cristallografi italiani. Pochi mesi dopo A. Bellanca (3) pubblicò un lavoro strutturistico in cui, per la prima volta in Italia, concetti del Pauling trovarono sistematica applicazione nella interpretazione di una struttura cristallina.

Essendo ormai ben conosciuto, anche in Italia, il fondamento del metodo degli orbitali ibridizzati di Pauling non ci soffermiamo ad illustrarlo (4).

1. I dati strutturistici sul complesso *esafluorosilicico* nei cristalli sono molto numerosi.

Bozorth (5) studiò la struttura del $(NH_4)_2SiF_6$ cubico, Tabet (6) quella del Tl_2SiF_6. Gossner e Kraus (7) determinarono quella del $(NH_4)_2SiF_6$ trigonale; Schütz (8) indagò sul Cs_2SiF_6; infine Ketelaar (9) compì una sistematica ricerca su $(NH_4)_2SiF_6$ cubico, K_2SiF_6, Rb_2SiF_6, Cs_2SiF_6, Tl_2SiF_6.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) Senza elencare le numerosissime Note dedicate dal Pauling e dalla sua scuola all'argomento, ci limitiamo a citare le sette in cui Egli pose le basi del suo metodo:

L. PAULING, *The Nature of the Chemical Bond*: I) « J. Am. Chem. Soc. », *53*, 1367 (1931); II) « J. Am. Chem. Soc. », *53*, 3225 (1931); III) « J. Am. Chem. Soc. », *54*, 988 (1932); IV) J. Am. Chem. Soc. », *54*, 3570 (1932); V) « J. Chem. Phys. », *1*, 362 (1933) (con W. Wheland); VI) « J. Chem. Phys. », *1*, 606 (1933) (con J. Sherman); VII) « J. Chem. Phys. », *1*, 679 (1933) (con J. Sherman).

Per il resto si cfr. il volume: L. PAULING, *The Nature of the Chemical Bond*. Cornell University Press.

(2) C. PERRIER e F. FUMI, *Energia di reticolato*. « Rend. S. M. I. », anno III, p. 34; cfr. altresì C. PERRIER, *Corso di Mineralogia* (Bozzi, Genova).

(3) A. BELLANCA, *La struttura della cloromanganocalite*. « Period. di Mineralogia », A. XVI, p. 73.

(4) Una succinta e necessariamente superficiale esposizione del metodo di Pauling ha costituito l'oggetto di una mia relazione al IV Congresso della S. M. I. (Genova, 25, 27 settembre 1947), attualmente in corso di stampa nel « Periodico di Mineralogia » 1948, fa c. 1: F. FUMI, *Legami intercorpuscolari e meccanica quantica: il metodo di Slater Pauling*.

(5) BOZORTH, « J. Am. Chem. Soc. », *44*, 1066 (1922).

(6) TABET, « Gazz. Chim. It. », *63*, 679 (1933).

(7) GOSSNER u. KRAUS, « Zs. f. Kryst. », *88*, 223 (1934).

(8) SCHÜTZ, « Zs. f. phys, Chem. », (B) *31*, 292 (1936).

(9) KETELAAR, « Zs. f. Kryst. », *92*, 155 (1935).

In ogni caso il gruppo $[SiF_6]$ costituisce un *complesso ottaedrico* con il leptone Si al centro ed i leptoni F ai sei vertici.

Riportiamo in una tabella (Tab. I) i valori misurati per le distanze Si - F nei complessi ottaedrici $[SiF_6]$ nei vari composti.

TABELLA I

$(NH_4)_2SiF_6$ [5] [6] cubico	$d_{Si-F} = 1{,}71$ Å
$(NH_4)_2SiF_6$ [7] trigonale	$d_{Si-F} = 1{,}655$ Å
K_2SiF_6 [9]	$d_{Si-F} = 1{,}75$ Å
Rb_2SiF_6 [9]	$d_{Si-F} = 1{,}69$ Å
Cs_2SiF_6 [9]	$d_{Si-F} = 1{,}69$ Å
[8]	$d_{Si-F} = 1{,}87$ Å
Tl_2SiF_6 [6] [9]	$d_{Si-F} = 1{,}71$ Å

Per quanto si abbiano sensibili oscillazioni nei valori di d_{Si-F} da 1,66 a 1,75, appare evidente che il valore della distanza Si—F entro i complessi ottaedrici $[SiF_6]$ si aggira su 1,71 Å, come fu rilevato da Ketelaar stesso [9] il quale attribuì le oscillazioni dei valori da lui misurati per d_{Si-F} all'esistenza di limiti per la precisione sperimentale.

Unico valore nettamente distinto è quello calcolato sulla base delle misure di Schütz nel Cs_2SiF_6.

2. La configurazione elettronica dell'atomo di Si è la seguente:

K	L		M		
s	*s*	*p*	*s*	*p*	*d*
2	2	6	2	2	—

Perciò la configurazione elettronica dello jone Si^{4+} è

K	L		M		
s	*s*	*p*	*s*	*p*	*d*
2	2	6	—	—	—

La configurazione elettronica dell'atomo di F è invece

K	L	
s	*s*	*p*
2	2	5

mentre quella dello jone F^- è

K	L	
s	*s*	*p*
2	2	6

Le due eventualità che si presentano possibili per la natura dei legami Si - F entro i complessi $[SiF_6]$ sono quella di un legame jonico, jonico dipolare e quella di un legame covalente direzionato derivante da ibridizzazione, che non può essere che del tipo $3s\,3p^3\,3d^2$: non si può a priori escludere la eventuale risonanza fra questi due tipi estremi.

Nel caso di un legame puramente jonico, jonico-dipolare la stabilità del complesso $[SiF_6]$ sarebbe garantita dall'equilibrio fra le forze elettrostatiche attrattive di tipo coulombiano e di tipo derivante dalla polarizzabilità, fra cui, per quanto deboli, le vere forze di van der Waals (connesse ai momenti dipolari variabili con valore medio nullo degli joni, vigenti fra gli joni Si^{4+} e 6 F^- e le forze repulsive di tipo elettrostatico, potenziate dalla repulsione dei livelli elettronici completi, conseguenza della validità della statistica di Fermi.

La molteplicità dello stato jonico, jonico dipolare del complesso $[SiF_6]$ è 1, poichè in tale stato nel complesso stesso non si hanno elettroni disaccoppiati.

Nel caso di legame covalente la coesione del complesso sarebbe assicurata essenzialmente dalle forze di scambio di coppie di elettroni a spin opposti messe a comune fra il leptone silicio e ciascuno dei sei leptoni fluoro, coadiuvate dal cosiddetto « effetto di correlazione » (secondo la nomenclatura usata ad esempio da Slater[10]) estrapolazione delle forze di van der Waals.

Da un punto di vista modellistico la cosa va concepita nel senso che ciascuno degli joni F mette a comune con lo jone Si^{4+} una coppia dei suoi elettroni $2p$ tra di loro accoppiati, di modo che in totale lo jone Si^{4+} riceve 6 elettroni già accoppiati con altri sei appartenenti uno per uno ai sei joni fluoro; questi sei elettroni non vanno però, secondo Pauling, ad occupare nell'ordine l'orbitale $3s$, tre orbitali $3p$ e quindi due orbitali $3d$ del silicio, ma accade che questi diversi orbitali vengono perturbati dal campo di forza in cui è immerso il leptone Si e si mescolano, si *ibridizzano* generando sei orbitali di legame d^2sp^3, i quali rappresentano la migliore combinazione dei sei orbitali sopracitati agli effetti della forza del legame chimico e quindi rendono minima l'energia dello stato normale del complesso, nel caso di coesione covalente.

Appare evidente che anche la molteplicità dello stato covalente del complesso $[SiF_6]$ è 1, poichè neppure in questo stato si hanno elettroni disaccoppiati.

Cade perciò la possibilità di ricorrere al criterio magnetico per precisare il tipo di legame, in quanto sussiste la possibilità di una risonanza completa fra i due stati estremi.

Occorre ricorrere a qualche altra proprietà dei complessi $[SiF_6]$ in seno ai cristalli per poter precisare a quale tipo estremo il legame si avvicini maggiormente. Il considerare proprietà complessive degli edifici cristallini contenenti i gruppi $[SiF_6]$ non sarebbe qui di alcuna utilità dato il carattere di

10 Cfr. SLATER, « Chemical Physics » (1939).

microisole (Weissenberg) di questi complessi entro i cristalli. Si presenta quindi come particolarmente adatta la distanza Si—F.

In base ai valori dei raggi jonici nei cristalli riportati dal Pauling nel suo volume, la distanza Si—F nello stato jonico-jonico-dipolare del complesso $[SiF_6]$ dovrebbe aggirarsi (a causa delle possibili deformazioni joniche) su 1,78 Å.

Il valore della distanza Si—F nello stato covalente del complesso $[SiF_6]$ può calcolarsi utilizzando il raggio del fluoro in legame covalente semplice pari a 0,64 Å ed estrapolando il raggio ottaedrico del Si, non assegnato dal Pauling, a partire dal raggio tetraedrico pari a 1,17 Å, tenendo conto del fatto che logicamente, come del resto si verifica in circostanze analoghe per lo Sn^{IV} ed il P^{IV}, il raggio ottaedrico sarà maggiore di quello tetraedrico, anzi maggiore di una quantità relativamente più grande che nel Sn^{IV}, Pb^{IV}, in perfetto accordo con quanto si verifica fra Sn^{IV} e Pb^{IV} (11).

In conclusione la distanza Si—F nello stato covalente del complesso $[SiF_6]$ deve superare (11) 1,85 Å.

I dati sperimentali riportati in tabella I conducono perciò a affermare la predominanza dello stato jonico, jonico-dipolare, con una deformazione jonica dell'ordine di 0,06 0,08 Å, perfettamente plausibile, e tale da ridurre la distanza Si—F dal valore calcolato 1,78 Å al valore osservato di 1,71 Å; non si dimentichi che Si^{4+} è effettivamente un catione tipo gas raro, ma ha una elevata carica jonica.

A convalidare la conclusione raggiunta concorre l'osservazione, giustamente posta in risalto dal Pauling, che una ibridizzazione fra orbitali s, p, d, di uno stesso strato può ritenersi plausibile solo in elementi pesanti, per cui la differenza energetica tra gli orbitali in parola è piccola. Il Pauling ammette infatti questo tipo di ibridizzazione nel Se^{IV}, per $[SeBr_6]$ $(4s\,4p^3\,4d^2)$, nello Sn^{IV}, per $[SnCl_6]$ $(5s\,5p^3\,5d^2)$, nel Pb^{IV}, per $[PbBr_6]$ $(6s\,6p^3\,6d^2)$, ma si mostra già poco incline ad ammetterla nello strato 4. Basti allo scopo ricordare la questione del raggio anomalo del Mn^{2+} nella hauerite, per la quale Pauling ammette la prevalenza dello stato jonico, affermando solo in nota che « NON OCCORRE *che i legami fra il manganese e gli atomi circondanti siano di tipo jonico estremo* (puro legame jonico) *ma* POTREBBE *aver luogo risonanza con i legami del tipo* $4s\,4p^3\,4d^2$ ».

Senza pertanto potersi *escludere completamente* la partecipazione di legami $3s\,3p^3\,3d^2$ nel determinare la stabilità dei complessi ottaedrici $[SiF_6]$

(11) La maggiore grandezza del raggio ottaedrico degli elementi che si collegano covalentemente a seguito della ibridizzazione sp^3d^2 rispetto al raggio tetraedrico corrispondente a legami sp^3 è del tutto logica.

Si comprende però altresì facilmente che, diminuendo al crescere del numero quantico principale comune agli orbitali s ; p , d da ibridizzare la loro differenza energetica, diminuirà del pari, in senso relativo, la differenza fra i raggi ottaedrico e tetraedrico che, come sempre, vanno intesi come *raggi di azione*. Infatti mentre per Sn^{IV} la differenza è di 0,05 Å su 1,40 Å, per il Pb^{IV} è solo 0,04 Å su 1,46 Å; per il Si^{IV} tale differenza sarà più di 0,041 Å.

si può affermare che la natura dei legami interleptonici Si—F *sembra in grande prevalenza* jonica–jonica dipolare.

Ciò consente di attribuire il valore lievemente maggiore della distanza Si—F nel K_2SiF_6 rispetto agli altri fluosilicati cubici ad una *eventuale* azione contropolarizzante dello jone K^+, azione che sarebbe praticamente inefficace nel caso di coesione covalente del complesso.

È doveroso osservare a questo punto che *non è affatto necessario* ammettere una certa risonanza con legami $3s\,3p^3\,3d^2$ per giustificare la stabilità della coordinazione ottaedrica pur non essendo verificata la condizione dei rapporti limiti di Goldschmidt, codificata dal Pauling nella prima delle sue *regole strutturali per i composti jonici* [12], poichè la validità della condizione di Goldschmidt va intesa limitata al caso di interazione puramente coulombiana fra joni rigidi [13].

Peraltro il soddisfacimento della 3ª e 4ª regola di Pauling è del tutto evidente.

Del pari si riconosce facilmente la validità della 2ª regola, detta della « valenza elettrostatica »; infatti ogni R^+ è circondato da 12 F^- e ogni Si^{4+} da 6 F^-, di modo che le forze dei legami elettrostatici sono rispettivamente $\frac{1}{12}$ e $\frac{4}{6}$ e quindi, dato che ogni F^- è legato ad un Si^{4+} e a quattro R^+, si ha effettivamente, come deve essere,

$$\frac{4}{6}+\frac{4}{10}=1 \qquad \begin{pmatrix}\text{carica dello jone di } F^- \\ \text{cambiata di segno}\end{pmatrix}.$$

La 5ª regola del Pauling, o della «parsimonia», è anch'essa soddisfatta, ma la sua utilità, che è quella di determinare la scelta fra le diverse eventualità consentite dalla 2ª, viene qui a mancare poichè l'eventualità possibile è una sola.

Per concludere noteremo come in base alla nomenclatura usata dall'Evans [14], basata sulla valenza elettrostatica. i fluosilicati contenenti il complesso ottaedrico $[SiF_6]$ siano da classificare come *composti jonici anisodesmici*.

3. Sarebbe assai interessante dal punto di vista cristallochimico studiare, accanto alla natura dei legami interleptonici entro i complessi $[SiF_6]$, la natura dei legami interleptonici nei complessi $[GeF_6]$.

A differenza però di quanto si verifica per il complesso *esafluorosilicico*, i dati strutturali sul complesso *esafluorogermanico* sembrano essere molto [15][8] scarsi.

(12) L. PAULING, *Sommerfeld Festschrift*, Leipzig (1928); « J. Am. Chem. Soc. », *51*, 1010 (1929).

(13) C. PERRIER, *Corso di Mineralogia*, p. III, cap. V (Bozzi, Genova).

(14) R. C. EVARES, *Crystal Chemistry* (1946).

(15) WYCKOFF a. MÜLLER, « Am. J. Science », *13*, 347 (1927).

Grave di presenta poi, proprio agli effetti della precisazione della natura del legame Ge—F, la discordanza sulla distanza Ge -F fra i dati di Wyckoff, Müller 1,80 Å ed il valore calcolabile dai risultati di Schütz (1,98 Å).

Allo scopo di risolvere questa questione occorre eseguire indagini sperimentali roentgenografiche, tentando contemporaneamente la sincristallizzazione di fluogermanati e fluosilicati, tenendo presenti le condizioni di isomorfismo di Zambonini–Perrier [16].

Citologia sperimentale. — *Sull'attività colchicino–mitotica e su altri effetti citologici del 2,4–diclorofenossiacetato di sodio* [*]. Nota di F. D'Amato, presentata [**] dal Socio A. Chiarugi.

La scoperta del singolare meccanismo d'azione citologica della colchicina e la dimostrazione delle sue ampie possibilità d'impiego per la produzione sperimentale di poliploidi (Blakeslee e Avery, 1937) [1] hanno stimolato numerosi ricercatori allo studio dell'attività citologica di composti chimici di natura assai diversa. Se fino ad oggi non è stata scoperta una sostanza che possa degnamente sostituire la colchicina, varie questioni relative al meccanismo d'azione C–mitotica si sono definite o almeno chiaramente impostate, mentre cominciano a porsi le basi per una più precisa analisi di problemi ancora quasi ignorati di fisiologia cellulare (agglutinazione cromosomica, effetti tossici e mito-inibitori, reazioni differenziali delle regioni eterocromatiche e degli apparati centromerici, ecc.).

Durante una ricerca sull'attività citologica di vari composti organici, che costituirà l'oggetto di una prossima memoria [2], è stato anche studiato il 2,4–diclorofenossiacetato di sodio ($C_6H_3Cl_2OCH_2COONa$). La scelta è stata dettata dal desiderio di saggiare dal punto di vista citologico un composto che, per le sue spiccate proprietà erbicide, è stato e continua ad essere oggetto di estesissime ricerche, soprattutto negli Stati Uniti d'America. I risultati, a dire il vero, sono stati superiori alle previsioni e tali da giustificare la loro pubblicazione in separata sede. Ulteriori dati, soprattutto riguardanti gli effetti rizogeni e l'azione combinata decapitazione–diclorofenossiacetato, saranno riportati in un prossimo lavoro [3].

16) C. Perrier. *Regola di Zambonini e condizioni di isomorfismo.* «Rend. Acc. Lincei», ser. VIII, vol. II, fasc. 3, 246 (1947).

(*) Centro di Studio per la Citogenetica Vegetale del C. N. R. – Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Pisa.

(**) Nella seduta del 10 aprile 1948.

1) A. F. Blakeslee e A. G. Avery, *Methods of inducing doubling of chromosomes by treatment with colchicine.* « Journ. of Heredity », *28*, 392–411 (1937).

(2) F. D'Amato, *Ricerche sull'attività citologica di alcuni composti organici con particolare riguardo alla colchicino-mitosi e agli effetti tossici* (in preparazione).

3) F. D'Amato e M. G. Avanzi, *Reazioni di natura auxinica ed effetti rizogeni in «Allium Cepa L.». Studio cito istologico sperimentale* (in preparazione).

I. – MATERIALE E METODI. — Bulbi di cipolla della comune varietà gialla, liberati delle scaglie esterne e dei resti delle radici morte, venivano messi a germinare per immersione della loro porzione basale in acqua di fonte. Allorchè le radici avevano raggiunto 1–2 cm. di lunghezza, i bulbi erano trasferiti su provettoni (capacità media circa 100 cc.) contenenti soluzioni a varia concentrazione del composto fino ad un livello tale da permettere la completa immersione delle radici. Tutte le soluzioni (18 diverse concentrazioni comprese fra 10^{-1} e 10^{-6} mol/l) furono eseguite in acqua di fonte e le esperienze condotte alla temperatura ambiente (14–16° C.) e nelle condizioni di illuminazione diurna naturale. I controlli citologici furono eseguiti dopo 4, 12, 24 e 72 ore su apici radicali fissati nella miscela cromo–osmio–acetica 2BD e generalmente preparati secondo la tecnica dello « striscio al Feulgen »[4]. Per osservazioni speciali furono anche studiate sezioni longitudinali di radici incluse in paraffina e colorate al violetto cristallo.

II. – COLCHICINO–MITOSI. — Caratteristica del 2,4–diclorofenossiacetato di sodio è la notevolmente ampia scala di concentrazioni utili per l'induzione dei fenomeni di soppressione o disturbo dell'attività fusale propri della mitosi da colchicina («C–mitosi», Levan 1938)[5]. C–mitosi – totale, parziale o tendenze a C–mitosi, a seconda delle concentrazioni e delle durate di trattamento – si riscontra, infatti, nei trattamenti con soluzioni comprese fra 10^{-1} e 2×10^{-4} mol (tendenze a C–mitosi dopo 24 ore).

Nei trattamenti con soluzioni 0,1 e 0,06 mol, che risultano letali nel giro di poche ore, l'azione C–mitotica è turbata e spesso frustrata dal notevolissimo effetto tossico che, manifestandosi essenzialmente con una forte liquefazione matriciale, porta alla trasformazione delle figure mitotiche in ammassi spesso informi, allo smescolamento colloidale della cromatina e in alcuni nuclei quiescenti – alla non rara deformazione di nuclei e nucleoli. Fenomeni tutti, questi, più accentuati nel primo trattamento che nel secondo.

Nelle altre concentrazioni inducenti C–mitosi, questa si presenta nel suo aspetto tipico con la dispersione dei cromosomi della C–metafase (« C–paia », Levan 1938)[5] più o meno fortemente contratti nella cavità della cellula oppure – molto di rado – con la distribuzione secondo i tipi « exploded » e « distributed »[6]. La tipica forma a X delle C–paia, descritta per la prima volta dal Levan[5], è raramente realizzabile nei trattamenti con 2,4–diclorofenossiacetato, a causa della agglutinazione cromosomica (« stickiness ») sempre presente. Per la viscosità della matrice i due cromatidi di ogni C–paio tendono generalmente a rimanere aderenti l'uno all'altro per tutta la

(4) F. D'AMATO, *Osservazioni critiche su alcuni metodi di impiego della reazione nucleale in Citologia vegetale.* « Nuovo Giorn. Bot. Ital., n. s. », *53*, 657–668 (1946).

(5) A. LEVAN, *The effect of colchicine on root mitoses in « Allium »*. « Hereditas », *24*, 471–486 (1938).

(6) F. D'AMATO, *The effect of colchicine and ethylene glycol on sticky chromosomes in « Allium Cepa »*. « Hereditas », *34*, 83–103 (1948).

loro lunghezza o ad assumere forme molto varie (vedi in proposito D'Amato 1948 [6]), determinando assai spesso il passaggio in telofase (« reversione ») del C–paio prima della separazione dei cromatidi. Non è da escludere la possibilità che in alcune C–mitosi la reversione delle C–paia avvenga addirittura prima della divisione dei centromeri.

Il comportamento delle C–paia quì descritto è ormai noto per varie sostanze capaci di indurre contemporaneamente C–mitosi e « stickiness » e – secondo Hawkes [7] – sarebbe di norma presente nei trattamenti con colchicina. Secondo l'A. inglese, il tipico corso della C–mitosi sarebbe caratterizzato dalla reversione delle C–paia prima della divisione centromerica. Le nostre recenti ricerche sulla colchicina [6] – confermando il tipico corso della C–mitosi magistralmente descritto per la prima volta dal Levan [5] – hanno mostrato che *nei trattamenti con colchicina precoci reversioni di C–paia sono fenomeni eccezionali e che ad ogni modo non è dimostrato – e per ora non è dimostrabile – che C–paia che sembrano revertire intere posseggano un centromero indiviso.*

Col prolungarsi in durata del trattamento e col progressivo affermarsi dell'effetto tossico – generalmente tra 4 e 24 ore – le strutture vengono sottoposte ad una « specie di fissazione » che generalmente impedisce ai cromosomi meta–anafasici di subire i normali processi di despiralizzazione telofasica, che dovrebbero realizzare i nuclei tetraploidi di reversione da C–mitosi. Sicchè in molti trattamenti il quadro dei fenomeni citologici realizzatosi dopo 4 ore rimane immutato dopo 24, sebbene il normale turgore delle radici senz'altro escluda la possibilità che sia avvenuta una autentica fissazione dei tessuti (vedi avanti).

Nelle soluzioni prossime alle concentrazioni – limite per l'induzione della C–mitosi – fra 0,001 e 0,0002 mol – le fissazioni dopo 4 e 12 ore non mostrano effetti citologici spiccati, se non un leggero accumulo di profasi (D'Amato 1948 [6]) e, in alcune cellule, contrazione cromosomica metafasica superiore alla normale. Dopo 24 e 72 ore si nota generalmente « tendenza a C–mitosi »[8], caratterizzata da forte o fortissima contrazione cromosomica, da irregolarità nella congressione e polarizzazione metafasica, – non così pronunciate da disturbare la normale bipolarità fusale anafasica – e da qualche C–anafase. La contrazione cromosomica tipica della C–mitosi è soprattutto assai forte nei casi di tendenze a C–mitosi, a causa del minore effetto tossico che non ha impedito un talora notevole prolungamento in durata della metafase.

III. – Effetti tossici e mito–inibitori. – Sono estesi su una scala di concentrazioni di gran lunga più estesa di quella capace di dare C–mitosi e precisamente fra 10^{-1} e 10^{-5} mol (=24,3 — 0,0024 gr./l). Effetti letali (completa deturgescenza delle radici) nel giro di poche ore presentano le solu-

(7) J. G. Hawkes, *Some effects of the drug colchicine on cell division.* « Journ. of Genetics », *44*, 11–22 (1942).

(8) E. Steinegger e A. Levan, *The C–mitotic qualities of colchiceine, trimethyl colchicinic acid and two phenanthrene derivatives.* « Hereditas », *34*, 193–203 (1948).

zioni più concentrate, mentre nelle rimanenti la morte ha luogo dopo 3 14 giorni. Particolarmente interessante un singolare « effetto letale a distanza » per cui radici che, al termine di un trattamento di una certa durata si mostrano perfettamente turgide, sono incapaci di ripresa in acqua di fonte e vanno in deturgescenza dopo alcuni giorni. Ciò accade, ad esempio, in radici trattate per 12 ore con soluz. 0,03 mol, per 24 ore con soluz. 0,02 – 0,015 mol e per 72 ore con soluz. 0,002 mol. La morte cellulare – denunciata dalla completa deturgescenza radicale – si manifesta sempre con una intensissima dissoluzione della cromatina e la sua diffusione nel citoplasma che diviene così intensamente Feulgen-positivo.

Dal punto di vista citologico, a parte i suaccennati fenomeni di fluidificazione della cromatina e « fissazione » degli stadi meta-anafasici, è soprattutto evidente lo spiccato effetto mito-inibitore delle soluzioni di media concentrazione – fra 0,005 e 0,0005 mol – che non permettono il realizzarsi di più di un ciclo mitotico e, in taluni trattamenti, sospendono la mitosi alla profase, operandone il ritorno in quiescenza (reversione profasica [6]). Per ragioni di spazio, rimandiamo ad altra occasione [2] una più ampia trattazione degli effetti tossici e mito-inibitori.

IV. STICKINESS. — Si manifesta tanto nei fenomeni di intensa fluidificazione che in quelli di rarefazione matriciale, cioè di diminuita produzione quantitativa di matrice nei cromosomi meta-anafasici, con la conseguente messa in evidenza della struttura interna cromosomica. Le presenti osservazioni aggiungono, così, una nuova conferma sperimentale all'idea che « stickiness » e « starvation » (rarefazione) possono essere due tappe o due aspetti di un fenomeno fondamentalmente unico [9].

V. STIMOLAZIONE MITOTICA E MITOSI A DIPLOCROMOSOMI. — Una reazione macroscopica che accompagna alcuni trattamenti con diclorofenossiacetato di sodio è la tipica « reazione da C-tumori » [5], caratteristica della colchicina, delle sostanze di crescita e di composti ad attività C-mitotica. Essa consiste in un ingrossamento fusiforme della zona di allungamento della radice al di sopra del meristema ed è dovuta alla trasformazione delle cellule corticali, normalmente allungate, in cellule isodiametriche senza apprezzabili modificazioni in volume [7].

Oltre che nei trattamenti riportati nella tabella I, C-tumori possono anche ottenersi per trattamenti di 12-24 ore con soluzioni più concentrate e successiva ripresa in acqua di fonte.

I fenomeni citologici connessi alla reazione macroscopica da C-tumori furono per la prima volta descritti dal Levan [10] in radici di cipolla trattate

(9) F. D'AMATO, *Contributo al problema della agglutinazione cromosomica* (« *stickiness* ») *spontanea*. « Atti Accad. Naz. Lincei », Rendic., Cl. di Scienze fis., ser. VIII, vol. IV, fasc. 1, 94-98 (1948).

(10) A. LEVAN, *Cytological phenomena connected with the root swelling caused by growth substances*. « Hereditas », *25*, 87-96 (1939).

con sostanze di crescita e le nostre osservazioni concordano in massima parte con quelle del citologo svedese. Detti fenomeni possono così riassumersi:

1° aumento del numero generale delle mitosi nei meristemi e modificazione della polarità cellulare per cui molti fusi vengono ad orientarsi in direzione trasversale all'asse radicale aumentando le file di cellule che costituiscono la radice;

2° stimolo alla mitosi delle cellule del periciclo e degli strati a questo confinanti su una notevole estensione (1– molti cm. dalla cuffia) e talora sotto forma di un manicotto cellulare continuo (spessore di 11–13 cellule in senso radiale) da cui si organizzano numerosissimi abbozzi di radici laterali;

3° stimolo alla mitosi e mitosi a diplocromosomi (*) nelle cellule del cilindro corticale e del cilindro centrale, escluse – in genere – quelle del periciclo, normalmente dividentisi con mitosi diploidi normali. *Mitosi a diplocromosomi si trovano tanto nella corteccia e nel cilindro centrale del C-tumore quanto della zona non tumefatta della radice al disopra del tumore e fino a 22 mm. dalla cuffia. Anzi, almeno per molti trattamenti, la loro frequenza massima si riscontra proprio nella zona non tumefatta della radice (circa 4–5 mm. dalla cuffia).*

Questa osservazione è in contrasto con l'opinione del Levan [10] che l'ingrandimento cellulare (« cell enlargement ») prodotto dalle sostanze di crescita sia lo stimolo per l'induzione della mitosi a diplocromosomi. A parte il fatto che la tipica reazione da C–tumori non comporta aumento volumetrico delle cellule [7], è da tener presente che nelle radici di cipolla stimolazione mitotica e mitosi a diplocromosomi possono ottenersi per semplice decapitazione e in completa assenza di reazioni macroscopiche di sorta [11]. Pur non escludendo la possibilità che la reazione da C–tumori sia *talora* lo stimolo inducente la mitosi a diplocromosomi, siamo, perciò, del parere che *nuclei con diplocromosomi sono già presenti nelle cellule adulte delle radici di cipolla, essendosi originati durante la normale differenziazione della corteccia e del cilindro centrale* (**). *Le sostanze di crescita e la ferita non inducono – almeno in generale – la doppia riproduzione cromosomica tipica della mitosi a diplocromosomi, ma soltanto stimolano alla divisione cellule adulte già poliploidi.*

Si pone così – per la prima volta – in evidenza la possibilità che le gemme tetraploidi ottenibili in seguito a decapitazione di fusti in alcune piante siano

(*) La mitosi a diplocromosomi è caratterizzata da cromosomi pro-metafasici costituiti da 4 cromatidi (anzichè 2 come nella mitosi normale) tenuti da un solo centromero e da una doppia divisione centromerica all'anafase che dà, attraverso un normale meccanismo fusale, due nuclei figli a numero di cromosomi doppio del normale. Essa si origina per doppia riproduzione cromosomica durante lo stadio di quiescenza.

(11) F. D'Amato, *Cytological consequences of decapitation in onion roots*. « Experientia » (in pubblicazione).

(**) Che durante la differenziazione dei tessuti vegetali il passaggio delle cellule dalla condizione embrionale a quella adulta sia spesso contraddistinto dall'acquisizione di un corredo cromosomico poliploide è già stato dimostrato in varie piante.

il risultato di una stimolazione – per mezzo della ferita – alla mitosi di cellule adulte già tetraploidi contenute nella corteccia e nel cilindro centrale.

Nella tabella I sono stati riassunti i principali effetti citologici e macroscopici del 2,4-diclorofenossiacetato di sodio sulle radici di cipolla. Per una migliore comprensione di essa è necessario precisare che:

a) i segni + e — indicano presenza o assenza del fenomeno in questione;

b) i segni +, ++, +++, ++++ indicano diversi gradi del fenomeno in questione;

c) il segno ∓ indica tendenze al fenomeno in questione;

d) il segno ∓ seguìto da asterisco nella colonna degli effetti tossici indica la impossibilità di svelarne la presenza nei primi 9 giorni, essendo – in genere – presente una contemporanea mito-stimolazione;

e) nella colonna degli effetti letali l'asterisco marca il tempo dopo il quale le radici, pur essendo perfettamente turgide, sono incapaci di ripresa in acqua (effetto letale a distanza).

TABELLA I.

Quadro riassuntivo degli effetti citologici e macroscopici del 2,4-diclorofenossiacetato di sodio sulle radici di Allium Cepa.

Concentraz. mol/l	C-mitosi 4 h.	C-mitosi 12 h.	C-mitosi 24 h.	C-mitosi 72 h.	Stickiness	Effetto tossico	Effetto letale	Mito-stimolazione	C-tumori
0,1 (satura)	+	—	—	—	+++	.....	4h.	—	—
0,06	+	—	—	—	++	++++	10h.	—	—
0,03	+	+	—	—	++	+++	12h.*	—	—
0,02	+	+	—	—	+	+++	24h.*	—	—
0,015	+	+	—	—	+	+++	24h.*	—	—
0,01	+	+	—	—	+	+++	3 giorni	—	—
0,005	+	+	+	—	+	++	4 giorni	—	—
0,002	—	+	+	—	∓	∓	3 giorni*	—	∓
0,001	—	—	∓	∓	—	+	3 giorni*	—	+
0,0005	—	—	∓	∓	—	+	6 giorni*	—	+
0,0002	—	—	∓	—	—	∓	9 giorni	—	+
0,0001	—	—	—	—	—	∓*	14 giorni	—	+
0,00005	—	—	—	—	—	∓*	14 giorni	+	+
0,00001	—	—	—	—	—	∓*	14 giorni*	+	+
0,000005	—	—	—	—	—	—	—	+	+
0,000001									

VI. Discussione. — Il metodo di investigazione quantitativa, inaugurato dalla Scuola citologica svedese (Levan e Östergren 1943 [12], Östergren 1944 [13]) e basato sullo studio di una serie graduata di concentrazioni comprese fra quelle letali nel giro di poche ore e quelle assolutamente inattive, ha permesso di accertare che l'azione C–mitotica di numerose sostanze riposa sulle loro proprietá fisiche (solubilità, peso molecolare, punto di fusione, ecc.) e non ha nulla a che vedere con la loro struttura chimica. Una ulteriore precisazione si è avuta con i recentissimi contributi del Laboratorio di Citogenetica di Svalöf [8], [14], [15] e con l'applicazione del concetto di «attività termodinamica» del Ferguson [16], [17] alla misura dell'attività C–mitotica. Sostanze mostranti attività C–mitotica in soluzioni sature (attività termodinamica (*) = 1) o in diluizioni fino ad 1/20 della concentrazione di saturazione (attività termodinamica 0,05), agiscono fisicamente; le altre chimicamente.

La colchicina, con una attività termodinamica $< 0{,}0003$ [14] e con uno scarsissimo effetto tossico (nei vegetali), è la sostanza a più alta attività C–mitotica oggi conosciuta. Attività C–mitotica di natura chimica mostrano fra gli altri gli alcooli etilico e metilico e altri della serie alifatica [13], il cloroformio [13], [15], l'acido trimetilcolchicinico [8], il cloralio idrato e il fenolo [17]. In tutti questi composti l'attività termodinamica giace fra 0,025 e 0,00025. Nonostante questa loro attività di natura specificamente chimica, la scala di concentrazioni utili per la induzione della C mitosi è, in tutte queste sostanze, assai ristretta.

Il 2, 4–diclorofenossiacetato di sodio, possedendo una solubilità massima in acqua di ca. 0,1 mol e mostrando C–mitosi anche in concentrazioni di 2×10^{-4} mol, ha una attività termodinamica di ca. 0,002; quindi nettamente inferiore – a parte la colchicina e il cloralio idrato – a quella di tutte le altre sostanze possedenti attività C–mitotica di natura chimica. Inoltre la scala di concentrazioni utili per l'induzione della C–mitosi è – dopo quella della colchicina – la più ampia che sia stata finora stabilita per le

(12) A. Levan e G. Östergren, *The mechanism of c–mitotic action.* « Hereditas », *29*, 381–443 (1943).

(13) G. Östergren, *Colchicine mitosis, chromosome contraction, narcosis and protein chain folding.* « Hereditas », *30*, 429–467 (1944).

(14) E. Steinegger e A. Levan, *Constitution and c–mitotic activity of isocolchicine.* « Hereditas », *33*, 385–396 (1947).

(15) E. Steinegger e A. Levan, *The cytological effect of chloroform and colchicine on « Allium ».* « Hereditas », *33*, 515–525 (1947).

(16) J. Ferguson, *The use of chemical potentials as indices of toxicity.* « Proc. R. Soc. London », ser. B, *127*, 387–404 (1939).

(17) P. Gavaudan, M. Dodé e H. Poussel, *La toxicologie générale et la notion d'activité thermodynamique.* «Memorial des Services Chimiques de l'État», *31*, 384–423 (1944).

(*) L'attività termodinamica può essere approssimativamente definita come il rapporto fra concentrazione limite e concentrazione di saturazione in acqua. Secondo il Ferguson, essa caratterizza l'attività – chimica o fisica a seconda delle sostanze – dei narcotici e veleni in genere. Il limite fra azione di natura fisica e azione di natura chimica è segnato dall'attività termodinamica 1/20 (= 0,05).

sostanze C-mitotiche. Il fatto che verso le concentrazioni limiti la C mitosi appaia dopo 24 ore di trattamento è una prova evidente del meccanismo chimico di azione citologica del 2,4-diclorofenossiacetato di sodio [8]. Esso dimostra l'incapacità delle cellule a conseguire l'assuefazione al veleno cariosclasico, quale invece si manifesta talvolta con sostanze agenti fisicamente, il cui effetto C-mitotico nelle prime ore di trattamento è l'espressione di uno «shock iniziale» [6].

TABELLA II.

Quadro dell'attività termodinamica di alcune sostanze organiche ad azione C-mitotica.

Sostanza	Solubilità mol/l	Concentrazioni attive mol/l	Attività termodinamica	Autore
Colchicina	0,5 ca.	0,5 ca.-0,000015	< 0,0003	STEINEGGER e LEVAN [14]
Cloroformio	0,083	0,021-0,0021	0,025	id. [15]
Acido trimetilcolchicinico	0,00408	0.0001	0,025	id. [8]
Cloralio idrato	24	0,006-0,003	0,00025	GAVAUDAN et alii [17]
Fenolo	0,9	0,0053-0,0026	0,005	id.
2,4-diclorofenossiacetato di Na	ca. 0,1	0,1-0,0002	0,002	D'AMATO

Nella tabella II sono state brevemente riassunte le qualità C-mitotiche di sostanze organiche agenti per via chimica. Da essa risulta che il *2,4-diclorofenossiacetato di sodio è - dopo la colchicina - la sostanza a più spiccata azione C-mitotica oggi conosciuta.*

Nonostante la sua spiccata attività C-mitotica, il 2,4-diclorofenossiacetato di sodio mostra una scarsa «efficienza» [13], a causa dell'effetto tossico più o meno pronunciato accompagnante – nella cipolla – tutti i trattamenti ad azione C-mitotica. Data la perfetta conoscenza delle concentrazioni attive per gli effetti C-mitotici e per quelli tossici, la poliploidizzazione dei meristemi radicali di cipolla è realizzabile su una ampia scala di concentrazioni, essendo possibile separare i due effetti citologici per mezzo di trattamenti di durata variabile secondo i casi. Per l'impiego pratico del 2,4 diclorofenossiacetato come agente poliploidizzante dovrebbe, teoricamente, essere necessaria la conoscenza delle concentrazioni citologicamente attive per ogni specie vegetale. La difficoltà dovrebbe, tuttavia, potersi superare con trattamenti basati su una serie graduata di concentrazioni e su esposizioni di diversa durata.

Esperimenti di poliploidizzazione sono attualmente in corso. Dai primi trattamenti – eseguiti su piante Mono– e Dicotiledoni – risultano azioni macroscopiche identiche a quelle realizzabili per azione di agenti poliploidizzanti e s'intravvedono possibili azioni mutageniche di altro tipo.

Se notevole è l'attività C–mitotica del 2,4–diclorofenossiacetato di Na, ancora più notevole è la sua attività tossica, contrassegnata da una attività termodinamica di ca. 0,0001, estendentesi su tutta la scala di concentrazioni comprese fra quella di saturazione e quella limite.

Da quanto sopra detto deriva la dimostrazione – su basi citologiche – della sua spiccata specificità d'azione fisiologica generale e una nuova prova della correlazione che è stata dimostrata esistente, in alcuni fenossi–derivati, tra struttura chimica e attività fisiologica [18].

I risultati conseguiti con la presente ricerca rendono ovvia la necessità di estendere lo studio dell'attività citologica ad altre sostanze di crescita. Sebbene presumibili effetti tossici facciano prevedere di scarsa importanza il loro impiego come agenti poliploidizzanti, risultati di indubbio interesse teorico dovrebbero potersi conseguire. Al problema è nostro desiderio recare ulteriori contributi.

Citologia. — *Conoscenze cellulari: apparato interno e lacunoma* [*]. Nota di A. Corti, presentata [**] dal Corrisp. G. Vernoni.

La tecnica istologica, con le applicazioni affinate e sempre affinantisi, ci ha dato le nozioni su la forma minuta della sostanza vivente: determinati procedimenti hanno concesso un avviamento alla istotopochimica – si è creato un tal nome – preceduta però sempre da quelle cognizioni che potremo per correlazione chiamare di istotopofisica: è appena da dire, poichè tutte le tecniche sono insufficienti, la necessità assoluta e dell'applicazione oculata e precisa dei metodi da usare e della severità nel rilievo dei risultati.

Oggidì per quanto riguarda la morfologia generale del citoplasma il problema più discusso, e per la generalità degli studiosi più oscuro, è quello riguardante il cosidetto apparato interno del Golgi; che, come ognun sa, si rende visibile esclusivamente in seguito a riduzioni di sali d'argento e d'osmio.

Taluni studiosi, seguendo l'opinione del primo scopritore, ritengono che le figure offerte dai detti procedimenti siano rispondenti a normale realtà della struttura cellulare, cioè che l'apparato reticolare interno esista con una sua peculiare morfologia: altri studiosi, invece ritengono che le reazioni

(18) P. N. Zimmerman e A. E. Hitchcock, *Substituted phenoxy and benzoic acid growth substances and the relation of structure to physiological activity*. «Contrib. Boyce Thompson Inst.», *12*, 321–343 (1942).

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Anatomia comparata e Istologia dell'Università di Torino.

(**) Nella seduta del 15 maggio 1948.

metalliche predette rispondano a reali e normali addensamenti amorfi di determinate sostanze in determinata regione della cellula, la zona o macchia di Golgi; altri infine ritengono che le riduzioni metalliche rispondano sì a determinate sostanze, ma tali sostanze sarebbero, da una diffusa distribuzione nel citoplasma, addensate anormalmente, al seguito dell'azione dei procedimenti di preparazione.

Nel mezzo secolo dalla scoperta del Golgi le ricerche susseguitesi furono consegnate in pubblicazioni da dirsi quasi innumerevoli: il volume dello Hirsch pubblicato fin dal 1939 nella pregevole collezione di « Protoplasma », tutt'altro però che completo e perfetto, com'ebbi a metter in luce[1], dava già un elenco di due migliaia di lavori. È però ben strano che nessuno, dico nessuno fra gli studiosi, almeno fino a ieri, si sia mai posto il problema di approfondire la ricerca, con la mira di conoscere delle notissime figure metalliche qualcosa di più intimo e di più essenziale.

Fui indotto allo studio dell'apparato da reperti che mi si offrirono nella fine osservazione degli epiteli gastrointestinali di vertebrati: fatti assolutamente prima sconosciuti mi si presentarono con costanza e precisione, così da non potere, dopo controlli e controlli, avere possibilità di dubbi; è poichè tali nuovi fatti riguardavano in modo speciale la zona della cellula ove era stato descritto l'apparato interno, ne volli approfondire le conoscenze. Ne ampliai la ricerca verso altri elementi ghiandolari e non ghiandolari, e quando vidi diffusa la costanza dei reperti, elessi quelle prime cellule epiteliali endodermiche a testi per proseguire la indagine verso una più profonda e più precisa conoscenza; quegli elementi gastrointestinali rappresentano materiale alla facile portata di ogni più modesto sperimentatore, e offrono condizioni strutturali particolarmente favorevoli.

Le prolungate, controllate e vagliate indagini pluridecennali mi hanno condotto ad una conclusione che si può riassumere nella esistenza di peculiari porzioni, zollette, di sostanza del citoplasma differenziate dalla restante, con la quale non sono miscibili, costanti per sede, per massa e per forma, con limiti netti di contatto, sia con la sostanza fondamentale che con condriosomi e sia con la membrana nucleare, senza che appaiano indizi di più intimi rapporti o di reciproca influenza: per la parvenza di tali massicciole, nei preparati, di sostanza ialina incolora quasi di lacune, ho chiamato il sistema col nome di lacunoma. L'apparato interno del Golgi, per fatti a me sconosciuti, si origina e si determina per deposizione dell'argento e dell'osmio alla periferia delle lacune, probabilmente nella interfaccia fra le due sostanze non miscibili del lacunoma e del restante citoplasma.

Questo mi è risultato chiaramente nella osservazione graduata delle riduzioni metalliche, in materiali cioè graduati nella reazione: ho visto la originaria basale esistenza delle singole lacune ialine, quindi il depositarsi alla periferia di dette lacune di primi indizi dell'elemento, specie dell'osmio

(1) A. Corti, *Per la conoscenza e per la storia del lacunoma.* «Monit. Zool. It.» vol. 55 (1946).

a reazione più lenta e più fine; e questi primi indizi ampliarsi in granuli, in corpiccioli e confluire fra loro, fino ad opacare tutta la singola lacuna. Le lacune sono di regola isolate in tutti i tessuti: le forme confluite a reticolo si possono ritenere determinate da insufficienza di fissazione; la miscela fissatrice originaria del Golgi all'anidride arseniosa, stabilita quando la conoscenza sulla costituzione della materia viva, sulla fisica chimica dei colloidi, sui fattori e sui meccanismi della fissazione erano differenti dalle attuali, è stata da me profondamente modificata, e ne ho avuto i risultati che mi autorizzano a ritenere per normale la esistenza delle lacune isolate e l'assenza di forme confluenti reticolari.

Volli però ancora per altra via esaurire tutte le possibilità di dubbi che potessero obbiettivamente aver peso, che invalidassero la mia concezione: e cercai ogni mezzo che potesse individuare o comunque indicarci traccia di materiale citoplasmatico da riconoscersi qual sostrato delle riduzioni metalliche, che indicasse cioè una realtà dell'apparato interno: e mi sono valso di tutti i procedimenti noti e più accreditati [2]: i risultati furono tutti assolutamente e precisamente negativi: è apparso sempre il materiale lacunare nelle sue forme ben nitide e ben precise, e non si è mai potuto vedere alcuna particolare differenziazione di sostanza limitante; ho usato la prima fissazione del Golgi, la miscela osmiobicromica, ottenendo risultati splendidi, e poi le miscele fissatrici più specifiche e più note dell'apparato interno, all'arsenico, all'uranio, al cobalto (secondo la mia formula), e dopo fissazione, invece di procedere alla argentazione e alla riduzione, ho proceduto a colorazioni, e le lacune sono apparse precise, nulla di particolare vedendosi nel restante citoplasma. F. Aoyama ha introdotto, a lato dell'arsenico, dell'uranio e del cobalto, l'uso del cadmio quale fissatore specifico per l'apparato interno: lo sperimentai successivamente, e a lato di buoni risultati nel tipico procedimento della fissazione, argentazione e riduzione, ebbi quelli ancor totalmente dimostrativi, di lacune ben evidenti e di nessun altro reperto, quando, parimenti a quanto qui sopra riferii, omisi la metallizzazione e procedetti invece alla colorazione.

Sorge da questi reperti, dalla mia concezione, un aperto contrasto con quanto è stato sempre concordamente affermato in note, in monografie, in trattati, circa la costituzione dell'apparato interno da materiali lipoproteici, normali come ho detto che taluni ammettono, o anormalmente raccolti– (smescolati) come altri sostengono: è necessario andare una buona volta a fondo di tale affermazione.

Non solo nessun reperto obbiettivo è stato mai avanzato a suffragio di questa quasi semisecolare affermazione, ma tutti i reperti obbiettivi sono negativi al proposito: come da quasi un quarto di secolo io ho asserito e sono andato ripetendo. I condriosomi, che si hanno buone ragioni per ritenere costituiti da un aggregato di proteine e di lipoidi, oltre che vedersi nel vivente, e nella

(2) A. Corti, *Per la tecnica e per la conoscenza del lacunoma.* «Monit. Zool. It.», vol. 56. (1947).

lor fedele forma nei preparati fissati, si fissano e si colorano elettivamente e regolarmente con parecchi diversi procedimenti: che dànno invece e sempre, tutti lo sanno, risultati assolutamente negativi per quanto riguarda l'apparato interno.

Il reattivo più specifico ed usato per i lipoidi è il Sudan III; ne ho descritto recentemente alcune fini redditizie applicazioni [3]: il metodo del Ciaccio ne è la più nota applicazione, ed ha permesso all'Autore ricerche ormai classiche: *il metodo del Ciaccio per i lipoidi dà costantemente e assolutamente risultati negativi per l'apparato interno.*

Con i metodi per i lipoidi si sono individuati e stabiliti determinati accumuli di sostanze lipoidee in determinate specie cellulari: *i metodi specifici per l'apparato interno* (all'arsenico, all'uranio, al cobalto, al cadmio, all'osmio) *dànno sempre e assolutamente risultati negativi per questi designati accumuli lipoidi.*

Tutto questo ben semplice, chiaro e facilmente controllabile, ho, come dissi sopra, affermato a chiare note in una serie di contribuzioni dal 1924 in poi; con inutilità assoluta: chiunque legga qualcosa riguardante l'apparato interno, in note, in monografie, in trattati, ed è inutile far nomi dai modesti ai più conosciuti, ovunque troverà la ambita ripetuta affermazione. È ancora appena di ieri una assai dotta Nota riassuntiva [4] nella quale è ripetuta nettamente l'affermazione « L'appareil de Golgi est un complexe lipido-protéidique ! »

Si dovrebbe dire veramente che unica eccezione a tali affermazioni vacue, cioè senza base oggettiva, v'è stata da parte dei coniugi Parat [5] secondo i quali, proprio anche in cellule intestinali di vertebrati, sarebbe dimostrabile la esistenza di sostanze lipoidi nella zona di Golgi.

Del Parat, apprezzato come di speciale ed autorevole competenza nel dominio della citologia, ho avuto più volte occasione di considerare con risultati non lusinghieri e la sua iniziativa e i suoi reperti [6]. Egli iniziò le sue ricerche dopo aver avuto conoscenza dei miei risultati, dei quali mai tenne conto alcuno, descrivendo, posteriormente, suoi consimili: i suoi reperti iniziali furono del tutto cancellati da seri ricercatori, altri da me severamente criticati: accettò inizialmente la concezione del vacuoma di P. A. Dangeard, nè dagli scritti risulta un suo netto distacco anche dopo che di detta concezione è stata dimostrata l'erroneità basale; nella Memoria, in collaborazione con M.me Parat, che ora specialmente ci interessa, è esposta una nuova vaga concezione da basarsi sui reperti descritti: per questi, per quanto riguarda il condrioma, ho già altrove manifestato il mio materiato

(3) A. CORTI, *Assorbimento di sostanze lipoidee.* « Rendic. Acc. Lincei », ser. 8ª vol. III.

(4) Marguerite PEREY, *Méthodes chimiques et physiques de marquage en biologie.* « Anné biologique ». Janvier 1948.

(5) Marguerite et Maurice PARAT, *Essai d'analyse histochimique et morphologique de la zone de Golgi. (Cellule de la glande pelvienne de Triton, cellules intestinales de Triton et d'Axolotl.* « Arch. Anat. micr. », tome, 26 (1930).

(6) A. CORTI, *Il lacunoma.* « Arch. it. Anat. Embriol. », vol. 47, p. 155 (1942).

giudizio [7]. Per la questione dei lipoidi della zona di Golgi l'affermazione del Parat è basata su reperti di materiali assoggettati alla tecnica secondo Dietrich–Parat: la quale consiste in una fissazione con la miscela di Helly seguìta da un mordenzaggio per 1–3 giorni in soluzione satura di potassio bicromato in termostato a 37°.

Per le cellule intestinali la fissazione con la miscela di Orth (liquido di Mueller cc. 80 + formalina neutra cc. 20) che uso abitualmente, è decisamente da preferirsi; basterebbe, al confronto, il fatto costante della coartazione e impicciolimento degli epiteli che la miscela di Helly determina, forse per la maggior concentrazione salina, specialmente evidente nella zona delle ghiandole del Galeazzi, dove, nelle sezioni trasverse, lo strato delle cellule ghiandolari è di regola staccato qual tonda isoletta nelle maglie del connettivo: questo, con quanto può esservi connesso, non avviene col metodo da me preferito; e per il mordenzaggio non ho in alcun modo potuto veder preferibile il drastico rapido metodo elogiato dal Parat al confronto del più lento, di una decina di giorni in soluzione dello stesso potassio bicromato al 3 %, secondo il Regaud.

Ad ogni modo ho sperimentato, seguendo i dettami dei Parat colorando poi con lacca di ematossilina e secondo Ciaccio con Sudan III (Gruebler). *Le cellule intestinali di Mus, Cavia, Erinaceus a digiuno*, cioè a distanza dal pasto (24–30 *h*) in modo da escludere la eventuale influenza di sostanze alimentari assorbite, *hanno dato sempre e in ogni caso risultati del tutto negativi*. Il materiale non è peregrino, i procedimenti possono essere seguìti da qualunque principiante istologo: il controllo è pertanto a portata di tutti.

Finalmente, una ultima ricerca obbiettiva di A. J. Cain [8] proprio su cellule intestinali (di Anellide rincobdellide), pur senza conoscere alcuno dei miei vecchi e numerosi contributi, è conclusa « In the cells, the rest of the cytoplasm contain much lipine, but the Golgi apparatus little or none that can be shown by the method used »: al di fuori dei metodi specifici metallici, l'A. si è valso di una emateina acida secondo Baker e di nero Sudan, che, per le attuali nostre condizioni, io non sono ancor riuscito a procurarmi e sperimentare.

Al seguito delle mie sovradette ricerche ebbi ancora risultati che, verso la più intima conoscenza del lacunoma, val la pena di segnalare: l'aggiunta del 25 % di alcool alla miscela di Orth provoca la dissoluzione dei condriosomi, mentre non dimostra alcuna azione sul lacunoma che mantiene invariate le sue caratteristiche di forma e di reazione: già altre sperimentazioni avevano mostrato talune maggiori resistenze in confronto al condrioma del lacunoma ad agenti perturbatori innaturali. La Signora Benazzi–Lentati gentilmente mi comunica che, nel corso delle sue ricerche sulla metacro-

[7] A. Corti. *Precisazioni sul condrioma e sul lacunoma della cellula intestinale*. In corso di stampa in « Bull. Soc. it. Biol. Sperim. ».

(8) « Quart. Journ. of micr. Sc., » vol. 88 (1947).

masia, cellule intensamente colorate con la tionina mostravano in luminoso contrasto il limpido incoloro lacunoma.

Il sublimato corrosivo non è certamente un buon conservatore della minuta forma del citoplasma: non conserva il condrioma e la sostanza fondamentale assume un aspetto grossolanamente amorfo: il lacunoma è però mantenuto preciso quando si usi una miscela di tre parti di soluzione satura del sale di mercurio e una parte di formalina; miscela e risultato di importanza notevole, in quanto dimostrano che la sostanza chiara ialina del lacunoma si mantiene invariata anche sotto l'azione dei più forti coagulanti: a confermare ancora una volta la mia asserzione, espressa nel 1924 [9] e poi sempre ripetuta, circa la sostanza del lacunoma che giudicai costituita « da soluzioni di cristalloidi o colloidi a un grado tale di dispersione da non mostrare tracce di sostanze, di coaguli, nei preparati ».

Piene conferme indirette e ampliazioni dei miei ormai vecchi reperti e della ormai vecchia mia concezione, cui è stato fra noi opposto un muro scorretto per tanti riguardi di opposizione o di incomprensione, vanno comparendo da parte di studiosi che pur di quei reperti e di quella concezione non hanno avuto conoscenza: le evidenti lacune sono senz'altro interpretate come apparato di Golgi, quali figure negative dell'apparato. Chiari riferimenti ebbi a riportare fin nella mia Memoria del '42; ma successivamente si sono aggiunte altrettante chiare affermazioni: le gravi e ancor per tanta parte insuperate difficoltà del dopoguerra non hanno concesso una visione un pó ampia della letteratura di questi tempi turbinosi.

Dirò innanzi tutto di aver presa conoscenza con speciale compiacimento di una assai dotta relazione di P. Dustin [10] che mi ha fatto accrescere quella mia diffidenza verso tanti descritti risultati di colorazioni vitali, per la quale fui costretto a una risposta polemica (« Riv. Biol. », vol. 39, p. 103). I coloranti basici possono far insorgere vacuoli nel citoplasma: già in un mio vecchio lavoro [11] avevo richiamata l'attenzione, dovrei dire la prudenza in seguito al « crinoma » di Chlopin, cioè alla dimostrata massiva insorgenza di vacuoli per azione del rosso neutro. Ma da quel tempo le cognizioni sono aumentate e migliorate: si è dimostrato il meccanismo per cui, quando i coloranti basici tipo rosso neutro sono messi a contatto di citoplasma contenente sostanze basofile diffuse, per fattori fisici chimici queste possono separarsi parzialmente in una fase liquida neoformata a dare vacuoli.

Dustin (1941 42), dopo allargate le suggestive cognizioni sul citoplasma omogeneo delle emazie nucleate mature dei vertebrati inferiori, dove i vacuoli insorgono per tali trattamenti proprio con caratteri del tutto consimili a quelli del vacuoma, ha visto il fatto in leucociti, in cellule epiteliali: e nelle

(9) A. CORTI, *Studi di morfologia cellulare: Lacunoma = Apparato interno del Golgi (Trofospongio), Condrioma, Idiosoma.* « Ric. di Morfologia », vol. 4 (1924).

(10) P. DUSTIN, *Ribonucleid Acid and the vital Staining of Cytoplasmatic vacuoles in Animal Cells.* « Symp. Soc. for Exper. Biol », n. 1 (1947).

(11) A. CORTI, *Il lacunoma delle cellule dell'epitelio intestinale dell'uomo.* « Arch. It. Anat. Embriol. », vol. 22 (1926).

emazie anucleate mature (mammiferi) nelle quali non esistono sostanze basofile diffuse non si ha l'insorgenza dei vacuoli colorantisi.

Il lacunoma per le forti subitanee azioni degli agenti fissatori sulle cellule in vita è immobilizzato e stabilizzato nella sua forma: perciò ho sempre data la preferenza a questi procedimenti.

Le ricerche più moderne sul meccanismo e sulla interpretazione della colorazione vitale basica hanno potuto stabilire che il rosso neutro è reagente vitalmente con i « vacuoli dell'apparato di Golgi » che non si colorano dopo fissazione, mentre non reagisce vitalmente con quei protoplasmi più ricchi che invece appaiono basofili dopo fissati: in quanto nella cellula vivente i gruppi acidi delle nucleoproteine sono in forma combinata, mentre si liberano con la fissazione. Una connessione diretta starebbe fra « i vacuoli di Golgi » e le ribonucleine citoplasmatiche, delle quali si afferma la grande importanza nei processi vitali, in quello sommo della sintesi proteinica. La sostanza delle lacune, dei « vacuoli di Golgi », in molti casi a composizione chimica assai complessa, è detta contenere sostanze in quantità scarsissime ma di grande importanza nel metabolismo cellulare: nucleoproteine in quantità così piccole da sfuggire anche a metodi sensibili.

E per la mia prima interpretazione dell'apparato interno a dimostrare, dovrei dire a mascherare la reale esistenza delle lacune, riporto solo alcune righe espressive di Miss Hibbard [12]: « Its interpretation (dell'apparato di Golgi) in terms of aqueous seems reasonable in view of the occurrence and arrangement of the vacuoles in living cells stained by neutral red, and also because of the appearence of empty spaces in very thin sections of well fixed cells »; e continua dicendo che la sostanza non è lipoidea, non glicogeno, non muco, non cheratoialina (la ricerca era sullo stomaco di pollo); doversi l'apparato – reperto metallico – ritenersi artefatto, reale invece l'esistenza dei « vacuoli ! » J. R. Baker [13]: « the vacuoles do not contain sufficient protein to produce a granule in histological preparations; . . . their substance is fluid, presumably watery »; Hibbard ancora e Lavin [14]: « the Golgi vacuoles does not contain appreciable amounts of nucleoproteins, or nucleic acids . . . except possibly in greater dilution than in the rest of the cytoplasm ».

Tutto questo è luce di essenza sulla mia prima individuazione e comprensione del lacunoma ! È progresso dalla mia basale descrizione e affermazione morfologica verso la conoscenza intima.

(12) H. Hibbard, *The « Golgi apparatus » during development in the stomach of Gallus domesticus*, « Journ. Morph. », vol. 70 (1942).

(13) J. R. Baker, *The structure and chemical composition of the Golgi element*. « Quart. Journ. of micr. Sc. », vol. 85 (1944).

(14) H. Hibbard a G. J. Lavin, *A study of the Golgi apparatus in chicken gizzard epithelium by means of the quartz microscope*. « Biol. Bull. », vol 89 (1945).

Biologia. — *La determinazione di arti soprannumerari in "Bufo vulgaris"*(*). Nota II di T. PERRI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

In una mia Nota precedente, seguìta da un lavoro in esteso (1), mi occupai di vari casi di arti soprannumerari che avevo ottenuti in *Bufo vulgaris* trapiantando sul tronco, allo stadio di bottone codale piccolissimo, complessi di abbozzi asportati o ad embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali oppure ad embrioni ibridi non vitali (*Bufo viridis* ♀ × *Bufo vulgaris* ♂)

Gli arti soprannumerari da stimoli abnormi furono visti dapprima dal Balinsky nel 1925 (2) in *Triton*, e poi ampiamente studiati sia da lui che da altri autori mediante trapianti di otocisti, o di placode olfattorio, ecc. su embrioni di Urodeli. Per gli Anuri ne conosco un caso solo ottenuto dal Filatow (3), proprio in *Bufo vulgaris*, con trapianto di ipofisi. Questa diversità tra gli Anuri e gli Urodeli fu notata particolarmente dal Balinsky e dal Filatow.

Con la tecnica che tra poco dirò, già l'anno scorso avevo ottenuto numerosi casi di arti soprannumerari in *Bufo vulgaris*. Ho poi continuato in queste ricerche, e le continuerò ancora, perchè mi paiono interessanti per vari aspetti: mi limito a notare che permettono di studiare più a fondo sia la natura di questi induttori abnormi, sia il modo di estrinsecarsi dei « campi morfogenetici » che in *Bufo vulgaris* presentano alcune modalità, che non mi risulta siano state rilevate negli Urodeli; ed è sopratutto dei « campi morfogenetici » che quest'anno ho inteso occuparmi.

Ho usato la tecnica che mi aveva già dato i migliori risultati: ad embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali asportavo la parte apicale della testa comprendente la regione boccale, l'ipofisi e parti circonvicine di encefalo; e la trapiantavo sul tronco di embrioni normali, allo stadio di bottone codale piccolissimo, a distanza varia dagli abbozzi degli arti normali, in modo da cogliere eventuali differenze tra le varie zone. Solo in pochi casi trapiantai invece la vescicola ottica insieme a circostante encefalo da donatori anch'essi röntgenirradiati con dosi letali. Ottenni quest'anno una ventina di casi, tenuti in vita sino alla metamorfosi, che presentano chiari arti soprannumerari.

Ecco ora in breve i risultati.

Nei casi di arti soprannumerari sviluppatisi vicino al normale posteriore, ad un di presso nel 3° posteriore della distanza tra i due arti normali, ebbi

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « Battista Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) Nota I, in questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. III, 1947., p. 613; « Arch. Zool. Ital. », vol. XXXIII, 1948.

(2) « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 105, 1925.

(3) « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 127, 1933.

a volte arti atipici; ma dove questi sono meglio sviluppati, si riconosce nettamente che sono arti posteriori o singoli o duplici (una coppia di arti soprannumerari posteriori). Vi appartengono gli arti meglio conformati [4] che finora ottenni. Non vi si sviluppò mai un arto anteriore.

Gli arti sviluppatisi in vicinanza dell'arto normale anteriore, ad un di presso nel 3° anteriore della distanza tra i due arti normali, o sono atipici, il che è avvenuto più frequentemente che nella regione posteriore, oppure sono arti anteriori; in nessun caso vi ebbi arti posteriori. Le formazioni sono anche qui semplici o multiple, in un caso sino a 4 arti.

Nella zona intermedia alle due precedenti si osservano interessanti differenze. Dai risultati finora ottenuti emerge che non vi si sono mai sviluppati arti tipici come nelle altre due zone. Nei casi meglio sviluppati (e sono rarissimi) l'autopodio presenta o due o tre dita; ma per lo più l'atipia è ancora maggiore, con autopodio rudimentario o assente. In vari casi si sono sviluppate solo cartilagini che talora si riconosce appartenere ad arti [5].

Adunque gli arti soprannumerari meglio sviluppati li ottenni nella zona vicina all'arto posteriore; risultati di poco inferiori, ma ancora arti abbastanza tipici, ebbi nella zona anteriore; risultati di sviluppo nettamente minore, e spesso di forte atipia, ebbi nella zona intermedia.

Per spiegare questi fatti, debbo anzitutto rilevare che differenze nei caratteri dello stimolo apportato dal trapiantato (diversità di volume, di durata in vita, ecc.) certamente esistono benchè abbia cercato di usare una tecnica uniforme; ma tutto questo può spiegare solo le differenze ottenute nell'ambito di una stessa zona. È noto che per gli organizzatori embrionali l'atipia dell'indotto è da alcuni autori considerata come indice di scarso potere induttore dell'agente usato.

Ma le differenze riscontrate tra zona e zona implicano appunto che le varie zone presentano proprietà diverse. Queste possono dipendere da diversa capacità arto-formativa (nel senso di differenze insite nel substrato, o nelle possibilità d'innervazione, ecc.); oppure da insufficiente azione dei « campi » a causa della loro distanza. Non mi è possibile pronunciarmi nettamente sull'importanza di questi vari fattori, anche perchè le diverse proprietà del substrato possono a loro volta essere connesse con « campi morfogenetici »: vi occorre comunque ulteriore sperimentazione.

Il Balinsky (1933) [6] a proposito degli arti soprannumerari da lui ottenuti, ammette che il territorio della piastra laterale ha in sè la capacità di formare arti, capacità che all'influori delle zone degli arti normali rimane latente, ma può essere ridestata da un trapianto ad alta intensità metabolica. Il Weiss (secondo la citazione del Balinsky) pensa che il trapianto deter-

(4) Gli arti soprannumerari non sono mai completamente normali, sia per la struttura anatomica, sia per la funzionalità che è assente. Perciò il termine « tipico » va inteso in senso relativo.

(5) In questi casi all'osservazione in vivo può sembrare dapprima che vi siano gemme uguali a quelle che poi si sviluppano in arti soprannumerari più o meno ben differenziati.

(6) « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 130, 1933.

mini solo una proliferazione cellulare e che sia indispensabile l'estensione del normale « campo » di un arto per dirigerne lo sviluppo. Debbo notare che più recentemente il Weiss [7] interpreta che la « irritazione » prodotta dal trapiantato fornisca lo stimolo che attiva l'adiacente materiale della piastra laterale, che conformemente alla sua natura dà un arto soprannumerario.

Mi sembra che i risultati concreti già ottenuti, a parte ogni interpretazione, mostrino in *Bufo vulgaris* una netta distinzione tra un « campo » (comunque lo si voglia interpretare) dell'arto anteriore ed uno del posteriore; la loro intensità va diminuendo man mano che ci si allontana dall'arto normale; rimane una zona intermedia in cui un'azione di « campo » è molto debole, onde formazioni fortemente atipiche. È qui da ricordare il concetto di Needham, Waddington e Needham [8], che distinguono una « evocazione » data dal trapiantato ed una « individuazione » in rapporto con le forze del « campo ».

Dai risultati finora ottenuti, dal Balinsky (1933) in *Triton* e da me in *Bufo vulgaris*, si possono ricavare alcune differenze. In *Triton* si ottengono arti soprannumerari in tutta la zona compresa tra gli arti normali anche con induttori (otocisti) che negli Anuri non hanno dato finora alcun risultato. Si possono porre queste differenze in rapporto alla specie su cui si è sperimentato; benchè ciò sia una constatazione e non una spiegazione dei fatti. In vari casi eseguii in *Rana esculenta* e in *Bufo viridis* le stesse esperienze e con la stessa tecnica che in *Bufo vulgaris*; ottenni, almeno finora, solo una volta una gemma soprannumeraria di arto in *Bufo viridis* e nulla in *Rana esculenta*; questi risultati tendono a ribadire l'importanza della specie usata. È noto inoltre che negli Urodeli adulti i territori capaci di dare arti soprannumerari per stimolazione da parte di tronchi nervosi sono (Locatelli; Guyénot e Schotté) [9] molto limitati; parrebbe aversi in *Bufo vulgaris* condizioni che negli Urodeli esistono in stadi molto più avanzati.

Sui fattori che nei miei casi hanno conferito al trapiantato una notevole intensità e durata di stimolo, credo, come già scrissi nella mia precedente Nota, che abbiano notevole importanza il volume del trapiantato e la sua proprietà di andare distrutto; gli induttori da me usati hanno infatti questo di particolare, che per essere stati irradiati con dosi letali di raggi X soggiacciono a distruzione, onde messa in libertà di sostanze. Questa distruzione, per le dosi da me usate di raggi X, è sicuramente completa, come risulta da altre mie ricerche; onde già per questo il trapiantato non può fornire alcun materiale alla costituzione dell'arto soprannumerario; e ciò è d'accordo con le conclusioni tratte, in base alle loro esperienze, da Balinsky e da G. Hertwig [10]. È ben noto che per gli organizzatori embrionali uccisi si dà grande

(7) *Principles of development*, New York 1939 (v. pp. 365–369).

(8) J. NEEDHAM, « *Biochemistry and morphogenesis*, » Cambridge 1942. (v. p. 125).

(9) P. LOCATELLI, « Arch. Ital. de Biol. », vol. 74, 1924. E. GUYÉNOT e O. SCHOTTÉ, « C. R. Soc. Biol », vol. 94, 1926.

(10) BALINSKY, « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 110, p. 63, 1927. G. HERTWIG, ivi, vol. 111, 1927.

importanza ai prodotti di disintegrazione, particolarmente ai protidi. Questi concetti furono pure studiati per gli arti soprannumerari degli Urodeli dal Nassonov e successivamente dal Fedotov [11] e da altri; in *Axolotl* adulto fu visto che prodotti di disintegrazione per legatura dell'arto, o trapianti di tessuti uccisi, o estratti di vari tessuti iniettati sotto la cute dell'arto, possono condurre alla determinazione di arti soprannumerari. Anch'io ho iniziato esperienze di trapianto, sempre su *Bufo vulgaris*, sia di tessuti embrionali uccisi al calore, sia di tessuti larvali; ma da queste esperienze non posso ancora trarre conclusioni.

Debbo ora accennare ad un'altra questione, che come già scrissi mi pare strettamente connessa con quella del « campo »; cioè il verificarsi o meno delle leggi di simmetria speculare del Bateson [12].

Nei casi di arti soprannumerari posteriori abbastanza tipici per distinguere se siano destri o sinistri, ho avuto anche quest'anno che sono di lateralità opposta al lato in cui si trovano, onde implicitamente in simmetria speculare con il vicino arto normale. Nei casi di coppie di arti soprannumerari, se sono ambedue sufficientemente tipici, si ha grosso modo che sono tra loro specularmente simmetrici, e quello più vicino al normale è anche con questo specularmente simmetrico.

Nel campo dell'arto anteriore i risultati sono meno chiari; a volte l'autopodio è in simmetria speculare con il normale mentre il rimanente dell'arto non è ugualmente simmetrico; solo in qualche caso ebbi chiara simmetria speculare tra il normale ed il soprannumerario.

Vi sono poi le formazioni assai atipiche che non mostrano alcuna simmetria. Ho avuto parecchi casi in cui l'autopodio appare doppio e questi sono quasi sempre divisibili in due metà specularmente simmetriche.

Come si vede, anche qui le leggi di simmetria speculare del Bateson si sono fondamentalmente verificate nei casi sufficientemente tipici; e per gli altri casi bisogna pur tener conto che troppe sono le cause che impediscono ad una primitiva tendenza alla simmetria speculare a manifestarsi, o che la fanno successivamente deviare.

CONCLUDENDO. — L'esame di molti casi di arti soprannumerari ottenuti sperimentalmente in *Bufo vulgaris*, considerati in rapporto alla distanza tra la loro zona d'impianto e quella degli arti normali, hanno permesso di distinguere un « campo » dell'arto anteriore e un « campo » dell'arto posteriore. Vi è poi una zona intermedia ai due « campi », in cui gli arti soprannumerari sono nettamente meno tipici e che potrebbe essere una zona di diminuita attività formativa.

Anche nelle esperienze di quest'anno le leggi di simmetria speculare del Bateson si sono fondamentalmente verificate.

(11) « Nature », vol. 158, 1946.

(12) Per un breve cenno storico sull'argomento rinvio al mio già citato lavoro in esteso.

Antropologia. — *Ricerche antropologiche sulla famiglia dei Medici* (*). Nota preliminare di G. GENNA, presentata (**) dal Corrisp. S. SERGI.

La conoscenza del meccanismo ereditario dei caratteri umani appare, allo stato attuale della scienza, d'importanza fondamentale per la valutazione del significato antropologico dei caratteri stessi, e, pertanto, l'analisi genetica sta al centro della moderna indagine antropologica. A tale scopo non ci si può valere che quasi esclusivamente dei metodi di osservazione, fra i quali, a parte quello statistico massivo che elabora dati relativi a gran numero di famiglie contemporanee di ceppo generalmente diverso, ha grande importanza quello dei singoli alberi genealogici estesi possibilmente a molte generazioni successive di uno stesso ceppo familiare.

È noto che dati per alberi genealogici così estesi si possono avere solo per famiglie illustri, di cui le cronache, gli epistolari, l'iconografia ecc., ci hanno tramandato notizie circa i caratteri morfologici, fisiologici e psicologici individuali, come il caso della famiglia dei Medici, la cui storia biologica, dalle origini (secolo XIV) all'estinzione (secolo XVIII), Gaetano Pieraccini ha tessuto nell'opera monumentale *La stirpe dei Medici di Cafaggiolo* (2ª edizione 1948).

Ma circa i caratteri scheletrici, sia considerati per sè stessi, che come base di tanti caratteri esterni, per quanto io sappia, non si hanno finora dati.

Un'occasione propizia, da questo punto di vista, si è presentata nel 1945, quando, finita la guerra, si dovevano ricollocare sulle tombe medicee della Sacrestia Nuova della insigne Basilica di S. Lorenzo a Firenze le celebri sculture di Michelangelo, già rimosse per metterle al sicuro da eventuali offese belliche. Una ricognizione preliminare di queste tombe apparve necessaria per identificare e riordinare i resti di tanti illustri personaggi della storia di Firenze e d'Italia ed essa fu affidata all'Istituto di Antropologia dell'Università Fiorentina, da me diretto, con deliberazione 7 agosto 1945 del Consiglio di amministrazione dell'Opera Mediceo Laurenziana, presieduto dall'allora sindaco di Firenze, prof. Gaetano Pieraccini.

Con queste ricognizioni, facilitate dall'illuminato interessamento e dall'aiuto continuo del prof. Giovanni Poggi, Soprintendente all'Arte Medioevale e Moderna e dall'intelligente adesione del Priore Mitrato della Basilica di S. Lorenzo mons. Giovanni Rosselli, e successivamente estese a tutti i resti mortali dei Medici, conservati a Firenze e fuori, io vado compiendo uno studio

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Antropologia dell'Università di Firenze.
(**) Nella seduta del 13 marzo 1948.

antropologico, diretto sia a completare la conoscenza dei caratteri somatici della celebre famiglia, sia a ricostruire le fila del processo ereditario biologico che lega le dodici generazioni medicee.

Si è cominciato, nella Sacrestia Nuova della Basilica di S. Lorenzo, con la ricognizione della tomba sottostante alle statue del « Giorno » e della « Notte », ove sono stati trovati i resti di Giuliano Duca di Nemours (1479–1516), in parte mummificati (9 agosto 1945). Quindi si è esaminata la tomba sottostante alle statue dell'« Aurora » e del « Tramonto », ove giacevano commisti i resti di Lorenzo Duca d'Urbino (1492–1519), e di Alessandro Duca di Firenze (1511–1537) (9 agosto 1945).

Nell'interno del bancone marmoreo sottostante alla statua della Madonna ed a quelle dei Santi Cosma e Damiano, sempre nella Sacrestia Nuova, sono stati trovati, in separate casse, i resti di Lorenzo il Magnifico (1449–1492) e di Giuliano suo fratello (1453–1478), ucciso nella congiura dei Pazzi (23 ottobre 1945).

Nella Sacrestia Vecchia, sotto il grande tavolo di marmo, nei due pozzetti posti ai lati del sarcofago donatelliano, sono stati rinvenuti numerosi orci contenenti i residui disseccati di visceri di vari membri della famiglia Medici, ed insieme un abbondante materiale scheletrico, da cui è stato possibile ricavare varii scheletri incompleti femminili, appartenenti probabilmente a donne di casa Medici che risultano mancanti fra quelle con sepoltura nota (21 novembre 1945).

Nel sarcofago donatelliano, sotto il tavolo di marmo, si sono trovate le ossa di Giovanni di Bicci (1368–1429), che si può considerare come il capostipite della famiglia, e quelle di Piccarda Bueri sua moglie (1368–1433), oltre quelle di un incognito (5 settembre 1945).

Dalla navata centrale della chiesa, ai piedi dell'altare maggiore, si è potuto penetrare nell'interno del pilastro centrale della Basilica, dove è stato rinvenuto in una cassa di larice ancora ben conservata, con chiave di ottone secondo lo stile dell'epoca, lo scheletro intatto di Cosimo il Vecchio, « Pater Patriae » (1389–1464) (21 maggio 1946).

Nella cripta sottostante alla cappella dei Principi, ove si trovano le tombe delle ultime generazioni medicee, quali vi furono sistemate nel 1857 (vedi G. Sommi Picenardi, *Esumazione e ricognizione delle ceneri dei Principi Medicei fatta nell'anno 1857*, in « Archivio storico italiano », ser. V, tomo I, disp. III e tomo II, disp. IV, Firenze, 1888) sono stati finora esaminati i resti di Giovanni dalle Bande Nere (1498–1526) e di sua moglie Maria Salviati (1499–1543) (9 dicembre 1946); e successivamente quelli di Cosimo I granduca (1519–1574), di sua moglie Eleonora di Toledo (1522–1562) e dei loro figli cardinale Giovanni (1543–1562) e don Garzia (1547–1562) (9 maggio 1947).

È imminente la ricognizione dei figli di Cosimo il Vecchio, Giovanni (1421–1463) e Piero il Gottoso (1416–1469), padre quest'ultimo di Lorenzo il Magnifico, resti conservati nel celebre monumento del Verrocchio nella Sacrestia Vecchia di S. Lorenzo.

Di ogni individuo esaminato faccio un esame descrittivo e metrico di tutte le ossa, avendo di mira anche, per così dire, la ricostruzione ideale del vivente di cui lo scheltro costituiva l'impalcatura. Invero, i caratteri scheletrici, oltre che come caratteri interni invisibili in un individuo coperto dalle parti molli, parlano, alla mente e all'occhio dell'osservatore attento, come base di tanta parte delle dimensioni, proporzioni e forme corporee esterne, e spesso anche di attitudini fisiologiche del vivente.

Lo studio è in pieno svolgimento e non potrà dare risultati di interesse genetico che quando sarà completo.

Intanto però in questa Nota preliminare, destinata a presentare la ricerca nel suo vero aspetto scientifico e ad ovviare a varie inesattezze ed esagerazioni in cui è incorsa la stampa quotidiana avida di render pubbliche le notizie a riguardo, offro un quadro documentario dei caratteri cranici e facciali e della statura degli individui fin ora esaminati.

In conclusione da un primo esame dei dati surriferiti, esame che sarà ulteriormente approfondito e completato con gli individui ancora da esaminare, risulta che i membri delle prime generazioni medicee mostrano una sensibile uniformità familiare, sia per la forma della testa che è prevalentemente allungata o dolicomorfa, con altezza media e fronte relativamente larga; conformazione che si può definire sinteticamente, secondo il metodo di G. Sergi, come ellissoide larga, ed armonizza con la capacità cranica che è piuttosto grande:

Giovanni di Bicci	cmc. 1635	Maria Salviati . .	cmc. 1020
Piccarda Bueri	» 1230	Lorenzo di Urbino	» 1560
Cosimo il Vecchio	» 1580	Alessandro . . .	» 1420
Lorenzo il Magnifico	» 1660	Cosino I Granduca	» 1390
Giuliano di Piero	» 1700	Eleonora di Toledo	» 1170
Giuliano di Nemours . . .	» 1620	Giovanni Cardinale	» 1360
Giovanni dalle Bande Nere	» 1510	Don Garzia . . .	» 1380

Sembra quindi che si possa parlare, in senso antropologico, di un ceppo originario mediceo ben caratterizzato, per quanto destinato ad essere più o meno alterato, nelle generazioni successive, dall'immissione di sangue eterogeneo ad opera delle donne di provenienza straniera e di tipo diverso, introdotte nello stipite mediante i matrimoni.

	Lunghezza massima cranio cerebrale (1)	Lunghezza della base cranica (5)	Lunghezza del forame magno (7)	Larghezza massima del cranio cerebrale (8)	Indice larghezza-lunghezza del cranio (8 : 1)	Larghezza frontale minima (9)	Indice frontoparietale trasversale (9 : 8)	Larghezza frontale minima con parti molli (9 m)	Larghezza del forame magno (16)	Indice del forame magno (16 : 7)	Altezza basion-bregma (17)	Indice alt. bas. bregma lunghezza cranio (17 : 1)	Indice alt. bas. bregma larghezza cranio (17 : 8)	Altezza auricolo-bregmatica (20)	Indice alt. aur. bregma lunghezza cranio (20 : 1)	Indice alt. aur. bregm. larghezza cranio (20 : 8)	Lunghezza della faccia (40)	Indice gnatico (40 : 5)	Larghezza bizigomatica (45)	Indice fronto iugale (9 : 45)	Larghezza bizigomatica con parti molli (45 m)	Indice fronto iugale con parti molli (9 m : 45 m)	Altezza della faccia (47)	Indice facciale totale (47 : 45)	Altezza facciale superiore (48)	Superficie triangolo facciale mmq (45 × 48 : 2)	Indice facciale superiore (48 : 45)	Larghezza orbitale destra (51 *a*)	Larghezza orbitale sinistra (51 *a*)
vanni di Bicci .	190	108	37	154	81.05	107	69.48	113	31	83.78	131	68.95	85.06	112	58.95	72.73	(108)	(100.—)	138	77.54	144	78.47	(126)	(91.30)	73	50.37	52.90	42	44
carda Bueri . .	175	95	38	134	76.57	93	69.40	98	30	78.05	128	73.14	95.52	107	61.14	79.85	(91)	(95.79)	129	72.09	137	71.53	112	86.82	65	41.62	50.39	42	(42
imo il Vecchio .	190	107	39	144	75.79	101	70.14	107	32	82.05	140	73.68	(97.22)	116	61.05	80.56	96	89.72	135	74.81	141	75.89			77	51.97	57.04	44	44
enzo il Magnifico	199	112	39	146	73.37	105	71.92	111	30	76.92	137	68.84	93.84	119	59.80	81.51	114	101.79	134	78.36	140	79.29	126	94.03	76	50.92	56.72	43	44
liano di Piero .	196	108	39	145	73.98	110	75.86	116	32	82.05	134	68.37	92.41	119	60.71	82.07	107	99.07	135	81.48	141	82.27			78	49.13	57.78	44	43
liano di Nemours	190	103	36	146	76.84	103	70.55	109	30	83.33	135	71.05	92.47	119	62.63	81.51	99	96.12	137	75.18	143	76.22	123	89.78	76	52.06	55.47	44	44
vanni delle Bande Nere . . .	182	98	38	144	79.12	96	66.67	102	32.5	85.53	138	75.82	95.83	114	62.64	79.17	(92)	93.88	133	72.18	139	73.38	126	94.74	(77)	51.20	(57.89)	40	41
ria Salviati . . .	157	91	32	126	80.25	88	69.84	93	28	87.50	120	76.43	95.24	101	64.33	80.16	90	98.90	116	75.86	124	75.00	102	87.93	66	38.28	56.90	39	39
enzo di Urbino.	181	100	33	142	78.45	100	70.42	106	28	84.85	130	71.82	91.55	115	63.54	80.99	96	96.—	136	73.53	142	74.65			76	51.68	55.88	43	43
ssandro	180	97	37	137	76.11	95	69.34	101	27	72.97	128	71.11	93.43	113	62.78	82.48	97	100.—	127	74.80	133	75.94	118	92.91	74	46.99	58.27	42	40
imo I Granduca	177	99	35	140	79.10	96	68.57	102	29	82.86	134	75.71	95.71	112	63.28	80.00	92	92.93	134	71.64	140	72.86	117	87.31	72	48.24	53.73	41	42
onora di Toledo	165	88	33	140	84.85	101	72.14	106	26	78.79	117	70.91	83.57	102	61.82	72.86	85	96.59	123	82.11	131	80.92	110	89.43	70	43.05	56.91	39	39
vanni Cardinale	173	100	37	139	80.35	101	72.66	107	30	81.08	131	75.72	94.24	111	64.16	79.86	94	94.—	127	79.53	133	80.45	120	94.49	74	46.99	58.27	43	43
n Garzia . . .	168	97	35	134	79.36	95	70.90	101	29	82.86	136	80.95	101.49	114	67.86	85.07	91	93.81	118	80.51	124	81.45	102	86.44	66	38.94	55.93	38	39

	Altezza orbitale destra (52)	Altezza orbitale sinistra (52)	Indice orbitale destro (52 : 51 a)	Indice orbitale sinistro (52 : 51 a)	Larghezza nasale (54)	Altezza nasale (55)	Indice nasale (54 : 55)	Lunghezza mascello-alveolare (60)	Larghezza mascello-alveolare (61)	Indice mascello-alveolare (61 : 60)	Lunghezza del palato (62)	Larghezza del palato (63)	Indice palatino (63 : 62)	Larghezza condiloidea della mandibola (65)	Larghezza goniaca della mandibola (66)	Indice mandibolo iugale (66 : 45)	Larghezza goniaca mandibolare con parti molli (66 m)	Indice mandibolo iugale con parti molli (66 m : 45 m)	Altezza del mento (69)	Altezza ramo mandibolare destro (70)	Altezza ramo mandibolare sinistro (70)	Larghezza ramo mandibolare destro (71)	Larghezza ramo mandibolare sinistro (71)	Indice del ramo mandibolare destro (71 : 70)	Indice del ramo mandibolare sinistro (71 : 70)	Statura (Manouvrier)
Giovanni di Bicci .	37	38	88.10	86.36	26.5	55	48.18	55	(61)	(110.91)	53	(37)	(69.81)	(132												172
Piccarda Bueri . . .	35	(35)	83.33	(83.33)	(26)	49	(53.06)	(45)	61	(135.55)	41	35	85.37	116	(104	80.62	(110)	80.29)	31	(62	62	36	36	(58.06	58.06	153
Cosimo il Vecchio . .	39	39	88.64	88.64	25	57	43.86	(50)	(65)	(130.00)	(45)			129	116	85.93	121	85.82	(30)	62	62	36	36	58.06	58.06	174
Lorenzo il Magnifico	35	36	81.40	81.82	23.5	52	45.19	64	66	103.13	57	40	70.18	122	109	81.34	114	81.43	37	82	79	37	37	45.12	46.84	175
Giuliano di Piero . .	36	37	81.82	86.05	23.5	53	44.34	57	63	110.53	51	36	70.59	126	106	78.52	111	78.72	37	83	83	39	39	46.99	46.99	177
Giuliano di Nemours	37	37	84.09	84.09	25	54	46.30	53	63	118.87	48	35	72.92	119	102	74.45	107	74.83	29	76	76	35	34	46.05	44.74	177
Giovanni delle Bande Nere.	34	33	85.00	80.49	23	55	41.82	(52)	62	(119.23)	46	37	80.43	126	106	79.70	111	79.86	33	60	60	33	34	55.00	56.67	170
Maria Salviati . . .	36	35	92.31	89.74	20	46	43.48	49	54	110.20	44	35	79.55	104	86	74.14	92	74.19	23	50	52	31	31	62.00	59.62	156
Lorenzo di Urbino .	34	36	79.07	83.72	25	53	47.17	53	64	120.75	48	38	79.17	122	103	75.74	108	76.06	34	69	68	32	35	46.38	51.47	169
Alessandro	33	34	78.57	85.00	23	55	41.82	54	61	112.96	49	37	75.51	107	86	67.72	91	68.42	29	61	64	33	34	54.10	53.13	167
Cosimo I Granduca .	35	35	85.37	83.33	23	54	42.59	52	67	128.85	45	42	93.33	117	104	77.61	109	77.86	28	66	63	35	34	53.03	53.97	171
Eleonora di Toledo .	35	34	89.74	87.18	22	50	44.00	49	60	122.45	44	35	70.55	113	86	69.92	92	70.23	29	53	55	30	30	56.60	54.55	155
Giovanni Cardinale . .	37	36	86.05	83.72	21	55	38.18	50	63	126.00	45	37	82.22	113	94	74.02	99	74.44	30	68	65	36	37	52.94	56.92	168
Don Garzia	34	35	89.47	89.74	20	48	41.67	46	62	134.78	43	34	79.07	(103)	89	75.42	94	75.81	23	47	48	29	29	61.70	60.42	159

COMMEMORAZIONI

L'opera scientifica di Leonida Tonelli

Letta dal Corrispondente G. SANSONE, nella seduta del 15 maggio 1948

Il 12 marzo 1946, quando ancora in Italia erano vive, per mille segni, le sofferenze della terribile guerra che l'aveva sconvolta, in una fredda notte invernale, arrivava ai matematici italiani l'angoscioso annuncio telegrafico, lanciato da Pisa, della morte di Leonida Tonelli.

Notizia crudele e inaspettata: qualche amico sapeva che Egli soffriva di un forte attacco influenzale, ma tutti, compresi i familiari, erano ben lontani dal sospettare che la Sua vita sarebbe stata così repentinamente spezzata.

Convennero nei due giorni successivi a Pisa, da ogni parte d'Italia, colleghi e discepoli, per porgere l'estremo saluto a Colui che per un trentennio aveva altamente rappresentato l'Analisi italiana.

Nato il 19 aprile 1885 a Gallipoli (Lecce) da famiglia veneta, seguì il padre, ufficiale superiore dell'esercito, in varie città italiane, e nel 1902 si iscrisse a Bologna al biennio di ingegneria. Attratto dall'influsso dei Suoi Maestri, e sopratutto di Cesare Arzelà e Salvatore Pincherle, passò ai corsi per la laurea in matematica pura. Nell'ultimo anno di studi si ammalò per una violenta infezione tifoidea, che come mi disse una volta Federico Enriques, altro suo Maestro, fece molto trepidare per la Sua vita; riuscì a salvarsi, ma i postumi della malattia furono lunghi, e menomarono per l'avvenire le resistenze interne del Suo fisico.

Egli si laureò nel 1907 con lode, e con la tesi ebbe inizio anche la Sua luminosa attività scientifica che doveva portarlo a spaziare nell'Analisi.

I matematici della mia generazione ricordano le Sue prime pubblicazioni: la qualità degli argomenti trattati, i risultati conseguiti, e il tono delle argomentazioni diedero subito la sensazione dell'alto valore del giovane studioso.

Nel 1913 Egli otteneva per unanime designazione dei Commissari la cattedra di Analisi Algebrica a Cagliari, e nel 1914, in seguito ai brillanti risultati di un altro concorso, quella di Analisi Infinitesimale a Parma, e vi diventava ordinario nel 1917.

A me, cui è stato conferito da questa insigne Accademia l'alto onore di ricordarlo, non sarebbe forse difficile dare in breve la visione dei punti più espressivi della Sua produzione scientifica, ma ritengo doveroso parlare diffusamente delle Sue ricerche, e particolarmente della costruzione dei

Suoi « Fondamenti », che già in vita gli dettero rinomanza mondiale, e che hanno fatto di Lui uno dei maggiori matematici italiani degli ultimi secoli. Dirò tuttavia, rapidamente, delle Sue ricerche sulle Funzioni di una variabile complessa, sulla Teoria delle Funzioni di variabile reale e sull'integrazione, sulle Serie Trigonometriche, sulle Equazioni Differenziali e integrali, per ricordare invece, e vorrei nel modo più degno, le Sue costruzioni e le Sue invenzioni nel Calcolo delle Variazioni.

Un gruppo di lavori giovanili, che derivano dalla Sua appartenenza alla scuola di Salvatore Pincherle, riguardano la così detta « Teoria delle funzioni ».

È di particolare importanza una ricerca sugli zeri di una funzione olomorfa limite di una successione convergente di funzioni pure olomorfe [10] (*) nella quale Egli perfeziona un teorema di Hurwitz relativo al caso che la successione sia uniformemente convergente (1), e sono del pari importanti un'elegante osservazione sul semipiano di convergenza di una serie di Dirichlet [6], una Memoria sulla costruzione di serie di funzioni analitiche che nella stella di convergenza rappresentano un ramo monodromo di una funzione analitica regolare [14], e due lavori sull'iterazione [11,13] dove con la generalizzazione del così detto metodo della media aritmetico-geometrica di Lagrange e Gauss si stabilisce la convergenza di una vasta classe di algoritmi di iterazione definiti da sistemi di equazioni assai generali.

In tutte le altre Sue ricerche, Tonelli spaziò quasi essenzialmente nel campo delle Funzioni di Variabili reali.

Ulisse Dini nei suoi « Fondamenti per la Teorica delle Funzioni di Variabili reali » (2) aveva affacciato il dubbio che una funzione derivabile non fosse sempre l'integrale della sua derivata. Vito Volterra nel 1881 (3) ancora studente, dava il primo esempio di una funzione che non è l'integrale secondo Mengoli-Cauchy della sua derivata, e nel 1907, l'allora giovanissimo Tonelli in una Nota [1] che fu oggetto di una sua tesina orale di laurea, riprendendo la questione in generale, dava la condizione necessaria e sufficiente, perchè si verificasse questa circostanza.

È pure del Dini il problema della determinazione di una funzione continua di cui sia assegnato uno dei numeri derivati e L. Scheeffer nel 1884 dava le condizioni per ritenerlo ben posto.

(*) I numeri in parentesi quadra si riferiscono all'elenco dei lavori posto alla fine della commemorazione, elenco curato dal dottor Landolino Giuliano, che qui pubblicamente ringrazio.

(1) « Math. Werke », II, p. 269.

(2) Pisa, p. 276 (1878).

(3) V. VOLTERRA. *Sui principi del Calcolo Integrale.* « Giornale di Matematica di Battaglini », *19*, pp. 333-372 (1881).

Restava la questione della costruzione della funzione, o come si dice la ricerca della « funzione primitiva », e in più tempi il Nostro ritornò sulla questione con lavori significativi.

In una nota [37 bis] Tonelli si propose di dimostrare con un metodo, come Egli disse, « più elementare ed anche più intuitivo », il teorema di Lebesgue e di Vitali per il quale ogni funzione assolutamente continua è l'integrale della sua derivata. A fondamento della Sua costruzione è una dimostrazione di natura puramente geometrica sulla esistenza quasi dapertutto della derivata di una funzione monotòna.

Per le funzioni continue, ma non assolutamente continue, Tonelli osservava che il problema è ben posto sotto la condizione che assegnato uno dei suoi numeri derivati, questo non diventi infinito che al più in un insieme numerabile, e lo risolveva con procedimento di integrazione del Denjoy [42, 54], in modo « estremamente semplice ». Successivamente, ubbidendo ad una istintiva necessità, che lo portava di ogni questione a considerare i soli fatti essenziali e a liberarsi di ogni considerazione non strettamente necessaria, Egli dava in forma notevolmente semplice e definitiva la costruzione della funzione primitiva [72].

Appartiene pure a questo gruppo di ricerche una Sua Nota del 1931 [98] con la quale è dimostrato un teorema di G. Goldwski (4) della costanza di una funzione continua e derivabile in un intervallo, con derivata finita o no, nell'ipotesi che la derivata sia nulla quasi dapertutto. Uno scolaro di Tonelli mi diceva che un raffinato analista, colpito dalla particolare semplicità della dimostrazione del Nostro, gli aveva scritto che la proposizione era così importante, che per necessità di cose la Sua dimostrazione doveva essere sbagliata, ma a pochi giorni di distanza faceva seguito una nuova lettera con le scuse e col pieno riconoscimento dei ragionamenti di Tonelli.

I teoremi di *derivazione per serie* hanno grande importanza nell'Analisi, e a Guido Fubini (5) si deve un criterio « notevole, perchè semplice e abbastanza generale » sulla derivazione delle serie convergenti di funzioni monotòne tutte in un medesimo senso. Una dimostrazione diretta, indipendente dal concetto di integrazione per serie e da quello di integrale, del teorema di Fubini e altri teoremi anche in ipotesi più generali di quelli dati successivamente da N. Obrechkoff (6) e da A. Colucci (7) con estensioni alla convergenza in media, furono stabiliti in un gruppo di note del Nostro [37, 40, 97] e arricchiscono ora questo capitolo dell'Analisi.

Un risultato pure del Nostro sulla deduzione da una funzione integrabile di un'altra classe di funzioni integrabili, che in un punto prefissato acquistano un infinito assegnato di ordine minore di uno [74], è di frequente applicazione, e altre notevolissime applicazioni ricevono alcuni studi del Nostro

(4) *Note sur les derivées exactes*. « Rec. Math. de la Soc. Math. de Moscou », *35* (1928).

(5) *Sulla derivazione per serie*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », (5), *24*, pp. 204–206 (1915).

(6) *Sur les séries de fonctions*. « Compt. Rend. des Séan. Acc. Sc. Paris », *191*, pp. 373–375 (1930).

(7) « Boll. Un. Mat. It. », *9*, pp. 278–280 (1930).

pertinenti agli *integrali multipli*. Nel 1909 una ricerca sull'integrazione per parti delle funzioni di due variabili [7] lo portava a stabilire un teorema sulla mutua esistenza ed uguaglianza di un integrale doppio di una funzione non negativa, superficialmente integrabile, e dei corrispondenti integrali doppi iterati, noto oggi nei trattati come teorema di Tonelli [8]; in una Nota del 1910 [9] Egli studiava in ipotesi assai generali la dipendenza dell'integrale di Lebesgue da un parametro e la derivabilità rispetto ad esso; in una Nota del 1915 [34] riprendendo una questione trattata dal Lebesgue nel 1910, dava col Fubini nelle condizioni più generali la formula della derivata seconda mista rispetto agli estremi di un integrale doppio con estremi variabili.

È ben noto che soltanto in grazia dell'applicazione di metodi della teoria delle funzioni di variabile reale, H. Looman [9] nel 1923 stabiliva un teorema atto a garantire col minimo delle ipotesi la monogeneità di una funzione di variabile complessa in un dominio aperto. Sostanzialmente la questione si riduce a trovare le condizioni sotto cui può applicarsi il teorema di Green nel piano, e in una Sua Nota del 1925 [56] il Tonelli, oltre ad estendere il teorema di Looman pone al lettore alcuni problemi ancora insoluti sulle trasformazioni degli integrali di campo. Le condizioni imposte da Tonelli possono non verificarsi in un insieme numerabile di punti; con l'estensione agli insiemi superficiali di misura nulla si passa al così detto teorema di D. Menchoff pubblicato la prima volta nel trattato di S. Saks del 1930 [10], ed il Tonelli è perciò da ritenersi anch'Egli come uno dei principali costruttori di questo teorema.

Ai *fondamenti dell'Analisi* appartengono una Nota giovanile del Nostro [3] nella quale si prova con la vivacità tonelliana, che sarà poi caratteristica di tutta la sua vita, che una classificazione degli insiemi contenuta nel volume di un noto trattatista è illusoria; una Nota del 1919 sulla costruzione di una classe di insiemi che hanno la potenza del continuo [39]; una Nota del 1936 [117] dove si osserva, come del resto Egli aveva osservato altra volta [46, p. 171] che non soltanto ad Heine secondo la scuola tedesca, e a Borel secondo la scuola francese, ma ancora al Pincherle appartiene la scoperta del primo teorema di copertura degli insiemi, esteso poi da Vitali in forma diventata ormai classica e ulteriormente perfezionato dallo stesso Tonelli; una Nota del 1914 [24] nella quale con ragionamento, ora di uso continuo nella scuola di Tonelli, si dimostra indipendentemente dall'assioma della scelta di Zermelo, il teorema di Ascoli-Arzelà sull'esistenza di una funzione di accumulazione in una varietà di funzioni equicontinue ed equilimitate; una Nota del 1924 [52] che attribuisce sia a D. Th. Egoroff che a Carlo Severini una proposizione che dalla convergenza di una successione di funzioni misurabili in un insieme, permette di dedurre la convergenza uniforme della

(8) S. SAKS, *Théorie de l'intégrale*. Warszawa, p. 75 (1933).

(9) *Ueber die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*. «Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen», pp. 97–108.

(10) Loc. cit. in (8) p. 243.

stessa successione in un sottoinsieme che differisce dall'insieme dato meno di un numero positivo prefissato. E conviene ancora ricordare tra i risultati del Nostro pertinenti la teoria generale delle funzioni di variabile reale quelli sui *Polinomi di approssimazione* di Tchebycheff e sui *polinomi approssimativi* di Stieltjes.

Nella sua dissertazione di laurea del 1907 [2] il Tonelli studiava per suggerimento del suo maestro Cesare Arzelà il problema dei polinomi di approssimazione di Tchebycheff per le funzioni continue di due variabili, e stabiliva per il primo, e forse contro la Sua aspettativa e quella del Maestro, che, a differenza di quanto avviene nel caso di una sola variabile, in quello di due non sussiste, in generale, l'unicità dei polinomi di approssimazione. Ancora per il primo applicava il metodo di Tchebycheff alle funzioni di una variabile complessa, e deduceva in questo caso, dai suoi procedimenti, l'unicità dei polinomi di approssimazione, e la continuità della corrispondenza tra le funzioni e i loro polinomi di approssimazione. Due anni dopo la pubblicazione del lavoro, i risultati del Nostro erano riportati da P. Montel nelle sue « Leçons sur les série de polynomes à une variable complexe » [11].

L'Arzelà fu indubbiamente felice nella scelta del tema per il suo giovane allievo, e il Tonelli lo trattò dando prova della Sua non comune capacità di indagine e della Sua fantasia inventiva.

Un altro lavoro giovanile concernente l'approssimazione delle funzioni continue di più variabili con polinomi è del 1910 [12].

È noto che T. J. Stieltjes in una sua lettera a Ch. Hermite a proposito del problema dei momenti, indicava incidentalmente la rappresentazione approssimata delle funzioni continue di una sola variabile mediante polinomi uniformemente convergenti, ed è pure noto che tali polinomi erano stati poi trovati simultaneamente e indipendentemente da E. Landau e da Ch. J. de la Vallée–Poussin. Il giovane Tonelli, ancora per suggerimento dell'Arzelà, affrontava in pieno il caso delle funzioni di più variabili e stabiliva un teorema che due anni dopo nel famoso « Cours d'Analyse Infinitésimale » di Ch. J. de la Vallée–Poussin [12] riceveva il nome di Teorema di Tonelli. In un lavoro successivo [36] Egli mostrava come i polinomi approssimativi di Stieltjes insieme alla grande semplicità con cui sono costruiti godono di notevoli qualità che li rendono molto utili nella rappresentazione delle funzioni e delle curve. Lui stesso e i Suoi scolari si valsero con successo dei polinomi approssimativi di Stieltjes nel problema della quadratura delle superficie [68, 73] e in alcune questioni di Calcolo delle Variazioni; e vogliamo menzionare un lavoro del 1930 sull'integrale di Dirichlet [93] nel quale appunto con l'uso dei polinomi di Stieltjes Egli conseguiva alcuni risultati fondamentali.

Anche i risultati di Tonelli sulla *rettificazione delle curve* [4, 19, 38] sono considerati nella trattatistica moderna di particolare importanza. Con l'im-

(11) Paris, pp. 66–71 (1910).
(12) T. II, p. 135 (1912).

piego dell'integrale di Lebesgue il Nostro stabiliva la relazione tra la formula integrale classica della lunghezza della curva e la lunghezza della curva stessa, e trovava le condizioni necessarie e sufficienti per l'uguaglianza, pervenendo così ad un teorema definitivo noto anche questo come teorema di Tonelli [13].

Sulla nozione di integrale secondo Lebesgue Egli ritornò più volte per motivi didattici e di indole critica. F. Riesz aveva osservato che la ragione per la quale gli Analisti tralasciano l'uso sistematico dell'integrale di Lebesgue deriva dal fatto che la teoria del Lebesgue presuppone uno studio approfondito della misura dei gruppi di punti, studio che è come una analisi microscopica di tali gruppi, e che si fonda su ragionamenti di estrema delicatezza. E il Tonelli così presentava la Sua Memoria « Sulla nozione di integrale » [49]: « Il presente lavoro è un tentativo per rendere più semplice, dirò così più elementare, e quindi più facilmente accettabile da tutti, la teoria dell'integrale di Lebesgue, liberandola completamente dalla teoria della misura dei gruppi di punti ».

Egli riprende le funzioni *quasi continue*, già definite nel primo volume dei suoi « Fondamenti di Calcolo delle Variazioni », coincidenti con le funzioni misurabili secondo Lebesgue, ove si ammetta il postulato di Zermelo, e occupandosi dapprima di quelle limitate ne considera l'integrale definito come limite di particolari funzioni ovunque continue, e col noto procedimento di Ch. J. de la Vallée Poussin passa poi alla integrazione delle funzioni non limitate.

Il contenuto della Memoria fu successivamente perfezionato nelle Lezioni da lui dettate nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa, già raccolte dal suo fedele discepolo L. Giuliano e di cui vogliamo augurarci prossima l'edizione a stampa, e l'estensione del metodo alle funzioni di più variabili fu resa poi immediata da una dimostrazione estremamente semplice che Egli diede del teorema di Lebesgue sulla costruzione in tutto lo spazio di una funzione continua che coincida con una funzione continua assegnata in un insieme chiuso e limitato [152] [14]. L'Analisi si è così arricchita di un procedimento di integrazione che nel grande trattato dell'Hobson è riportato come *Teoria dell'integrale secondo Tonelli.*

Alla teoria delle Serie Trigonometriche si volse una parte assai significativa dell'attività matematica del Nostro. È noto che il primo trattato moderno sulle serie trigonometriche di Fourier e sulla rappresentazione delle funzioni con serie di funzioni ortogonali fu pubblicato da Ulisse Dini nel 1880 [15] e dopo ventisei anni, nel 1906, comparvero le « Leçons sur les Séries Trigonométriques » di Henri Lebesgue, nelle quali il grande geo-

(13) S. SAKS, *Théorie de l'intégrale*. Warszawa, p. 77 (1933).

(14) Cfr. E. W. HOBSON, *The theory of Functions of a real variable and the theory of Fourier's series*. Cambridge, II (2ª ed.), pp. 380–382 (1926).

(15) U. DINI, *Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*. Pisa, pp. VI + 328 (1880).

metra francese, riprendendo la trattazione classica con il possente ausilio della sua integrazione, raffinava e semplificava quasi tutta la teoria, estendendone notevolmente il dominio.

Nel 1929 Tonelli pubblicava il Suo trattato « Serie Trigonometriche » [91] che raccoglieva, coordinava e completava un altro venticinquennio di attività matematica. Il trattato era stato preceduto da un volume litografato [71] redatto per gli studenti, pubblicato nel 1924–25, che aveva destato notevole interesse e suscitato vive insistenze presso l'Autore per la stampa.

Gli intenti sono dichiarati nella prefazione e una bella conferenza del Nostro al Seminario Matematico dell'Università di Roma [95] pone in luce tutti i punti più salienti del trattato. Una dotta introduzione storica, scritta con limpidezza tonelliana, lumeggia il lettore sull'importanza della teoria e dà le ragioni del piano dell'opera. Indagate le proprietà delle serie generali, o, come si dice, considerate le serie dal punto di vista riemanniano, si scende poi a studiare le peculiari proprietà delle serie trigonometriche di Fourier, tralasciando, come dirà in seguito l'A. [94] « quegli studi che, mentre non hanno alcun valore dal punto di vista delle applicazioni, ne hanno ben scarso da quello della teoria ».

Alla teoria delle serie trigonometriche semplici il Tonelli aveva apportato a più riprese originali finissimi contributi per riguardo ai criteri di convergenza puntuale [58, 134], la convergenza assoluta [59], la derivazione per serie [79], la chiusura del sistema di Fourier [76], l'interpolazione trigonometrica delle funzioni continue [62] e tutti i suoi risultati Egli pose nel Trattato.

La teoria delle serie doppie trigonometriche, alle quali Egli aveva dedicato due Memorie [69, 70], ha nel Trattato un assetto definitivo, e aprirà dopo il campo ad altre ricerche dello stesso Tonelli [130], di Cesari e di Faedo, l'uno e l'altro Suoi scolari.

I primi studi sulle serie doppie trigonometriche, quali quelli di Giulio Ascoli, si riferivano a sommabilità per righe o per colonne, e quelli sulla sommabilità per rettangoli nel senso di Stoltz e Pringsheim, dapprima con ipotesi molto onerose, quali l'esistenza delle derivate parziali dei primi quattro ordini della funzione generatrice, erano stati spinti dopo il 1900 fino a considerare le così dette funzioni generatrici a variazione doppia finita, secondo la terminologia del Nostro.

Il Tonelli, che nel 1926, nello studio della quadratura delle superficie [66,67] aveva già introdotto il fecondo concetto di funzione di due variabili a variazione limitata, indagando le proprietà delle loro serie trigonometriche, perveniva ad un fondamentale criterio di convergenza comprensivo di quasi tutti i criteri fino allora conosciuti.

Altri criteri di convergenza puntuale, di convergenza uniforme, e sulla sommabilità per righe o per colonne sono nelle ricordate Memorie del Tonelli e riportati nelle « Serie Trigonometriche »; va pure menzionata l'analisi della convergenza dei polinomi trigonometrici di Fejer in due variabili alla

quale si collegano le ricerche successive dei Suoi scolari e di alcuni matematici della scuola polacca.

Ben a ragione può dirsi che il Trattato di Tonelli, che Arnaud Denjoy nelle sue recentissime « Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique » (Paris, 1941) chiama « excellent » conferisce al Nostro, e al polacco Antony Zygmund, autore sette anni dopo del trattato « Trigonometrical series » (Warszawa, 1936, pp. 331) il merito di aver dato agli studiosi un sicuro riferimento, prezioso per le applicazioni e indispensabile a chi voglia dedicarsi a ricerche nel campo delle serie trigonometriche.

Gli studi di Tonelli di Calcolo delle Variazioni lo conducevano a considerare questioni pertinenti alla teoria delle Equazioni Differenziali. Il problema di far passare per due punti prefissati una curva estremale di alcuni integrali, si traduce in quello di determinare una soluzione di una equazione differenziale del secondo ordine, di forma normale, per gli stessi due punti. Tonelli, in una ricerca basilare [139], ponendosi in condizioni generali, col procedimento di approssimazione di Severini e con la felice individuazione di un lemma che gli consentiva di stabilire la equicontinuità degli integrali delle funzioni approssimanti, dava assai semplicemente uno dei teoremi più larghi che si conoscano in questo genere di problemi. Un'altra ricerca che si connette agli studi del Nostro sul Calcolo delle Variazioni è il così detto teorema di confronto di Sturm degli integrali delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine, omogenee, che permette di arrivare alla nozione di Jacobi di punti coniugati sulle estremali.

Il Tonelli che nei suoi « Fondamenti » aveva già dato di questo classico teorema una dimostrazione fondata sulla semplice nozione di continuità, osservava in una Nota del 1927 [75] che le sue considerazioni potevano estendersi ad una classe di equazioni differenziali del secondo ordine, non lineari, anche di forma non normale, omogenee rispetto al gruppo delle variabili formato dalla funzione incognita e dalle sue derivate prima e seconda.

Una ricerca di Tonelli sui teoremi di unicità per le equazioni differenziali lineari del primo ordine di forma normale [53], o, ciò che è lo stesso, di casi di inesistenza del così detto fenomeno di Peano, dava lo spunto per la elaborazione nel campo dei sistemi delle equazioni differenziali ordinarie di nuovi criteri di unicità, e va pure menzionato un complemento essenziale apportato dal Nostro, insieme ad altro autore [121], di un teorema di Armellini sul moto di un punto mobile di massa variabile evanescente, dove la stabilità del moto è conseguita con l'approssimazione a tratti delle traiettorie del mobile.

Alla teoria delle equazioni integrali Egli volse anche la Sua attenzione. Una ricerca « Sul problema di Abel » del 1928 [78] oltre a contenere la piena giustificazione dei ragionamenti necessari per giungere alla soluzione della corrispondente equazione integrale di seconda specie, rappresenta sopra

tutto un modello cui deve ispirarsi chi abbia da studiare equazioni integrali di seconda specie singolari.

Questa Memoria Egli soleva esporre tra gli argomenti dei corsi di Analisi Superiore dedicati alle Equazioni Integrali lineari, di cui fortunatamente la famiglia conserva il manoscritto inedito [157].

Rappresentano un vero apporto all'Analisi due lavori sulle *Equazioni integrali di Volterra* [82] e sulle *Equazioni funzionali del tipo di Volterra* [83] nei quali il Nostro, costruendo un nuovo metodo esistenziale che cumula i vantaggi del metodo delle approssimazioni successive di Picard–Peano e di quello di Cauchy–Lipschitz arriva a teoremi esistenziali nelle ipotesi più generali possibili. Il metodo di Tonelli, che ha la estrema semplicità di tutte le creazioni tonelliane, è riportato nei trattati sulle Equazioni Differenziali [16] e si è mostrato strumento potente di indagine nelle recenti ricerche sui teoremi esistenziali relativi alle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali.

È pure entrato nei trattati [17] un altro studio del Nostro [138] sulle proprietà hilbertiane di estremo degli autovalori relativi alle equazioni integrali di seconda specie che ricorderemo più avanti a proposito dei Suoi studi su nuove classi di funzionali.

Ho delineato così nei punti più salienti una parte dell'attività scientifica del Nostro, che da sola sarebbe valsa a dargli alta fama, ed entro ora nel campo ove Egli operò da gran signore: nel Calcolo delle Variazioni, percorrendo dapprima la via che lo condusse a scrivere i Suoi « Fondamenti ».

Nel 1911, in una prima Memoria inserita nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, « Sui massimi e minimi assoluti del Calcolo delle Variazioni » [15], il Tonelli, appena ventiseienne, così si rivolgeva al lettore:

« È noto: il Calcolo delle Variazioni, se costituisce una bella speranza per l'avvenire, non è tuttavia, per il momento, troppo brillante nei suoi risultati pratici. A parte che la teoria dei massimi e minimi relativi sia ancora poco soddisfacente, l'attuale Calcolo delle Variazioni ha il grave torto di non occuparsi, o quasi, dei massimi e minimi assoluti. Nè soccorre gran che il fatto che questi ultimi appartengano alla classe dei primi, sia perchè mancano criteri che permettano di distinguere gli uni dagli altri, sia – e questo è il male maggiore – perchè dall'esistenza effettiva di quelli relativi non scende per nulla l'esistenza di quelli assoluti. E poichè nelle condizioni odierne del Calcolo funzionale, il gioco dei massimi e minimi è molto limitato, mentre, per conto, i problemi che hanno dato origine al Calcolo delle Variazioni – e che sono i soli ai quali per ora esso potrebbe applicarsi con sicura utilità – conducono tutti a massimi e minimi assoluti, si comprende facilmente di quale grave danno sia il mancato sviluppo della teoria nei riguardi accennati. La quale mancanza ha costretto appunto gli analisti che, in questi ultimi

(16) Cfr. G. SANSONE, *Equazioni Differenziali nel campo reale*, I, p. 42 (1940).
(17) Loc. cit. in (16) I, p. 278.

tempi, hanno voluto occuparsi dei problemi più celebri di minimo (problema di Dirichlet, di Plateau ecc.), ad abbandonare – come ben dice Lebesgue – le equazioni differenziali che vengono date dagli ordinari procedimenti di Calcolo delle Variazioni, per ragionare direttamente sugli integrali di cui si tratta. Tale è la via che abbiamo dovuto seguire noi pure per giungere a stabilire il teorema di esistenza del massimo e del minimo assoluto, che forma l'oggetto principale di questa Memoria ».

È in questo preambolo un programma impegnativo, che il giovane analista, conscio della sua forza inventiva, poteva lanciare in quei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, assunti allora ad importanza mondiale.

La ricerca specifica del Nostro, con la quale fortunatamente Egli portava la Sua attenzione al Calcolo delle Variazioni, si collega ai classici lavori di Hilbert [18] per la dimostrazione del così detto *principio di minimo di Dirichlet.*

Già nel 1897 Cesare Arzelà [19] si era proposto di superare questo scoglio estendendo i metodi dell'Analisi ordinaria al Calcolo funzionale, e se i suoi sforzi non ebbero successo, pure le sue idee erano feconde e dovevano trionfare; l'Hilbert nel 1900, con i metodi della teoria ordinaria delle funzioni continue stabiliva appunto il principio.

Gli integrali considerati dal Tonelli in questa sua prima ricerca sono quelli in forma parametrica chiamati *regolari* dall'Hilbert, cioè quegli integrali delle funzioni omogenee positive, di grado uno nelle derivate, per le quali il così detto invariante di Weierstrass ha sempre lo stesso segno, ed Egli con la scoperta della loro *semicontinuità* rispetto alla curva sulla quale essi operano perveniva all'esistenza dell'estremo assoluto.

Effettivamente la parola « semicontinuo » non appare esplicitamente che in una seconda Memoria [22] del 1913, nella quale si prescinde dalla circostanza che la funzione integranda abbia un segno determinato o come si dice, con la terminologia del Nostro, dal caso che l'integrale sia *definito.*

Quale il processo logico che aveva portato il Tonelli a considerare la semicontinuità nell'Analisi funzionale ?

Ricordiamo che nell'Analisi ordinaria il concetto di funzione semicontinua fu introdotto dal Baire nel 1905 [20]. La continuità della funzione in un punto è scissa in due parti; in un intorno abbastanza piccolo di questo punto la funzione non supera il valore della funzione nel punto più un numero positivo prefissato, e si ha la semicontinuità superiore; oppure non è inferiore al valore della funzione nel punto meno un numero positivo prefissato, e si ha la semicontinuità inferiore. A questa scissione della conti-

(18) D. Hilbert, a) *Ueber das Dirichlet'sche Prinzip* « Jahresbericht der D. Math. Ver. », *8*, pp. 184 188 (1900); b) *Ueber das Dirichtlet'sche Prinzip.* « Festschrift zur Fejer 50 jähiger Bestehens der Kg. Ges. d. Wiss. zu Göttingen », pp. 1–27 (1901).

(19) C. Arzelà, *Sul principio di Dirichlet,* « Rend. R. Acc. Sc. Bologna », I, pp. 71–84 (1896–97).

(20) R. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues.* Paris, p. 71 (1905).

nuità si accompagna il teorema che le funzioni semicontinue inferiormente (superiormente) si comportano nello studio dei minimi (massimi) proprio come le funzioni continue.

Se tale risultato può considerarsi un'utile precisazione nell'Analisi ordinaria, assurge invece a particolare importanza nell'Analisi Funzionale. La nozione della continuità in senso stretto dei funzionali del Volterra porta, come osserva il Nostro [27], ad escludere tutti quegli integrali che veramente interessano il Calcolo delle Variazioni, in quanto proprio la continuità implica la linearità, rispetto alle derivate, della funzione integranda; nei problemi di estremo ha invece ufficio preminente la semicontinuità che Tonelli, con felice intuizione, pose a base di tutta la Sua trattazione.

Nel 1915 in una terza memoria [35], pubblicata ancora nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, e riassunta in due Note dei Comptes Rendus [30], il Nostro riflettendo sul metodo diretto già usato, come abbiamo prima ricordato dall'Hilbert nel 1900 pel principio di Dirichlet, e dall'Hadamard (1908) [21] in altri casi, ma non suscettibile però di trasporto in campi infiniti, e sulla celebre Memoria di Lebesgue del 1902 « Intégral, Longueur, Aire » [22] nella quale il problema dell'estremo era risolto in un caso particolare, senza però giungere alle proprietà differenziali della curva estremante espresse dall'equazione di Eulero, convinto « que la méthode valable pour les fonctions continues ordinaires peut effectivement sous certaines conditions (qui comprennent comme cas particulier celles de M. Lebesgue) se transporter en entier dans le Calcul fonctionel, et qu'elle peut se compléter de manière à donner directement les propriétés analytiques des solutions » senza supporre il problema risoluto in piccolo, esponeva il Suo metodo nella forma definitiva, per il caso degli integrali in forma ordinaria.

Bandito l'uso dell'assioma della scelta di Zermelo, dal quale Egli si asterrà poi costantemente in tutta la Sua produzione scientifica, e partendo dal fatto che gli integrali sono funzioni semicontinue della curva sulla quale essi operano, dalle successioni estremizzanti ricava l'esistenza e le proprietà analitiche delle curve estremanti.

Nasceva così definitivamente il metodo di Tonelli da cui deriva un teorema di analisi generale che K. Menger chiamerà nel 1935 il « principio di Tonelli » [23].

Appartengono pure al periodo 1911–1915 una Nota del 1911 [16] sulla necessità di riferirsi nel Calcolo delle Variazioni a curve continue rettificabili, sostegno degli integrali, rappresentabili con funzioni assolutamente continue, perchè ove si prescinda da questa condizione il valore dell'integrale può restare indeterminato; tre Note del 1912 [18] sull'espressione dell'in-

(21) J. HADAMARD, *Mémoire sur le problème d'Analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques incastrées*. « Mem Acc. Sc. de l'Inst. de France », *33*, pp. 1–128 (1908).

(22) « Annali di Mat. pura e applicata » (3), *7*, pp. 231–359 (1902).

(23) K. MENGER, *Analysis and metric Geometry*, a) *Ergebnisse eines Math. Kolloquiums*, 8, (1935-36) p. 13; b) *The Rice Inst. Pamphlet*, 27 (pp. 11–40), pp. 23–24 (1940).

tegrale di Weierstrass per integrali di Lebesgue [24] nel caso di integrali estesi ad una curva sostegno continua rettificabile di lunghezza finita; la continuità degli integrali rispetto alle deformazioni continue della curva sostegno dell'integrale che ne lasciano invariata la lunghezza, e il passaggio al limite negli integrali rispetto alle curve sostegno quando esse tendono ad una curva limite, e la lunghezza delle curve sostegno hanno per limite la lunghezza della curva limite: teoremi tutti basilari per il Calcolo delle Variazioni.

I pilastri per edificare una nuova teoria erano gettati, quando nel 1915 avendo l'Italia deciso di partecipare alla prima guerra mondiale per completare la sua unità nazionale non raggiunta nel 1866, il Nostro lasciava la Sua attività di scienziato per compiere il Suo dovere di cittadino. Si arruolava volontario, e nominato ufficiale di artiglieria emergeva tra i colleghi per il senso di disciplina ereditato dal Padre e per la rapidità con cui si era orientato nei problemi della Sua arma. Fu inviato al fronte macedone e vi rimase fino al 1917, con due inverni passati a quota 1050, nel settore di Monastir; poi tornò nella primavera del 1918 sul fronte italiano, nelle Giudicarie, in Val Paone, sull'Adamello. Ottenne due encomi solenni, la croce al merito di guerra e una medaglia di bronzo per la conquista di Mezzolombardo. Fu promosso per meriti speciali Tenente e Capitano, e sul Suo stato di servizio il Comandante d'Armata scrisse di suo pugno: « È un ufficiale di qualità veramente eccezionali, è capace di assolvere qualsiasi incarico con abilità, prontezza, decisione, è stato uno degli interpreti più intelligenti, completi della mia azione di comando. È poi un valoroso soldato, che ha degnamente onorato la Cattedra ».

E alla Sua Cattedra di Parma Egli tornava nel 1919.

Durante il quadriennio della guerra, nelle lunghe soste di quell'immane conflitto, Egli meditava sul metodo da lui creato e si orientava per la redazione dopo la guerra, di un trattato che ne mettesse in luce la potenza costruttiva. Ciò lo portava a coordinare e a semplificare le sue precedenti ricerche. Nel 1920 in una quarta Memoria [44], sempre del Circolo Matematico di Palermo, fondandosi unicamente sull'uso dell'integrale di Lebesgue, sufficiente come ha osservato K. Menger per lo studio degli estremi degli integrali curvilinei lungo curve di lunghezza finita [25]. Egli dava definitivamente le condizioni sufficienti e le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali in tutto il campo o su una curva determinata, siano gli integrali

(24) Anche in una Memoria del 1939 [141] il Nostro diede nuovi casi in cui il così detto integrale di Weierstrass, relativo ad una curva continua, anche non rettificabile, può esprimersi con un integrale di Lebesgue. A proposito dell'integrale di Weierstrass, Tonelli, così scriveva [144, p. 302]: « Nel caso degli spazi euclidei, l'uso dell'integrale di Weierstra s presenta vari e seri inconvenienti, senza offrire in compenso alcun vero vantaggio, ed io dovetti abbandonarlo completamente; ma per gli spazi astratti generali esso è, per ora, il solo strumento che permetta di costruire una teoria soddisfacente per il Calcolo delle Variazioni ».

(25) K. MENGER, *Analysis and Metric Geometry*. « The Rice Institut Pamphlets », *27*, p. 15 (1940).

in forma ordinaria che in forma parametrica. Il significato della condizione di Legendre e la così detta *quarta condizione di Weierstrass* del Calcolo delle Variazioni risultano equivalere alla semicontinuità dell'integrale sulla curva estremante e ne veniva così illuminato il significato funzionale.

In una quinta Memoria del 1921 [46] sono ripresi gli integrali sotto forma parametrica ed è considerato il caso in cui l'invariante di Weierstrass pur non cambiando di segno, possiede punti di zero. Introdotta la terminologia, divenuta ormai definitiva di integrale regolare, quasi regolare, definito, semidefinito, semidefinito positivo o negativo normale, e di semidefinito singolare, Egli assegnava corrispondentemente i casi di esistenza di curve estremanti in una classe completa di curve continue e rettificabili, anche appartenenti a campi illimitati, costruendo in tal modo completamente il primo capitolo del secondo volume dei « Fondamenti ».

Successivamente in due Note [41, 45] di poco precedenti la stesura dei « Fondamenti », che Egli preannunciava nel gennaio 1921, estendeva i teoremi di Weierstrass-Erdmann e di Weierstrass sui punti angolosi delle curve estremanti appartenenti al contorno, e generalizzava i teoremi di Lindberg e di Eugenio Elia Levi sul rafforzamento della disuguaglianza che intercede tra l'estremo dell'integrale e il valore dell'integrale stesso esteso ad una curva di lunghezza maggiore della lunghezza della curva estremante.

I nuovi metodi dovevano consentire una rapida ed esauriente trattazione dei problemi di estremo della Fisica Matematica, pei quali l'esistenza dell'estremo deriva dal così detto *principio di minimo* che regola i fenomeni naturali; ma ove si rifletta che il procedimento matematico realizza soltanto con approssimazione il problema concreto, e che un piccolo scarto tra i dati e la loro rappresentazione può alterare notevolmente le conclusioni, si trova la necessità dell'esame analitico dei singoli problemi.

Nel 1902 E. T. Whittaker [26] nello studio del moto piano di un punto sotto l'azione di una forza conservativa derivante da un potenziale, con l'applicazione del principio di minimo, ossia con l'ammissione implicita dell'esistenza dell'estremo, aveva dedotto l'esistenza di orbite periodiche. Il teorema, nel 1912, fu provato rigorosamente, e indipendentemente l'uno dall'altro, da A. Signorini [27] con i mezzi forniti dall'Analisi classica, e dal Nostro [17] con l'uso delle successioni minimizzanti, anche per campi illimitati, e in condizioni più semplici. Le orbite di Whittaker sono orbite reversibili, nelle quali cioè il moto è possibile nei due versi, e nel 1917 G. D. Birkhoff [28] considerava anche il caso di quelle non reversibili, per le quali

(26) E. T. Whittaker, *One Periodic Orbits*. « Monthly Notices of the R. Astr. Soc. London », *62*, pp. 186–193 (1902).

(27) A. Signorini, *Esistenza di un'estremale chiusa dentro un contorno di Whittaker*. « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *33*, pp. 187–193 (1912).

(28) G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems with two degrees of freedom*. « Trans. of the Amer. Math. Soc. », *18*, pp. 199–300 (1917).

stabiliva il criterio dell'esistenza di un minimo relativo, ritrovato poi dal Nostro [51] come estremo assoluto in una classe di curve opportunamente scelte.

Derivava da qui un nuovo principio generale: un'estremale che non dà il minimo assoluto dell'integrale nella classe di curve cui l'estremale appartiene, può diventare una minimante assoluta in un'opportuna classe la quale permette di stabilire le proprietà analitiche dell'estremale stessa.

Questo principio che fu nel 1936 applicato da W. Damköhler [29] per dare un teorema generale di esistenza di orbite periodiche, comprendente i teoremi già noti, fu esteso dal Nostro [118] a tutti gli integrali quasi regolari, normali o anche seminormali.

Rientra pure nelle prime brillanti applicazioni del metodo diretto la dimostrazione dell'esistenza di soluzioni in certi problemi di Calcolo delle Variazioni già studiati da L. Lichtenstein [30] ritrovate dal Nostro in condizioni assai più generali di quel che non fosse consentito al Lichtenstein con la teoria degli sviluppi in serie.

Un altro gruppo pertinente le applicazioni riguarda i problemi isoperimetrici considerati dapprima nel classico aspetto del problema isoperimetrico propriamente detto [20], e nell'altro della catenaria pesante di data lunghezza [23], e poi più in generale [31, 47, 48]. Gli integrali presentano il caso regolare o semiregolare, e a fondamento dell'esistenza dell'estremo è posta la semicontinuità. In queste ricerche l'A. oltre a correggere e a precisare laddove è necessario i risultati di altri, costruisce tutta una teoria dei problemi isoperimetrici, sia per riguardo all'esistenza che alle proprietà delle curve estremanti di interesse indiscutibile.

Una Memoria del 1915 [32], sul minimo dell'area di una superficie sferica rispetto alle superficie racchiudenti ugual volume si stacca da tutte le precedenti sui problemi isoperimetrici. Il procedimento è puramente geometrico, ed ha, come tutte le costruzioni tonelliane, un carattere proprio. Dalle superfici poliedriche, per le quali il teorema è stabilito col così detto metodo di arrotondamento di Schwarz si passa a quelle di rotazione, e successivamente con l'introduzione degli assi di simmetrizzazione al modo di Steiner e di Study, e con l'ausilio della teoria delle funzioni di variabile reale, alle più generali superfici quadrabili.

Un'altra ricerca relativa alle applicazioni [29] è quella sull'equilibrio di una massa liquida soggetta alle sole forze molecolari: si tratta di un problema già risolto sperimentalmente da Plateau, e studiato teoricamente dallo stesso Plateau, da Mathieu, Poincaré, Almansi [31]. Il Nostro, con i metodi classici del Calcolo delle Variazioni, lo risolve definitivamente, sia

(29) W. Damköhler. *Periodischen Extremalen vom Minimumtyp in Ringbereiche.* « Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa » (2), *5*, pp. 127–140 (1936).

(30) L. Lichtenstein, *Ueber einige Existenzprobleme der Variation-rechnung. Methode der unendlich vielen Variablen.* « Journ. für die reine und angw. Math. », *145*, pp. 24–85 (1915).

(31) E. Almansi, *Sopra una delle esperienze di Plateau.* « Ann. di Mat. pura e Appl. », (3), *12*, pp. 1–17 (1906).

dal punto di vista fisico che da quello matematico. In una Nota a parte [28], Egli stabiliva rigorosamente un'importante disuguaglianza, nota ora come lemma di Almansi, tra l'integrale del quadrato di una funzione che agli estremi dell'intervallo di integrazione assume valori uguali e l'integrale del quadrato della sua derivata, e ne faceva un'estensione, non ulteriormente migliorabile, al caso in cui la funzione assuma agli estremi valori qualunque.

E un'altra recente ricerca appartenente al campo delle applicazioni io voglio qui ricordare, quella sul problema di Lord Rayleigh [92] della determinazione fra le membrane omogenee, ugualmente tese e della medesima superficie, della membrana che dà il suono fondamentale più basso. Il Nostro, col procedimento di arrotondamento di Schwarz già prima ricordato, di cui ora rileva il carattere generale, trasforma il problema in uno isoperimetrico, e i suoi metodi gli consentono di dedurre facilmente che il minimo è fornito dalla membrana circolare.

Dalla cattedra di Parma, il Tonelli nel 1922 si trasferiva a quella di Analisi Superiore a Bologna, e quivi uscivano nel 1922 e 1923 i due volumi dei « Fondamenti », opera grandiosa che raccoglieva e coordinava quanto Egli aveva pubblicato nell'ultimo decennio. È sorprendente che Egli avesse potuto costruire in un biennio un'opera così vasta di contenuto sui problemi di Calcolo delle Variazioni relativi ai massimi e minimi liberi, e a quelli isoperimetrici, per gli integrali dipendenti soltanto dalla posizione dell'elemento generico della curva e della sua direzione, e ad un suo amico, lento scrittore di volumi, che una volta gli chiedeva ammirato come mai in sì breve tempo avesse potuto redigere un'opera di tanta mole rispondeva: lavoravo con metodo; in un certo periodo determinavo persino il minimo delle pagine che avrei dovuto scrivere giornalmente.

Quest'opera lungamente pensata nelle oscure notti della trincea, come Egli scrisse sulla copia che nel 1926 offrì alla allora Sua fidanzata Mària Rondelli, e dal 1927 sua diletta consorte, presenta una trattazione a carattere assolutamente unitario: nella trattazione, tutta svolta indipendentemente da quella delle equazioni differenziali, domina sovrana la semicontinuità dei Suoi funzionali.

Ogni concetto è ben precisato; ogni dimostrazione tende col principio dell'economia dello sforzo, a portare rapidamente alle conclusioni, e quella parte del secondo volume dedicata alle applicazioni, assicura il lettore che Egli ha in mano uno strumento perfetto, che potrà usare anche in altri problemi di estremo dell'analisi funzionale.

L'eleganza della trattazione spicca, come in tutti gli scritti tonelliani; Egli che in tante recensioni aveva di volta in volta segnalato pregi e lacune di opere dovute ai più noti matematici contemporanei, sceglieva per i suoi trattati quella via che era più strettamente confacente alla natura dei Suoi problemi.

E nella scuola di Tonelli dopo, per oltre un ventennio, i Suoi « Fondamenti » furono letti e meditati. Il Tonelli che nel 1928 era passato alla cattedra

di analisi infinitesimale di Bologna, nel 1930 si trasferiva alla stessa cattedra di Pisa. Vi ebbe anche la carica di direttore degli studi scientifici di quella celebre Scuola Normale, carica che era stata tenuta successivamente da Enrico Betti, Ulisse Dini, Luigi Bianchi; ed Egli fu degno di quei luminari.

A Pisa, dove per quasi cinquanta anni i « Fondamenti » del Dini avevano illuminato due generazioni, da Volterra all'Arzelà e al Pincherle, un'altra generazione ebbe nei « Fondamenti » di Tonelli quasi un nuovo Vangelo matematico che doveva aprire la mente ai più vasti orizzonti.

E dell'importanza dei « Fondamenti » voglio qui far parlare Volterra e Pérés, J. Hadamard, C. Carathéodory, K. Menger.

Scrivono V. Volterra e J. Perés nella « Theorie générale des fonctionelles » (I, Parigi 1936, p. 110):

« Ce fut M. Tonelli qui, usant systématiquement de l'analyse fonctionelle, mit à la base directe des problèmes de maximum et minimum le concept de *semi-continuité* et est ainsi le véritable fondateur des méthodes nouvelles ».

J. Hadamard in una comunicazione all'Accademia delle Scienze di Parigi dice: « Le service rendu à la science par la découverte de la sémi-continuité, que l'on doit a M. Tonelli, est capital » [32].

C. Carathéodory, il mondiale codificatore della moderna Analisi delle funzioni di variabile reale, nel suo volume « Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster ordnung » (Leipzig, 1935, p. 398) così si esprime: « Ausserordentlich exakt und originell ist die Behandlung der ebenen Variationsrechnung bei Tonelli »; e K. Menger, il matematico che nell'ultimo decennio ha ripreso i problemi del Calcolo delle Variazioni, nello spirito dell'Analisi generale, così scrive nel 1940 [33] « Hahn seems to have been the first to introduce Lebesgue integrals into the calculus of Variations. Tonelli based entire book on Lebesgue integration. The fondamental concept underlying this wich marked one of the greatest steps forwards in its field . . . » per concludere che la teoria di Tonelli deve ritenersi completa quando si assuma come funzionale di confronto la lunghezza.

Nel 1940, in una relazione [144] che doveva essere letta al nono convegno Volta del 1939 Egli così caratterizzava la Sua opera: « Nella costruzione della nuova teoria del Calcolo delle Variazioni, inquadrata tra i capitoli

(32) M. FRÉCHET nel 1928 nel suo volume *Les espaces abstraits* (Paris, p. 4 (1928)) riferendosi alla ricostruzione del Calcolo delle Variazioni di Tonelli fondata sui principî dell'analisi funzionale, dice: « C'est, d'ailleurs, le point de vue que vient d'adopter récemment M. Tonelli dans son intéressant ouvrage *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* », e nell'articolo dell'*Enciclopédie Française* dedicato all'Analisi funzionale (1 84 4; 2ª colonna): « C'est dans l'ordre des idées précédent que L. Tonelli a réussi à étendre considérablement le champ de la validité des théoremes d'existence fournis par la méthode de Weierstrass »; e la scuola matematica di Basilea, nel primo anniversario della morte, lo rievoca ponendo il Suo nome accanto a quelli degli immortali svizzeri Jacopo e Giovanni Bernoulli, e Leonardo Eulero.

(33) K. MENGER, *Analysis and Metric Geometry*. « The Rice Institute Pamphlets », 27 pp. 1-40), p. 9.

dell'Analisi funzionale, io ho cercato di utilizzare di questa analisi il meno possibile le formule, facendo invece giocare largamente i concetti. Soltanto per questa via secondo me, si possono ottenere dei risultati importanti conservando ad essi la maggiore semplicità possibile, semplicità che è indispensabile se si vuole che tali risultati riescano effettivamente utili ».

In alcune relazioni periodiche da Lui lette in congressi nazionali e internazionali, o inserite nelle principali riviste scientifiche dal 1920 al 1940 [43, 55, 57, 81, 86, 89, 103, 131, 144] sono indicate e illustrate le ragioni per le quali per il Calcolo delle Variazioni era stato foggiato un nuovo potente metodo di ricerca – *il metodo diretto* –, i risultati via via raggiunti, i nuovi orizzonti che attraverso l'Analisi funzionale si aprono al Calcolo delle Variazioni, e i motivi essenziali del sorgere, dell'affermarsi e del continuo progredire della Scuola Italiana di Calcolo delle Variazioni, ossia della scuola di Tonelli.

Quanto andiamo a riferire sulle ricerche di Tonelli dal 1925 alla Sua morte, e dai cenni che daremo sugli studi dei Suoi scolari e di coloro che in Italia e all'estero lavorarono nel Suo indirizzo, e la cui produzione è in massima parte raccolta nella seconda serie degli Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa che sotto la Sua direzione, in pochi anni, ebbero fama internazionale, testimoniano l'impulso che Egli diede al Calcolo delle Variazioni considerato in tutti i suoi aspetti funzionali.

Egli ebbe la collaborazione diretta dei Suoi scolari Cinquini, Manià, Del Chiaro, Cesari, Faedo, Mambriani, Baiada, Giuliano, e subirono il Suo influsso all'inizio della loro carriera scientifica, l'Amerio, il Chiellini e il Birindelli. Contribuirono alla costruzione del nuovo edificio in Italia Caccioppoli, Scorza Dragoni, Miranda, Cimmino, in Austria Hahn, in Germania Damköhler, gli ungheresi Haar e Râdo, gli americani Graves, McShane, Douglas, Morrey, i russi Lavrentieff, Bogoliouboff, Razmadzé, e il giapponese Nagumo.

Nel 1925 il compianto matematico Hans Hahn [34] per gli integrali curvilinei in forma parametrica, semidefiniti positivi quasi regolari, seminormali, aveva dato un teorema generale per l'esistenza del minimo, che abbracciava tutti i teoremi già dati dal Tonelli nei Suoi « Fondamenti ».

Nel 1932 C. Caratheodory in una Memoria inserita nella prima annata della nuova serie degli Annali di Pisa [35], fondandosi sulla considerazione dei valori che l'integrale assume su tutte le curve ammissibili chiuse che passano per due punti qualsiasi del campo, dava un suo teorema generale di minimo. Subito dopo il Nostro generalizzava il teorema di Hahn [99] sopprimendo la condizione che l'integrale dovesse essere semidefinito, ed estendendo il teorema di Caratheodory ne mostrava l'equivalenza con quello generalizzato di Hahn.

In tre Memorie sugli Annali di Pisa [107, 108, 111], in una Memoria della Raccolta Matematica di Mosca [77], in due Note di questa Acca-

(34) H. HAHN, *Ueber ein Existenztheorem der Variationsrechnung*. « Sitz. der Ak. der Wiss. », Wien, Math.-Nath. Bd., Bd. 134, pp. 437-447 (1925).

(35) C. CARATHEODORY, *Ueber die Existenz der absoluten Minima bei regulären Variationsproblemen auf der Kugel*. « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa » (2), 1, pp. 79-88 (1932).

demia [101, 112] Egli riprendeva tutta la teoria dell'estremo degli integrali in forma ordinaria, dandone, come aveva già fatto per quelli in forma parametrica, un assetto definitivo.

Sono dati casi generali in cui non si verifica quel che il Nostro chiama *il fenomeno di Lavrentieff* [77] (36) secondo il quale l'estremo dell'integrale nella classe di tutte le curve assolutamente continue che congiungono due punti, non è sempre uguale all'estremo dello stesso integrale calcolato su tutte le curve lipschitziane congiungenti gli stessi punti, ma può anche essere minore, fenomeno che mostra come il dominio naturale in cui si debbono trattare i problemi di Calcolo delle variazioni sia quello delle curve assolutamente continue, che il Tonelli, con felice divinazione, aveva posto come oggetto delle sue ricerche; sono estese le ricerche di Nagumo, McShane, Manià [101, 108] (37) conseguendo per gli integrali quasi regolari, non normali, risultati che racchiudono tutti i teoremi noti, e che non derivano dai classici teoremi dei minimi relativi; è introdotto per la prima volta il concetto di *pseudo-estremaloide* [107, 112] col quale, eliminando la considerazione della variazione prima dell'integrale, si arriva a risultati precisi e di vasta applicazione; sono poi ridotte, con procedimenti originali, le condizioni già assegnate da Carathéodory [111] (38) per l'esistenza dell'estremale congiungente due punti sufficientemente vicini, e dell'estremale per un punto con direzione assegnata.

E ancora un risultato relativo agli integrali semplici voglio ricordare. E. J. MacShane (39) aveva osservato, con un esempio, che per la continuità di un integrale curvilineo ordinario, esteso ad una curva dello spazio a tre dimensioni, la linearità rispetto alle derivate, anche nelle ipotesi più generali di derivabilità della funzione integranda, non è sufficiente a garantire la continuità dell'integrale stesso. Il Nostro, per tale continuità scopriva una condizione necessaria, di tipo analogo alla corrispondente condizione per gli integrali estesi ad una curva piana, sotto forma parametrica, e lasciava aperta la questione se con essa si era pure in possesso delle condizioni sufficienti [120] (40).

(36) Cfr. M. LAVRENTIEFF, *Sur quelques problèmes du calcul des Variations*. « Ann. di Mat. pura e applicata » (4), *4*, pp. 7–28 (1927).

(37) *a*) M. NAGUMO, *Ueber gleichmässige Summierbarkeit und ihre Anwendung auf ein Variationsproblem*. « Jap. Journ. of Math. », *6*, pp. 173–182 (1927); *b*) E. J. MCSHANE, *Existence theorems for ordinary problems of the Calculus of Variations*. « Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa » (2), *3*, pp. 181–211, 287–315 (1934); *c*) B. MANIÀ, *Un teorema di Calcolo delle Variazioni*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei » (6), *18*, pp. 478-483 (1933).

(38) C. CARATHEODORY, *Bemerkungen über die Eulerschen Differentialgleichungen der Variationsrechnung*. « Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen », Math. Phys. Klasse, pp. 40–43 (1931).

(39) E. J. MCSHANE, *Existence theorems for ordinary problems of the calculus of variations*. P. 1ª, « Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa » (2), *3* (pp. 183–211), p. 211 (1934).

(40) Alla questione del Nostro ha risposto recentemente in senso affermativo L. GIULIANO nella sua Nota: *Sulla continuità degli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni*. « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *4*, pp. 39–45, pp. 183–189 (1948).

B. Manià, uno dei più geniali scolari di Tonelli, nell'intento di risolvere alcuni classici problemi sulla curva di massima velocità finale, quello della brachistocrona in un mezzo resistente e quello della navigazione di Zermelo, aveva stabilito con procedimenti laboriosi le proprietà delle curve estremanti di alcuni problemi di Mayer e di Lagrange, indipendentemente dalla regola dei moltiplicatori di Eulero–Lagrange (41); e il Nostro in due Note [122, 123] mostrava come attenendosi ai metodi da Lui usati nei Suoi « Fondamenti » possono ottenersi rapidamente e semplicemente gli stessi risultati liberandoli da molte restrizioni. Successivamente [125, 132] Egli considerava la semicontinuità dei corrispondenti funzionali e ne costruiva una teoria generale parallela a quella da Lui data per gli integrali semplici; ciò che gli consentiva di ritrovare in particolare risultati già ottenuti in condizioni restrittive dallo stesso Manià e da L. M. Graves (42).

Per gli integrali semplici restava da considerare il caso in cui la funzione integranda dipende dagli elementi differenziali di ordine qualsiasi della curva di integrazione. Il problema, con i metodi del Nostro, attraverso un esame che in alcuni punti presentava notevoli difficoltà, fu risolto dal Suo discepolo Silvio Cinquini, che in una serie di lavori dava le condizioni necessarie e le condizioni sufficienti per la semicontinuità, e teoremi di esistenza dell'estremo (43).

È conviene pure richiamare alcune Sue ricerche su nuove classi di funzionali.

È noto che l'esistenza di autovalori per i sistemi di equazioni differenziali autoaggiunti è ricondotta all'esistenza di autovalori delle equazioni integrali lineari di seconda specie di Fredholm a nucleo simmetrico, i quali godono le classiche proprietà hilbertiane di minimo. Per rendere la teoria dei sistemi differenziali autoaggiunti indipendente dalla teoria delle equazioni integrali, occorreva per una nuova classe di funzionali già considerati

(41) B. Manià, *Proprietà delle estremanti nei problemi di* Mayer. « Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa » (22), *4*, pp. 107–131 (1935); *b*) *Proprietà delle estremanti nei problemi di Lagrange*. Ibidem, *5*, pp. 89–126 (1936).

(42) B. Manià, *Sui problemi di Lagrange e di Mayer*. « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *58*, pp. 285–310 (1936); L. M. Graves, *The existence of an extremum in problems of Mayer*. « Trans. of the Am. Math. Soc. », *39*, pp. 456–471 (1936).

(43) Al ch.mo prof. Cinquini, ora all'Università di Pavia si deve una commossa rievocazione di Tonelli letta all'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere l'11 luglio 1946 « Rend. Ist. Lombardo », *79* (1946). Un'altra solenne commemorazione degna di Lui, fu tenuta dal ch.mo prof. Francesco Cecioni nell'Università di Pisa il 12 marzo 1947, nel primo anniversario della Sua morte.

Ricordarono pure il Maestro, con accenti di calda commozione e di viva gratitudine L. Cesari nel « Boll. dell'Un. Mat. Italiana » (3), *1*, pp. 64–67, S. Faedo nei « Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni », di Roma (5), *6*, pp. 217–225 (1947), L. Giuliano nel Giornale « l'Ussero » (Pisa, 7 aprile 1946). Questi scritti, oltre le ricordate relazioni di Tonelli sulla attività scientifica Sua e dei Suoi scolari, mi furono guida utilissima nella preparazione di questa commemorazione.

nel 1913 da Guido Fubini [44] stabilire i teoremi di esistenza dell'estremo; il Nostro li ricavava col Suo metodo diretto [138] e, come abbiamo ricordato in precedenza, essi trovavano il dovuto posto in un recente trattato sulle Equazioni Differenziali [45].

Con gli stessi metodi recentemente S. Faedo, discepolo di Tonelli, riprendeva in esame questi nuovi funzionali, i quali godono la singolare proprietà che la semicontinuità su una data curva non implica quella su un arco parziale di essa [46].

Nel 1941 Egli volgeva la Sua attenzione su un difficile problema di minimo che si era presentato in una questione di alta tecnica sottoposta all'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo di M. Picone per un integrale che non rientrava in nessuno dei tipi considerati nel Calcolo delle Variazioni [149]; il Nostro risolveva completamente il problema conseguendo un teorema generale di esistenza dell'estremo assoluto. Sulle curve integrali doveva essere verificata una certa disuguaglianza, e la funzione integranda, dipendente unicamente dalla funzione e dalla sua derivata, su un segmento parallelo all'asse delle ascisse, diventava singolare.

Il Nostro, che aveva risolto il problema passando dalla forma ordinaria alla parametrica, in una Memoria inedita [156], di cui un mese prima della morte aveva presentato un riassunto a questa Accademia [155], evitando il suddetto passaggio, conseguiva un teorema generale di estremo anche per le curve integrali uscenti da un punto del segmento singolare.

Due punti ancora restano da considerare dell'attività scientifica di Tonelli: le Sue ricerche sulla quadratura delle superficie e quelle sulla semicontinuità degli integrali doppi.

Come è noto il problema della quadratura delle superficie presenta serie difficoltà e si deve allo Schwarz [47] una famosa osservazione che pose la definizione dell'area di una superficie al riparo di ogni obiezione nel caso che essa ammetta piano tangente variabile con continuità.

Un'altra definizione di area rigorosamente matematica fu data da G. Peano nel 1890 [48], poi la questione nel 1902 fu ripresa da H. Lebesgue che nella sua celebre tesi [49] definì l'area nel modo più generale e aderente

(44) G. Fubini, *Alcuni problemi di Calcolo delle Variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali.* « Ann. di Mat. pura e applicata », (3), *20*, pp. 217-244 (1913).

(45) Cfr. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale.* I. (Bologna, 1941), pp. 278-286.

(46) S. Faedo, *Condizioni necessarie per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionale.* « Ann. di Mat. pura e applicata », (4), *23*, pp. 69-121 (1944).

(47) H. A. Schwarz, *Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe, lettre a Ch. Hermite* (*1881-82*). « Ges. Math. Abh. », II (Berlin, 1890), pp. 309-311.

(48) G. Peano, *Sulla definizione dell'area di una superficie.* « Rend. Acc. dei Lincei », (4), 61, pp. 54-57 (1890).

(49) H. Lebesgue, *Intégrale, Longueur, Aire.* « Annali Mat. pura e Applicata » (3), 7, (pp. 231-359), p. 298 (1902).

alla realtà delle cose: l'area di una superficie è il minimo limite delle aree delle superficie poliedriche tendenti uniformemente alla superficie considerata, ma non necessariamente inscritte in essa (50).

Tra le curve rettificabili e le superficie quadrabili nel senso di Lebesgue vi è però una differenza sostanziale; le prime ammettono quasi ovunque retta tangente, le seconde, come hanno successivamente provato Stepanoff, Caccioppoli, Saks, possono essere sprovviste di piano tangente in un insieme di misura superficiale nulla, o di misura positiva, o dappertutto.

Tonelli in tre Note del 1926 [66] riassunte poi in una Nota dei Comptes Rendus di Parigi [67] introdusse le *funzioni di due variabili a variazione limitata* in senso diverso da quello di Hardy e Vitali, e trovò le condizioni necessarie e sufficienti di quadrabilità nel senso di Lebesgue di una superficie definita in un quadrato in forma esplicita; provò poi che l'integrale classico, che G. Lampariello, scolaro di Tonelli, aveva trovato finito, è minore o uguale dell'area della superficie, e introducendo ancora il concetto di *funzione assolutamente continua di due variabili* in senso diverso da quello di Vitali, Ch. J. de la Vallée Poussin, Lebesgue, e vincendo, come Egli diceva talvolta, con consapevole soddisfazione, notevoli difficoltà, dava la condizione necessaria e sufficiente perchè l'integrale classico rappresenti appunto l'area della superficie.

A proposito di queste ricerche, estese poi dal Cinquini ad aree definite in forma esplicita in un campo limitato qualsiasi, S. Saks così scriveva: « C'est à M. L. Tonelli que l'on doit les plus beaux et les plus complets résultats concernant ces surfaces » (51).

Si collegano alla quadratura delle superficie due Note [68, 73] nelle quali Egli prova che le aree delle superficie corrispondenti ai polinoni approssimativi di Stieltjes di una superficie continua quadrabile, sia o no rappresentata da una funzione assolutamente continua, hanno per limite l'area della superficie stessa.

E all'analisi delle funzioni di due variabili a variazione limitata, funzioni riprese in mirabile sintesi geometrico–analitica in una Sua conferenza al Seminario Matematico di Milano [136] e in un suo scritto « Su alcuni concetti dell'Analisi moderna » [151] si collega l'osservazione [80] che le funzioni di due variabili a variazione limitata secondo Nalli e Andreoli (52) lo sono nel Suo senso e non inversamente; e la dimostrazione [88] che il passaggio

(50) I postulati più opportuni sui quali può fondarsi il calcolo dell'area di una superficie curva che soddisfi a convenienti condizioni di regolarità sono stati dati da F. Severi, in *Riflessioni sull'area di una superficie curva* e *Ancora sull'area di una superficie curva*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », (6) 5, pp. 471–475, 475–479 (1927).

Cfr. anche G. Scorza Dragoni, *Sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie*. « Rend. Sem. Mat. di Padova », *15*, pp. 1–17 (1946).

(51) S. Saks, *Théorie de l'intégrale*. Warszawa, p. 100 (1933).

(52) P. Nalli e G. Andreoli, *Sull'area di una superficie curva. Sugli integrali multipli di Stieltjes e sugli integrali doppi delle funzioni di due variabili complesse*. « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *52*, pp. 36–43 (1938).

da coordinate cartesiane a coordinate polari conserva l'assoluta continuità rispetto alle due nuove variabili.

L. Cesari [53] considerando le superficie definite da funzioni quasi continue, le quali, quando si trascurino i loro valori in un insieme di misura superficiale nulla, risultano a variazione limitata, o come disse successivamente Tonelli [119] le *funzioni di due variabili a variazione generalmente limitata*, aveva provato l'esistenza della loro area generalizzata finita, e perciò indipendente dalla direzione degli assi; il Nostro [119] mostrava come i Suoi metodi per le superficie continue a variazione limitata, potevano applicarsi anche al caso « assai difficile » trattato dal Cesari.

La quadrabilità delle superficie era il passo preliminare che doveva compiersi per lo studio dei problemi di estremo per gli integrali doppi; Egli attaccava la questione nella Sua famosa Memoria degli Acta mathematica del 1929 [85] da Lui riassunta al Congresso internazionale dei matematici di Bologna del 1928 [90]. Il Nostro, che aveva meditato sui risultati particolari di H. Lebesgue E. Goursat, T. Rádo, Z. de Geöcze, A. Haar, stabiliva per primo la semicontinuità degli integrali doppi ordinari, nell'ipotesi che siano quasi regolari.

Successivamente nel 1938 [105] e nel 1939 [140], col potente aiuto di alcuni criteri di uguale continuità per gli insiemi di funzioni continue in due variabili, Egli trovava numerosi e capitali teoremi di esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali doppi quasi regolari: i risultati da Lui conseguiti segnavano un punto fondamentale di arrivo nella nuova teoria degli integrali doppi in forma ordinaria.

A queste ricerche del Maestro si collegano gli studi di S. Cinquini che diede le condizioni sufficienti per la semicontinuità su una data superficie [54] e con E. J. McShane, R. Caccioppoli, G. Scorza-Dragoni [55] anche le condizioni necessarie per la semicontinuità in tutto il campo e su una superficie, cosicchè l'argomento può considerarsi discusso completamente.

Altri problemi sugli integrali doppi, strettamente legati ai ricordati risultati tonelliani, furono considerati da B. Manià e L. Amerio [56], mentre

(53) L. Cesari, *Sulle funzioni a variazione limitata.* « Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa », (2), *5*, pp. 299-313 (1936).

(54) S. Cinquini, *Condizioni sufficienti per la semicontinuità nel Calcolo delle Variazioni.* « Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa » (2), *2*, pp. 41-58 (1933).

(55) *a*) E. J. McShane, *On the necessary conditions of Weierstrass in the multiple problem of the calculus of variations.* « Ann. of. Math. » (2), *32*, pp. 578-590 (1931); *b*) S. Cinquini, i) *Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni.* « Ann. Mat. pura e applicata » (4), *10*, pp. 233-254 (1932); ii) *Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni su una data superficie.* « Mem. Acc. d'Italia », *4*, pp. 271-337 (1933); *c*) R. Caccioppoli - G. Scorza Dragoni, *Necessità della condizione di Weierstrasse per la semicontinuità di un integrale doppio sopra una data superficie.* « Mem. Acc. d'Italia », *9*, pp. 251-268 (1938).

(56) B. Manià, *Sopra una classe particolare di integrali doppi del Calcolo delle Variazioni.* « Ann. Mat. pura e applicata » (4), *13*, pp. 91-104 (1934-35); L. Amerio, *Studi sugli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni.* « Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa », (2), *10*, pp. 57-80 (1941).

una estensione agli integrali doppi dipendenti da elementi differenziali di ordine superiore fu data dal Cinquini [57].

Dalle ricerche generali il Nostro passò alle applicazioni. Alcune Sue riflessioni sui lavori di M. Garnier, J. Douglas, T. Rado, E. J. McShane [58] sul problema di Plateau lo portarono alla brillante conclusione « che il problema di Plateau (superficie a curvatura media nulla) può impostarsi come un problema di minimo per un comune integrale doppio di forma ordinaria (cioè non parametrica) che si risolve rapidamente con l'applicazione immediata dei procedimenti diretti del Calcolo delle Variazioni » [124].

Gli integrali che per risolvere tale questione Egli prese in esame sono quelli che Egli stesso chiama del *problema di Dirichlet per tre funzioni*, cioè dell'integrale della somma dei quadrati delle derivate parziali prime di tre funzioni di due variabili esteso ad un'area piana racchiusa da una curva di Jordan chiusa e semplice, e la soluzione del problema gli offrì anche una soluzione diretta e semplice del problema della rappresentazione conforme di tale area in un disco circolare.

Nella Sua dimostrazione Egli si valeva di un criterio di ugual continuità per una successione di curve chiuse, spaziali, ma successivamente [129] Egli elaborava un nuovo criterio di ugual continuità che serve a ridurre il problema di Plateau per una curva semplice e chiusa dello spazio, allo stesso problema per un contorno formato da una poligonale semplice e chiusa.

Nel 1937 Egli considerava il problema della minima area [128] ossia quello dell'esistenza della superficie limitata da una curva e avente la minima area e lo risolveva rapidamente, indipendentemente dal teorema di Schwarz della rappresentazione conforme in senso generalizzato delle superficie poliedrali in un disco circolare.

Restava da trattare il problema della quadratura delle superficie sotto forma parametrica, questione assai ardua, che richiede profonde indagini di natura topologica, e la determinazione delle condizioni necessarie e delle condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica. Al Suo scolaro L. Cesari toccava l'onore di rispondere definitivamente alla prima questione alla quale avevano portato significativi contributi Rado [59], e Caccioppoli [60] e altri autori; la seconda

(57) S. CINQUINI, *L'estremo assoluto degli integrali doppi dipendenti dalle derivate di ordine superiore*. « Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa » (2), *10*, pp. 215–248 (1941).

(58) J. DOUGLAS, *Solution of the problem of Plateau*. « Trans. of the Am. Math. Soc. », *33*, pp. 263–291 (1931); T. RADO, *On the problem of Plateau*. « Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete », *2* (Berlin, 1933), pp. 86–193; E. J. MCSHANE, *Parametrizations of Saddle surfaces, with applications to the problem of Plateau*. « Trans. of the Am. Math. Soc. », *35*, p. 716–733 (1933).

(59) T. RADO, *Sur l'aire des surfaces courbes*. « Acta Litt. Sc. Szeged », *3*, pp. 131–169 (1927).

(60) R. CACCIOPPOLI, *Trasformazioni piane, superficie quadrabili, integrali di superficie*. « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *54*, pp. 217–262 (1930).

questione è stata risolta definitivamente dal Rado (1942) [61] e indipendentemente dallo stesso Cesari [62] in alcuni lavori da lui pubblicati in litografia nel 1946.

Negli ultimi anni della Sua vita ai discepoli e a qualche collega Tonelli diceva del Suo proposito di aggiungere ai « Fondamenti » nuovi capitoli dedicati agli integrali multipli e altri agli integrali delle applicazioni; un anno prima della morte, quasi a indicare un piano di lavoro, così postillava il manoscritto della Sua ultima memoria [156] « dopo un periodo dedicato ai miei doveri verso la Patria, riprendo ora la mia attività scientifica, con la certezza che l'Italia, superando con animo forte questi tristissimi anni, manterrà nelle scienze quel posto onorevole che seppe conquistarsi »: possano gli scolari, ispirandosi al Maestro, continuarne l'opera nel piano da Lui tracciato!

Ho rievocato l'opera matematica di Tonelli, raccolta in più di centocinquanta pubblicazioni, dense di pensiero e ravvivate ad ogni passo da consapevole gusto estetico: nella matematica Egli estrinsecava la Sua personalità « . . . la matematica essendo tra tutte le scienze, oltre che la più pura e la più ideale, anche la più sinceramente artistica, perchè in essa il sentimento artistico domina e guida il ricercatore per la scoperta di verità eterne, e per comporle in un tutto armonioso »; così scriveva Egli stesso nel chiudere una relazione inedita sul « Contributo dello studio pisano al progresso delle scienze matematiche » preparata per il sesto centenario dell'Università di Pisa, che ricorreva nell'autunno del 1943.

Egli fu universalmente apprezzato, e nei Congressi internazionali ebbe successi memorabili; da Alberto Einstein pochi mesi prima della Sua scomparsa era stato invitato in America per collaborare alle ricerche di fisica atomica.

Era membro della Pontificia Accademia delle Scienze, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Accademico Benedettino della Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente della Accademia delle Scienze di Torino, dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, membro onorario della Società Matematica di Mosca, e della «Calcutta Mathematical Society », membro del Consiglio direttivo del Circolo Matematico di Palermo, del Comitato di redazione degli Annali di Matematica pura e applicata, della Commissione scientifica della Unione Matematica Italiana, del Comitato di redazione della Compositio Mathematica di Amsterdam, membro del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Direttore della seconda serie degli Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(61) T. RÀDO, *On the semi-continuity of double integrals in parametric form*. « Trans. of the Am. Math. Soc. », pp. 336-361 (1942).

(62) Cfr. anche per la bibliografia: L. CESARI, *a*) *La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica*. (Bologna, 1946), pp. 1-59; *b*) *Condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica*. (Bologna, 1946), pp. 1-29; *c*) *Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica*. (Bologna, 1946), pp. 1-25.

I Suoi meriti scientifici Gli valsero nel 1923 la medaglia d'oro dei XL, nel 1927 il premio reale della matematica, nel 1937 il premio internazionale Bressa, e nel 1944 il grande premio dell'Accademia d'Italia.

Fu giovanissimo, nel 1922, nominato Socio corrispondente di questa storica Accademia, ma come è stato ricordato in un recente annuario, Egli non ne divenne Socio nazionale per ragioni politiche; per unanime consenso degli Accademici viene oggi commemorato come Socio nazionale.

Egli aveva firmato nel 1926 la famosa protesta Croce, e il regime fascista lo metteva per rappresaglia fuori delle commissioni giudicatrici dei concorsi, ciò che lo contristava fortemente mancandogli la possibilità, data a molti altri Suoi colleghi, di sostenere direttamente gli scolari nei momenti in cui si decideva del loro avvenire accademico, di seguire cioè quegli scolari ai quali, come Egli scriveva ricordando Basilio Manià, si vuol bene come ad un figlio.

Nella politica, da studente, Egli aveva esordito nelle file sindacaliste; poi, pur non essendo inscritto a partiti, fu vicino alle correnti che hanno per vessillo la giustizia sociale. Soffrì per la distruzione delle pubbliche libertà, e subito dopo il 25 luglio 1943, ad un amico scriveva: « . . . il giorno che ho sempre anelato è giunto . . . ». Nel successivo anno, quando Pisa era occupata da tedeschi e da fascisti, Egli passava silenziosamente per i porticati della Sapienza pisana, e, come ricordava Augusto Mancini, ex Rettore dell'Ateneo pisano, quando i suoi occhi incontravano quelli dei colleghi, esprimevano l'accoramento e la speranza.

Durante quel periodo Tonelli ebbe la direzione della Scuola Normale di cui dal 1930 al 1944, compreso anche il triennio 1939–1942, nel quale si era trasferito a Roma per l'insegnamento dell'Analisi matematica algebrica e infinitesimale, aveva sempre diretto gli studi scientifici e gli Annali.

Quel che Lui fece per salvare la Normale dalle rovine della guerra è stato già pubblicamente detto. Con alto spirito di sacrificio, nell'ottobre 1943 aveva accettato dal governo di Salò la nomina, fatta a Sua insaputa, di Direttore, come unico modo di salvare la biblioteca e tutto l'arredamento della Scuola dallo scempio che ne avrebbero fatto gli occupanti tedeschi. Per le Sue insistenze la Scuola fu dai tedeschi restituita alle sue funzioni nel dicembre 1943; quando poi il fronte della guerra si fermò a Pisa, la Scuola subì due invasioni, e senza la Sua opera e quella del suo caro discepolo Landolino Giuliano, forse al momento della liberazione, dello storico palazzo dei Cavalieri sarebbero rimasti solo i muri.

Anche alla resistenza aveva dato il Suo contributo: la Sua villa di campagna in Asciano Pisano era stata per quasi un anno centro di raccolta di armi e di partigiani, e fu così una seconda volta, come disse Augusto Mancini, « soldato della libertà », sicchè alla liberazione della città di Pisa, per riconoscimento di tutte le Sue prove di civismo, Egli era nominato vicesindaco e presidente dell'Ente comunale di assistenza.

Allo scienziato e al cittadino la città di Pisa decretò l'onore di accogliere le sue Spoglie nel Cimitero Monumentale della Piazza dei Miracoli.

A Pisa, alla Normale e alla Sapienza, echeggia il ricordo delle magnifiche lezioni di Analisi infinitesimale da lui tenute agli studenti del biennio, di quelle di Analisi superiore per gli iscritti alla laurea, delle Sue conferenze al Seminario matematico della Normale. Delle questioni presentava i punti essenziali; le Sue deduzioni che avevano insieme il requisito della semplicità e della naturalezza, e la Sua parola facile e precisa, lo facevano apparire ai Suoi scolari, come era effettivamente, un Maestro insuperabile.

Nelle questioni morali non ammetteva compromessi e non era disposto ad indulgere anche a costo di amarezze, che non Gli mancarono, specie nell'ultimo anno della Sua vita: Egli giudicava uomini e fatti con severa imparzialità e assoluta giustizia.

«Maestro di scienza e di vita» dissero di Lui i Suoi scolari, «difensore della verità e della giustizia» disse il rappresentante della città di Pisa alla Sua prima commemorazione.

Furono qui lette nell'ultimo biennio le commemorazioni di Vito Volterra, Tullio Levi-Civita, Federigo Enriques; degno di uguale affettuoso ricordo e di rimpianto è Leonida Tonelli, che insieme a questi grandi è il simbolo della universalità della matematica italiana.

ELENCO CRONOLOGICO DELLE PUBBLICAZIONI DI LEONIDA TONELLI

[1] *Sulle funzioni derivate*, « Rend. R. Ist. Lomb. Scienze e Lettere », (2), *40*, pp. 1172–1178 (1907).

[2] *I polinomi di approssimazione di Tchebycheff*, « Ann. di Mat. pura e applicata », (3), *15*, pp. 47–119 (1908).

[3] *Discontinuità di 1ª specie e gruppi di punti*, « Rend. R. Ist. Lomb. Scienze e Lettere », (2), *41*, pp. 773–778 (1908).

[4] *Sulla rettificazione delle curve*, « Atti R. Acc. Sc. di Torino », *43*, pp. 783–800 (1908).

[5] *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), *18*$_{I}$, pp. 577–582 (1909).

[6] *Sulle serie di Dirichlet*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), *18*$_{I}$, pp. 233–238 (1909).

[7] *Sull'integrazione per parti*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), *18*$_{II}$, pp. 246–253 (1909).

[8] *Sul teorema di Hadamard relativo al valore maggiorante di un determinante*, « Giorn. Mat. di Battaglini », *47*, pp. 212–218 (1909).

[9] *Sulla continuità e la derivabilità di un integrale rispetto ad un parametro*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), *19*$_{I}$, pp. 84–89 (1910).

[10] *Sugli zeri del limite di una successione di funzioni analitiche*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), *19*$_{I}$, pp. 5–10 (1910).

[11] *Sull'iterazione*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), *19*$_{I}$, pp. 676–681 (1910).

[12] *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *29*, pp. 1–36 (1910).

[13] *Sull'iterazione*, « Giorn. Mat. di Battaglini », *48*, pp. 341–373 (1911).

[14] *Sulle serie di funzioni analitiche della forma* $\Sigma a_n (x) x^n$, « Ann. di Mat. pura e applicata », (3), *18*, pp. 99–133 (1911).

[15] *Sui massimi e minimi assoluti del Calcolo delle Variazioni*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *32*, pp. 297–337 (1911).

[16] *Sugli integrali curvilinei*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), 20_1, pp. 229–235 (1911).
[17] *Sulle orbite periodiche*, Note I e II, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), 21_1, pp. 251–258, 332–334 (1912).
[18] *Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni*, Note I, II e III, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), 21_1, pp. 448–453; 554–559 (1912); 21_{II}, pp. 132–137 (1912).
[19] *Sulla lunghezza di una curva*, « Atti R. Acc. Sc. di Torino », *47*, pp. 1067–1075 (1912).
[20] *Sul problema degli isoperimetri*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), 22_1, pp. 424–430 (1913).
[21] *Sull'esistenza della soluzione nei problemi di calcolo delle Variazioni*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), 22_1, pp. 860–866 (1913).
[22] *Sul caso regolare nel Calcolo delle Variazioni*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *35*, pp. 49–73 (1913).
[23] *Sui problemi isoperimetrici*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *36*, pp. 333–344 (1913).
[24] *Sul valore di un certo ragionamento*, « Atti R. Acc. Sci. di Torino », *49*, pp. 4–14 (1913).
[25] *Lezioni di Analisi Algebrica*, Cagliari, 1913.
[26] *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, Parma, 1914.
[27] *Sulle funzioni di linea*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), 23_1, pp. 28–33 (1914).
[28] *Su una proposizione dell'Almansi*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), 23_1, pp. 676–682 (1914).
[29] *Sulla stabilità dell'equilibrio di una certa massa liquida sottomessa alle sole forze molecolari*, « Ann. Mat. pura e applicata », (3), *23*, pp. 61–106 (1914).
[30] *Sur une méthode directe du Calcul des Variations*, Notes I et II, « Comp. Rend. Ac. des Sc. Paris », *158*, pp. 1776–1778; 1983–1985 (1914).
[31] *Sul problema degli isoperimetri*, « Rend. R. Acc. Lincei » (5), 23_{II}, pp. 572–577 (1914).
[32] *Sulla proprietà di minimo della sfera*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *39*, pp. 109–138 (1915).
[33] *Sulle soluzioni periodiche nel Calcolo delle Variazioni*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), 24_{II}, pp. 317–324 (1915).
[34] *Sulla derivata seconda mista di un integrale doppio*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *40*, pp. 295–297 (1915).
[35] *Sur une méthode directe du Calcul des Variations*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *39*, pp. 233–264 (1915).
[36] *Su alcuni polinomi approssimativi*, « Ann. Mat. pura e applicata », (3), *25*, pp. 275–316 (1916).
[37] *Successioni di curve e derivazione per serie*, Note I e II, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), 25_1, pp. 22–30; 85–91 (1916).
[37 bis] *Sulla ricerca delle funzioni primitive*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), 25_1, pp. 163–170 (1916).
[38] *Sul differenziale dell'arco di curva*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), 25_1, pp. 207–213 (1916).
[39] *Sulla potenza di alcuni insiemi*, « Giorn. Mat. di Battaglini », *57*, pp. 219–236 (1919).
[40] *A proposito di una Nota del sig. A. Vergerio*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), 28_1, pp. 117–119 (1919).
[41] *Su alcuni punti di Calcolo delle Variazioni*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), 29_1, pp. 305–309 (1920).
[42] *Sulla ricerca delle funzioni primitive*, Note I, II e III, « Rend. R. Acc. Lincei » (5), 29_{II}, pp. 44–48; 106–110; 186–191 (1920).
[43] *Il Calcolo delle Variazioni*, « Annuario Scientifico Industriale », 1920.
[44] *La semicontinuità nel Calcolo delle Variazioni*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *44*, pp. 167–249 (1920).
[45] *Sopra due proposizioni di J. W. Lindeberg e E. E. Levi nel Calcolo delle Variazioni*, Note I e II, « Rend. R. Acc. Lincei » (5), 30_1, pp. 19–22; 110–112 (1921).
[46] *Criteri per l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni*, « Ann. Mat. pura e applicata » (3), *30*, pp. 159–221 (1921).

[47] *Sulla costante isoperimetrica*, « Rend. R. Acc. Lincei », (5), *32*, pp. 587–590 (1923).
[48] *Sul problema isoperimetrico con un punto terminale mobile*, « Mem. R. Acc. Sc. di Bologna », (7), *10*, pp. 11–15 (1923).
[49] *Sulla nozione di integrale*, « Ann. Mat. pura e applicata », (4), *1*, pp. 105–145 (1924).
[50] *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, (Bologna, Zanichelli), vol. I, pp. VII + 466 (1922); vol. II, pp. VIII + 661 (1923).
[51] *Sulle orbite periodiche irreversibili*, « Mem. R. Acc. Sc. di Bologna », (8), *1*, pp. 21–25 (1924).
[52] *Su una proposizione fondamentale dell'Analisi*, « Boll. della U. M. I. », *3*, pp. 103–104 (1924).
[53] *Sull'unicità della soluzione di una equazione differenziale ordinaria*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *1*, pp. 272–277 (1925).
[54] *Sul problema delle funzioni primitive*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *1*, pp. 349–353 (1925).
[55] *Sur le calcul des Variations*, « Matematisk Tidsskrift », Copenhagen, 1925.
[56] *Sul teorema di Green*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *1*, pp. 482–488 (1925).
[57] *The Calculus of Variations*, « Bull. of the Am. Math. Soc. », *31*, pp. 163–172 (1925).
[58] *Sulla convergenza delle serie di Fourier*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *2*, pp. 85–91 (1925).
[59] *Sulla convergenza assoluta delle serie di Fourier*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *2*, pp. 145–149 (1925).
[60] *La formula di Parseval per le serie doppie di Fourier*, « Mem. R. Acc. Sc. di Bologna », (8), *2*, pp. 53–60 (1925).
[61] *Recensioni varie* sul « Boll. della U. M. I. », (1), *4* (1925): L. LICHTENSTEIN, *Neuere Entwiklung der Theorie der partieller Differentialgleichungen zweiter ordnung von elliptische Typus*; E. HIBB und M. RIESZ, *Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen*; G. A. BLISS, *Calculus of Variations*, « Bollettino U. M. I. », 132–134.
[62] *Sull'interpolazione trigonometrica*, « Mem. della R. Acc. Sc. di Bologna », (8), *3*, pp. 3–9, (1926).
[63] *Sur le méthode d'adjonction dans le Calcul des Variations*, « Compt. Rend. de l'Ac. Sc. de Paris », *182*, pp. 678–679 (1926).
[64] *Sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie*, « Boll. della U. M. I. », (1), *5*, pp. 1–2 (1926).
[65] *Sur l'integration des suites des fonctions sommables*, « Compt. Rend. de l'Ac. Sc. de Paris », *182*, pp. 838–839 (1926).
[66] *Sulla quadratura delle superficie*, Note I, II e III, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *3*, pp. 357–362, 445–450, 633–638 (1926).
[67] *Sur la quadrature des surfaces*, « Compt. Rend. de l'Ac. Sc. de Paris », *182*, pp. 1198–1200 (1926).
[68] *Sopra alcune proprietà di un polinomio di approssimazione*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *3*, pp. 714–719 (1926).
[69] *Sur les séries doubles de Fourier*, « Compt. Rend. de l'Ac. Sc. de Paris », *183*, pp. 645–647 (1926).
[70] *Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier*, « Ann. Mat. pura e applicata », (4), *4*, pp. 29–72 (1926).
[71] *Lezioni sull'integrale di Lebesgue e le serie trigonometriche*, (Lezioni raccolte da G. Lampariello), (Bologna, 1924–1925), pp. 1–359.
[72] *Sul problema fondamentale del calcolo integrale*, « Mem. della R. Acc. Sc. di Bologna », (8), *4*, pp. 29–36 (1927).
[73] *Su un polinomio di approssimazione e l'area di una superficie*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *5*, pp. 313–318 (1927).
[74] *Una proprietà delle funzioni integrabili*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *5*, pp. 533–536 (1927).
[75] *Un'osservazione su un teorema di Sturm*, « Boll. della U. M. I. », (1), *6*, pp. 126–128 (1927).

[76] *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni di Fourier*, « Boll. della U. M. I. ». (1), *6*, pp. 123-126 (1927).
[77] *Sur une question du Calcul des Variations*, « Rec. Math. de la Soc. Math. de Moscou », *33*, pp. 87–98 (1926).
[78] *Su un problema di Abel*, « Math. Annalen », *99*, pp. 183–199 (1928).
[79] *Un'osservazione sulla derivazione per serie*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *6*, pp. 365–367 (1927).
[80] *Sulla definizione di funzione di due variabili a variazione limitata*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *7*, pp. 358–363 (1928).
[81] *Sul Calcolo delle Variazioni*, « Atti del Congresso intern. dei Mat. di Toronto », *1*, pp. 555–560 (1928).
[82] *Sulle equazioni integrali di Volterra*, « Mem. della R. Acc. Sc. di Bologna », (8), *5*, pp. 59–64 (1928).
[83] *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra*, « Bull. of the Calcutta Math. Soc. », *20*, pp. 31–48 (1928).
[84] *Recensioni* sul « Periodico di Matematiche », (4), *9* (1929): M. FRÉCHET, *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'Analyse Générale*, pp. 45–46; E. PICARD, *Leçons sur quelques équations fonctionelles avec des applications à divers problèmes d'Analyse*, pp. 47–48.
[85] *Sur la sémicontinuité des intégrales doubles du Calcul des Variations*, « Acta Math. », *53*, pp. 325–346 (1929).
[86] *Report of the 1928 international Congress of Mathematics*, « Bull. of the Am. Math. Soc. », *35*, pp. 201–204 (1929).
[87] *Questione 34* posta da MAURO PICONE nel « Boll. della U. M. I. », (1), *7*, p. 114 (1928) e risolta da L. TONELLI, « Ibid. », pp. 162–163.
[88] *Sulle funzioni di due variabili assolutamente continue*, « Mem. R. Acc. delle Sc. di Bologna », (8), *6*, pp. 81–88 (1929).
[89] *Il contributo italiano alla teoria delle funzioni di variabili reali*, « Atti del Congresso Intern. dei Mat. di Bologna », I, pp. 247–254 (1928).
[90] *Sulla semicontinuità degli integrali doppi*, « Atti del Congresso Intern. dei Mat. di Bologna », III, pp. 65–67 (1928).
[91] *Serie trigonometriche*, (Bologna, Zanichelli, 1928), pp. VIII + 527.
[92] *Sur une problème de Lord Rayleigh*, « Monatsheft f. Math. u. Phys. », *37*, pp. 253–280 (1930).
[93] *Sull'integrale di Dirichlet*, « Mem. della R. Acc. delle Sc. di Bologna », (8), *7*, pp. 3–10 (1930).
[94] *Un'osservazione sulle serie*, « Boll. della U. M. I. », (1), *9*, pp. 57–59 (1930).
[95] *Serie trigonometriche*, Conferenza tenuta al Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma il 28 aprile 1928, « Rend. Sem. Mat. Roma » (2), *6*, pp. 26–42 (1930).
[96] *Recensione* dell'opera: BONNESEN, *Les problèmes des isopérimètres et des isopiphanes*, « Periodico di Matematiche », (4), *10*, pp. 177–178 (1930).
[97] *Un teorema sulla derivazione delle serie*, « Rend. R. Acc. Lincei » (6), *13*, pp. 163–168 (1931).
[98] *Sulle derivate esatte*, « Mem. della R. Acc. Sc. di Bologna », (8), *8*, pp. 13–15 (1931).
[99] *Sull'esistenza del minimo nei problemi di Calcolo delle Variazioni*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », (2), *1*, pp. 89–99 (1932).
[100] *Calcolo differenziale*, « Enciclopedia Italiana », XII, pp. 792–796 (1931).
[101] *Un teorema di Calcolo delle Variazioni*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *15*, pp. 417–423 (1932).
[102] *Funzione*, « Enciclopedia Italiana », XVI, pp. 185–193 (1932).
[103] *Sul Calcolo delle Variazioni*, « Atti del Congresso Intern. dei Mat. di Zurigo », *2*, pp. 102–103 (1932).
[104] *Fourier*, « Enciclopedia Italiana », XV, pp. 823–824 (1933).

[105] *L'estremo assoluto degli integrali doppi*, «Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa», (2), *2*, pp. 89–130 (1933).
[106] *Calcolo integrale*, « Enciclopedia Italiana », XIX, pp. 364–371 (1933).
[107] *Sulle proprietà delle estremanti*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », (2), *3*, pp. 213–237 (1934).
[108] *Su gli integrali del calcolo delle variazioni in forma ordinaria*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », (2), *3*, pp. 401–450 (1934).
[109] *Su una particolare questione di calcolo delle variazioni*, « Boll. della U. M. I. », (1), *13*, pp. 205–209 (1934).
[110] *Recensione* dell'opera: F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. IV, in «Periodico di Matematiche», (4), *14*, pp. 323–325 (1934).
[111] *Sulle equazioni di Eulero nel calcolo delle variazioni*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa » (2), *4*, pp. 191–216 (1935).
[112] *Sulle estremaloidi del calcolo delle variazioni*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *21*, pp. 289–293 (1935).
[113] *Recensione* dell'opera: E. LANDAU, *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung*, in « Periodico di Matematiche », (4), *15*, pp. 67–68 (1935).
[114] *Recensione* dell'opera: A. ZYGMUND, *Trigonometrical series*, in « Periodico di Matematiche », (4), *15*, pp. 193–194 (1935).
[115] *Recensione* dell'opera: L. GALVANI, *Introduzione matematica allo studio del metodo statistico*, in « Periodico di Matematiche », (4), *15*, pp. 255–257 (1935).
[116] *Recensione* dell'opera: G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, parte II, in « Periodico di Matematiche », (4), *16*, pp. 121–123 (1936).
[117] *Su una proposizione fondamentale dell'Analisi matematica*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *23*, pp. 161–165 (1936).
[118] *Sulle estremali complete*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », (2) *5*, pp. 159–168 (1936).
[119] *Sulle funzioni di due variabili generalmente a variazione limitata*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », (2), *5*, pp. 315–320 (1938).
[120] *Sugli integrali continui del Calcolo delle Variazioni*, in *Scritti matematici offerti a L. Berzolari* (Pavia, 1936), pp. 283–289.
[121] *Estratto di lettera del prof. Leonida Tonelli al prof. Giovanni Sansone*, in *Scritti matematici offerti a L. Berzolari* (Pavia, 1936), pp. 404–405.
[122] *Sulle equazioni delle estremanti nel problema di Mayer*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *24*, pp. 180–187 (1936).
[123] *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Lagrange*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *24*, pp. 239–245 (1936).
[124] *Sul problema di Plateau*, Note I e II, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *24*, pp. 333–339, 393–398 (1936).
[125] *Sulla semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange*, « Rend. R. Acc. Lincei », (6), *24*, pp. 399–404 (1936).
[126] *Salvatore Pincherle*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », (2), *6*, pp. 1–10 (1937).
[127] *Andrea Razmadzé*, « Travaux de l'Inst. Math. de Tibilissi », I, pp. 11–16 (1937).
[128] *Sul problema della superficie limitata da un dato contorno ed avente la minima area*, « Atti R. Acc. Sc. di Torino », vol. 72, t. I, pp. 225–233 (1937).
[129] *Sopra alcuni criteri di uguale continuità*, « Rend. R. Ist. Lomb. Scienze e Lettere », (3), *1*, (vol. 70 della collezione), pp. 107–116 (1937).
[130] *Sulle serie doppie di Fourier*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », (2), *6*, pp. 315–326 (1937).
[131] *Il Calcolo delle Variazioni secondo la Scuola italiana e i suoi più recenti risultati*, « Atti del 1° Congresso della U. M. I. », Firenze, (Zanichelli, Bologna), pp. 26–39 (1937).
[132] *Un teorema di semicontinuità per i problemi di Mayer*, « Atti del 1° Congresso della U. M. I. », Firenze (Zanichelli, Bologna), pp. 127–132 (1937).

[133] *Calcolo delle Variazioni*, « Enciclopedia Italiana », XXXIV, pp. 1001–1005 (1937).
[134] *Su un teorema relativo alle serie di Fourier*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », (2), 7, pp. 329–331 (1938).
[135] *Recensione* dell'opera: V. VOLTERRA e J. PÉRÈS, *Théorie générale des fonctionelles*, in « Periodico di Matematiche », (4), *18*, pp. 120–128 (1938).
[136] *Integrale, lunghezza, area*, « Rend. Sem. Mat. Fis. di Milano », XIII, pp. 1–14 (1939).
[137] *Sulla legge dei grandi numeri*, « Saggi in Sc. Assicurative della R. Università di Pisa », *3*, pp. 1–11 (1939).
[138] *Su alcuni funzionali*, « Ann. di Mat. pura e applicata », (4), *18*, pp. 1–21 (1939).
[139] *Sull'equazione differenziale* $y'' = f(x, y, y')$. « Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », (2), *8*, pp. 75–88 (1939).
[140] *Su l'esistenza delle estremanti assolute per gli integrali doppi*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », (2), *8*, pp. 161–165 (1939).
[141] *Sulle funzioni di intervallo*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », (2), *8*, pp. 309–321 (1939).
[142] *Lezioni di Analisi Matematica*, vol. I, Pisa, Litografie, pp. 355 (1939).
[143] *Lezioni di Analisi Matematica*, vol. II, Pisa, Litografie, pp. 416 (1940).
[144] *L'analisi funzionale nel Calcolo delle Variazioni*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », (2), *9*, pp. 289–302 (1940).
[145] *Recensione* dell'opera: M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*, in « Boll. della U.M.I. », (2), *3*, pp. 402–405 (1941).
[146] *Recensione* dell'opera: D. HILBERT und P. BERNOYS, *Grundlagen der Mathematik*, Zweit. Band, « Scientia », vol. LXIX, p. 86 (1941).
[147] *Recensione* dell'opera: O. PERRON, *Irrationalzahlen*, « Scientia », vol. LXIX, p. 87 (1941).
[148] *Corso di matematica per la Scuola Media* (in collaborazione con E. LINDNER), vol. I, Firenze, Sansoni, 1941; vol. II, 1941; vol. III, 1942.
[149] *Su un nuovo tipo di problemi di Calcolo delle Variazioni*, « Ann. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa », (2), *10*, pp. 167–189 (1941).
[150] *Esercizi di analisi matematica*, vol. I, Roma, Litografia, pp. 228 (1942).
[151] *Su alcuni concetti dell'Analisi moderna*, « Ann. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa », (2), *11*, pp. 107–118 (1942).
[152] *Sull'integrazione delle funzioni*, « Ann. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa », (2), *11*, pp. 235–240 (1942).
[153] *Esercizi di analisi matematica*, vol. II, Pisa, Litografie, pp. 241 (1942).
[154] *Aritmetica e Algebra* (in collaborazione con E. LINDNER), vol. I, Firenze, Sansoni, pp. IV + 379 (1946).
[155] *Nuove ricerche su una speciale classe di problemi del Calcolo delle Variazioni*, « Rend. Acc. Lincei », (8), *1*, pp. 247–250 (1946).
[156] *Su un nuovo tipo di problemi di Calcolo delle Variazioni*, Memoria inedita.
[157] *Equazioni integrali lineari*, manoscritto inedito.
[158] *Contributo dello Studio pisano al progresso delle Scienze matematiche*, relazione inedita preparata per il sesto centenario dell'Università di Pisa, che ricorreva nell'autunno del 1943.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà lettura di un telegramma inviatogli della famiglia del compianto Collega LEONIDA TONELLI per associarsi alla manifestazione di omaggio che la Classe si accinge in questa seduta a tributare alla memoria dell'illustre Consocio.

Prende quindi la parola il prof. Sansone che rievoca, con nobili e commosse parole, la figura dello Scienziato insigne e dell'Uomo.

Il Presidente ringrazia il Socio Sansone per l'elevata orazione ed invita la Classe a tributare, con un minuto di austero raccoglimento, l'estremo omaggio alla memoria del grande matematico.

Ripresi i lavori, il Presidente si rallegra con il Socio De Blasi il quale, dopo una lunga malattia, è oggi rientrato all'Accademia ed invia un augurio al Socio Bordoni che non è potuto intervenire alla seduta a causa delle sue condizioni di salute.

Il Presidente informa i Colleghi che sta per giungere all'Accademia il signor Presidente della Repubblica, che l'Accademia stessa si onora di poter annoverare tra i suoi più illustri Membri e dichiara quindi chiusa la seduta perchè i Soci possano tributare il loro devoto saluto al Primo Cittadino della Repubblica.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica alla Classe che è presente il prof. Nils Zeylon dell'Università di Lund e porge all'illustre Ospite il cordiale saluto dell'Accademia.

Il Socio Maiorana comunica che era sua intenzione presentare alcune sue vedute sulla teoria della relatività di Einstein, ma fa rilevare che per tale illustrazione sarebbe necessario disporre di tempo sufficiente; d'altra parte ciò non sembra possibile poichè nella presente seduta i lavori devono essere affrettati a causa di due sedute segrete che devono aver luogo successivamente.

Anche su richiesta di altri Colleghi, il Presidente dispone che all'illustrazione della Nota del Socio Maiorana sia dedicata un'apposita riunione che avrà luogo mercoledì 19 maggio alle ore 10.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci: Sansone, Cotronei, Vernoni, Signorini, Puntoni, Sergi, Colonnetti, Picone ed Abetti.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CARNERA L., Le variazioni della latitudine determinate a Pino Torinese negli anni 1943–45.

TROTTER A., L'evoluzione del fiore femmineo e la maturazione del frutto nel Nocciuolo (*Corylus Avellana L. s. l.*).

CAIANIELLO E., Sul moto impulsivo di un sistema olonomo in presenza di vincoli unilaterali simultanei (pres. dal Corrisp. A. SIGNORINI).

CINQUINI S., Sopra l'esistenza dell'estremo in campi illimitati (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

CINQUINI–CIBRARIO M., Sopra i sistemi di equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali e multiple (pres. dal Corrisp. C. SANSONE).

DI RAIMONDO F. e ORTALI V., Sintesi di amide nicotinica da parte dei micobatteri (pres. dal Socio V. PUNTONI).

FRESA A., Sulla variazione della latitudine dell'Osservatorio di Pino Torinese (I Sala meridiana) nel periodo 1943.8– 1945.9 (pres. dal Corrisp. G. CECCHINI).

GOIDANICH G., CAMICI L. e GOIDANICH I., A proposito dell'azione dei *penicillium* e dei prodotti del loro metabolismo sull'accrescimento cellulare in tessuti normali e patologici (pres. dal Socio G. COTRONEI).

LEONARDI P., Nuove ricerche geologiche nel gruppo della Marmolada (Dolomiti) (pres. dal Corrisp. GB. DAL PIAZ).

PAGNI M., Un'osservazione sui coefficienti di Fourier delle funzioni crescenti (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

PIAZZOLLA–BELOCH M., Sulle proprietà topologiche dei circuiti d'ordine dispari tracciati sopra quadriche a punti iperbolici (pres. dal Socio G. CASTELNUOVO).

SALINI U., Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia ad Jacobiano nullo di caratteristica uno (pres. dal Socio G. CASTELNUOVO).

SEGRE G. A., Sulla stratigrafia dell'antica cava di Saccopastore presso Roma. Nota I (pres. dal Corrisp. S. SERGI).

TORALDO DI FRANCIA G., Sulla forma intrinseca della trasformazione dell'interferenza inversa (pres. dal Socio G. ABETTI).

TORALDO DI FRANCIA G., Sulla luce diffratta da innumerevoli aperture distribuite a caso su un diaframma (pres. dal Socio G. ABETTI).

TORTORICI M., Rapporto tra proiezione ortogonale di un segmento obiettivo in geometria piana iperbolica (pres. Corrisp. C. MINEO).

PLICHI SUGGELLATI

Il Socio Bargellini presenta alla Classe un plico suggellato contenente una Nota del dott. Enrico Del Pianto.

La Presidenza, constatata l'integrità dei sigilli, prende atto della presentazione e ordina che il plico stesso sia conservato nell'Archivio dell'Accademia a disposizione dell'Autore.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Ha quindi inizio la presentazione delle pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia, tra le quali meritano particolare rilievo il lavoro del Socio Silvestri dal titolo «Mezzi di lotta contro i parassiti animali delle piante coltivate» e il lavoro del Socio D'Erasmo intitolato: «I proboscidati fossili nello stato attuale della scienza».

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 15 maggio 1948.

D'ERASMO Geremia. — *I proboscidati fossili nello stato attuale della scienza.* Estr. da «Rendiconti dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società di Scienze, Lettere ed Arti di Napoli», s. 4ª, vol. XV, 1948.

MARINI Giorgio. — *Sui dinamometri a liquido.* Estr. da «Tecnica italiana», n. s., vol. II, nn. 5 e 6. (Pubblicazioni della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Cagliari, n. 21).

SILVESTRI Filippo. — *Mezzi di lotta contro i parassiti animali delle piante coltivate*, Estr. da «Atti del Convegno di Portici», 1946.

VOCCA Ottavio. — *Considerazioni sulle possibilità di utilizzazione dei combustibili solidi e gassosi per l'alimentazione delle turbine a gas.* Estr. da «La Termotecnica», 1947, n. 7. (Pubblicazioni della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Cagliari, n. 22).

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 giugno 1948.

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria). — *Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche.* Nota III (*) del Corrisp. B. SEGRE.

13. Un'interessante proprietà aritmetica della forma cubica (22), estendente il caso del teorema di Fermat richiamato nel n. 1, viene espressa dal seguente teorema.

Le sole rette razionali situate sulla varietà cubica

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0, \tag{42}$$

sono le 15 rette

$$x_{i_0} = x_{i_1} + x_{i_2} = x_{i_3} + x_{i_4} = 0, \tag{43}$$

dove i_0, i_1, i_2, i_3, i_4 *denota una qualunque permutazione dei numeri* 0, 1, 2, 3, 4.

Questo teorema trovasi già enunciato imperfettamente – e dimostrato con un'abile, ma non semplice, discussione di un sistema di quattro equazioni diofantee cubiche in sei argomenti – in un lavoro di Wachs (20). Qui lo otterremo mediante un'argomentazione geometrica semplicissima, che con adeguate modificazioni può riescire utile in casi assai più generali, consistente nelle seguenti tre osservazioni.

a) Le 15 rette (43) stanno nell'iperpiano

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \tag{44}$$

(*) Presentata nella seduta del 10 aprile 1948. – Continuazione delle Note I e II, apparse in questo volume dei « Rendiconti », pp. 346–352 e pp. 509–515.

(20) S. WACHS, *Sur une propriété arithmetique d'une variété cubique de l'espace à quatre dimensions*, « Rèv. Sci. » (Rev. Rose Illus.) *80*, 402–406 (1942).

e sono le sole rette razionali situate sulla superficie cubica non singolare rappresentata dalle (42), (44). Invero quest'ultima è una così detta *superficie diagonale*, la quale, oltre alle (43), contiene ancora soltanto 12 rette, ciascuna delle quali è reale ma irrazionale [21].

b) Uno qualunque dei 10 iperpiani

$$x_i + x_j = 0 \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3, 4;\ i \neq j) \tag{45}$$

sega la (42) secondo un cono cubico, il quale, a norma del teorema di Fermat, non contiene punti razionali oltre a quelli situati sulle tre rette (43) che appartengono allo spazio (45) considerato; e si rammenti che ciascuna di tali rette sta altresì nello spazio (44).

c) Una retta r razionale distinta dalle (43) che giaccia sulla (42) non può stare nello spazio (44), in base ad *a*), e quindi ha in comune con questo spazio uno ed un solo punto, diciamolo P. Similmente da *b*) si deduce che la r non appartiene allo spazio (45), sicchè l'incontra in un punto P_{ij} $(= P_{ji})$ determinato, necessariamente razionale e quindi situato su (almeno) una delle tre rette (43) in esso contenute. Ne consegue che P_{ij} sta nello spazio (44), eppertanto coincide con P; ma ciò è impossibile, in quanto i dieci spazi (45) non hanno nessun punto comune.

14. In virtù del teorema del n. 7 (Nota II), dal risultato stabilito nel n. 13 si deduce subito la seguente generalizzazione del teorema di Fermat:

I soli S_{n-1} *razionali situati sulla forma cubica*

$$x_0^3 + x_1^3 + \cdots + x_{2n}^3 = 0 \qquad (n \geq 1) \tag{46}$$

sono i $(2n+1)(2n)\cdots(n+1)/2^n$ *spazi*

$$x_{i_0} = x_{i_1} + x_{i_2} = x_{i_3} + x_{i_4} = \cdots = x_{i_{2n-1}} + x_{i_{2n}} = 0, \tag{47}$$

dove $i_0, i_1, \cdots, i_{2n}$ *denota una qualunque permutazione dei numeri* $0, 1, \cdots, 2n$ (*onde tali* S_{n-1} *giacciono tutti sull'iperpiano* $x_0 + x_1 + \cdots + x_{2n} = 0$).

15. Supposto $n \geq 2$, ci si può proporre di determinare tutti i punti razionali situati sulla (46). Il problema di risolvere la (46) nel campo razionale ha intanto un'infinità di soluzioni, date dai *punti razionali situati sugli spazi* (47); da esse possono poi dedursi altre soluzioni col *procedimento delle tangenti*, il quale consiste nel determinare per ognuno di quei punti le ulteriori intersezioni della (46) colle rette razionali ivi ad essa tangenti. Proveremo che

Nell'ipotesi che sia $n \geq 5$, *il procedimento dianzi indicato fornisce tutte le soluzioni della* (46) *nel campo razionale* (*ciascuna eventualmente più volte*).

(21) Cfr. B. SEGRE, *The non-singular cubic surfaces* (Oxford, The Clarendon Press, 1942), p. 152. Qui è inoltre dimostrato che le 15 rette razionali sono iperboliche, e stanno a tre a tre in 15 piani tritangenti, di cui 5 sono principali e 10 non principali di 1ª specie; e che le 12 rette irrazionali sono ellittiche, e formano una bissestupla.

Sia P un punto razionale situato sulla (46). Occorre dimostrare che P sta sull'iperpiano tangente alla (46) in un conveniente punto razionale situato in uno degli spazi (47), per il che basta far vedere che la prima polare di P rispetto alla forma (46) incontra almeno uno di detti S_{n-1} razionali secondo una quadrica contenente qualche punto r a z i o n a l e. È anzi sufficiente mostrare che ad una siffatta sezione appartiene qualche punto r e a l e, in quanto ogni forma quadratica i n d e f i n i t a a coefficienti razionali in $n \geqq 5$ variabili si annulla per convenienti valori razionali non tutti nulli delle variabili [22].

Le coordinate $x_0 = p_0, x_1 = p_1, \cdots, x_{2n} = p_{2n}$ del punto P sono, per ipotesi, numeri razionali non tutti nulli soddisfacenti alla (46). Si vede facilmente che, disponendo di un'opportuna omografia razionale trasformante in sè la (46) (n. 1), e mutando eventualmente di segno tutte le p, possiamo sempre ridurci ad avere

$$p_0 > 0 \quad , \quad p_i < 0 \quad , \quad p_0 + p_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, 2n),$$

oppure

$$p_0 > 0 \quad , \quad p_1 \geqq 0 \quad , \quad p_2 < 0 \quad , \quad p_3 \leqq 0 .$$

Sia nell'un caso che nell'altro, il punto di coordinate

$$x_0 = \sqrt{-(p_2 + p_3)} \quad , \quad x_1 = -\sqrt{-(p_2 + p_3)} \quad , \quad x_2 = \sqrt{p_0 + p_1} \quad , \quad x_3 = -\sqrt{p_0 + p_1},$$

$$x_4 = x_5 = \cdots = x_{2n} = 0$$

risulta r e a l e; esso inoltre giace manifestamente in pari tempo su qualcuno degli spazi (47) e sulla quadrica polare di P rispetto alla (46), la cui equazione è

$$p_0 x_0^2 + p_1 x_1^2 + \cdots + p_{2n} x_{2n}^2 = 0.$$

Tanto basta, in base a quanto precede, per concludere nel modo voluto.

16. Il n. 15 fornisce un procedimento regolare per risolvere completamente la (46) nel campo razionale per $n \geqq 5$. Invero l'argomentazione ivi svolta mostra che, se $n \geqq 5$, i punti razionali della (46) si ottengono tutti come t a n g e n z i a l i dei vari punti razionali di un S_4 r a z i o n a l e giacente sulla (46), oppure come trasformati di tali tangenziali mediante le o m o g r a f i e r a z i o n a l i che mutano in sè la (46). I punti che così si determinano vengono a dipendere razionalmente da $4 + (2n - 2) = 2n + 2$ parametri non omogenei, sicchè ognuno di essi sarà generalmente definibile in tal guisa in più modi diversi. Ecco come il suddetto procedimento può tradursi in equazioni.

(22) Cfr. per esempio L. E. DICKSON, *Studies in the theory of numbers* (Chicago, University Press, 1930), § 38, oppure H. HASSE, *Ueber die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in Körper der rationalen Zahlen*, « Journ. r. und ang. Math. », *152*, 129-148 (1923), § 13.

Scegliamo quale S_4 razionale di partenza lo spazio

$$x_0 + x_1 = x_2 + x_3 = x_4 + x_5 = x_6 + x_7 = x_8 + x_9 = 0,$$

$$x_{10} = \cdots = x_{2n} = 0;$$

esso è luogo del punto

$$y_0 = -y_1 = 1 \ , \ y_2 = -y_3 = a \ , \ y_4 = -y_5 = b \ , \ y_6 = -y_7 = c \ , \ y_8 = -y_9 = d,$$

$$y_{10} = \cdots = y_{2n} = 0,$$

al variare dei parametri non omogenei a, b, c, d. La generica retta tangente alla (46) in tale punto, si ottiene congiungendo quest'ultimo al punto di coordinate $(z_0, z_1, \cdots, z_{2n})$, dove $z_2, z_3, \cdots, z_{2n}$ si assumano come parametri omogenei e si ponga

$$z_0 = 0, \quad z_1 = -a^2(z_2 + z_3) - b^2(z_4 + z_5) - c^2(z_6 + z_7) - d^2(z_8 + z_9);$$

essa è dunque il luogo descritto dal punto

$$(48) \quad \begin{cases} x_0 = \lambda \, , \, x_1 = -\lambda - \mu\,[a^2(z_2 + z_3) + b^2(z_4 + z_5) + c^2(z_6 + z_7) + d^2(z_8 + z_9)] \\ x_2 = \lambda a + \mu z_2 \ , \ x_3 = -\lambda a + \mu z_3 \ , \ x_4 = \lambda b + \mu z_4 \ , \ x_5 = -\lambda b + \mu z_5 \\ x_6 = \lambda c + \mu z_6 \ , \ x_7 = -\lambda c + \mu z_7 \ , \ x_8 = \lambda d + \mu z_8 \ , \ x_9 = -\lambda d + \mu z_9 \\ x_{10} = \mu z_{10}, \cdots, x_{2n} = \mu z_{2n}, \end{cases}$$

al variare di λ/μ. Il punto (48) soddisfa alla (46) qualora si assuma

$$(49) \quad \begin{cases} \lambda = -[a^2(z_2 + z_3) + b^2(z_4 + z_5) + c^2(z_6 + z_7) + d^2(z_8 + z_9)]^3 + \sum_{i=2}^{2n} z_i^3 \\ \mu = 3\,[a^2(z_2 + z_3) + b^2(z_4 + z_5) + c^2(z_6 + z_7) + d^2(z_8 + z_9)]^2 - \\ \qquad - 3\,[a(z_2^2 - z_3^2) + b(z_4^2 - z_5^2) + c(z_6^2 - z_7^2) + d(z_8^2 - z_9^2)], \end{cases}$$

oppure si lascino λ e μ indeterminati se i secondi membri delle (49) si annullano simultaneamente. La soluzione completa della (46) viene così espressa per $n \geqq 5$ mediante le (48), (49), coll'avvertenza che si prescinda dall'ordine in cui nella (46) medesima figurano le variabili, e risulta del 10° ordine nei parametri $a, b, c, d, z_2, z_3, \cdots, z_{2n}$.

Astronomia. — *Sulle parallassi radiali.* Nota (*) del Corrisp. F. ZAGAR.

1. Sia r la distanza di un astro dalla Terra ad un istante t, r_1 la distanza dello stesso al tempo t_1, e siano i ed i_1 le intensità luminose apparenti nei due istanti; allora, supponendo che la luminosità assoluta sia rimasta costante, si ha

$$\frac{i}{i_1} = \frac{r_1^2}{r^2} \quad , \quad \log \frac{i}{i_1} = 2 \log \frac{r_1}{r} .$$

Se inoltre m ed m_1 sono le corrispondenti grandezze stellari apparenti dello stesso oggetto, si ha ancora

$$(1) \qquad m_1 - m = 2.5 \log \frac{i}{i_1} = 5 \log \frac{r_1}{r} ,$$

(logaritmo decimale) cioè, posto

$$r_1 - r = \Delta r \quad , \quad m_1 - m = \Delta m ,$$

$$(1') \qquad \Delta m = 5 \log \left(1 + \frac{\Delta r}{r} \right) ,$$

essendo le variazioni Δm e Δr relative all'intervallo $\Delta t = t_1 - t$.

Dalla precedente si ha subito

$$(2) \qquad \frac{1}{r} \Delta r = 10^{0.2 \Delta m} - 1 ,$$

e, se Δr è piccolo di fronte ad r, indicando con $\mathfrak{M}$ il modulo dei logaritmi decimali, sviluppando il logaritmo nella (1') e trascurando i termini di ordine superiore in $\frac{\Delta r}{r}$,

$$(2') \qquad \Delta m = 5 \, \mathfrak{M} \frac{\Delta r}{r} \quad , \quad \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{5 \, \mathfrak{M}}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} ,$$

e per un tempo infinitesimo

$$(2'') \qquad \frac{dm}{dt} = \frac{5 \, \mathfrak{M}}{r} \frac{dr}{dt} ,$$

come può dedursi anche derivando la (1).

Ora dr/dt è la velocità radiale dell'astro, e se questa si intende come al solito misurata in km al secondo e per semplicità indicata con R, se inoltre conveniamo di riferire la variazione della grandezza apparente, anzichè

(*) Presentata nella seduta del 9 giugno 1948.

al secondo, all'ora, e di indicarla brevemente con M, e se infine vogliamo ottenere la distanza r, anzichè in km, in unità astronomiche, avremo

$$(3) \qquad r = 5.229 \times 10^{-5} \cdot \frac{R}{M} \qquad \begin{pmatrix} \text{R in km al secondo, M in grandezze} \\ \text{stellari all'ora, } r \text{ in unità astronomiche} \end{pmatrix}.$$

Se invece si vuole avere r in parsec e la variazione M si intende riferita all'anno, sarà

$$r = 222.2 \times 10^{-8} \cdot \frac{R}{M},$$

cosicchè, introducendo la parallasse espressa in secondi d'arco, $\omega = \frac{1}{r}$, si ha ancora

$$(3') \qquad \omega = 4.500 \times 10^{5} \cdot \frac{M}{R} \qquad \begin{pmatrix} \text{R in km al secondo, M in grandezze} \\ \text{stellari all'anno, } \omega \text{ in secondi d'arco} \end{pmatrix}.$$

Si vede dunque che *la conoscenza della velocità radiale* R *e della variazione della grandezza apparente* M *in un dato istante fornisce immediatamente la distanza dell'oggetto*; questa relazione vale anche, per la (2'), se il tempo è finito, purchè si consideri la velocità media $\Delta r/\Delta t$ e la variazione media $\Delta m/\Delta t$ nell'intervallo di tempo trascorso Δt. Se poi Δr non è tale da potersi dire piccolo rispetto ad r, occorre tenere la (2).

Perciò le relazioni precedenti sarebbero un comodo mezzo per determinare le distanze dei corpi del sistema solare e le parallassi delle stelle in base a sole osservazioni fotometriche e di velocità radiali, se i due dati in questione potessero essere determinati dalle osservazioni con la precisione necessaria. Occorre allora, per la questione pratica, considerare separatamente i due casi dei pianeti e delle stelle.

2. Premettiamo qualche considerazione circa la precisione con la quale si possono *oggi* ottenere i due dati R ed M. La velocità radiale può ottenersi esclusivamente con lo spettrografo, e le migliori apparecchiature possono fornire una determinazione con un errore medio di $\pm$ 0.1 km/sec., ed un valore medio di più determinazioni, fatte in condizioni identiche, avrà un errore corrispondentemente minore, cioè si avrà per un numero n di determinazioni

$$(4) \qquad m_R = \pm \frac{0.1}{\sqrt{n}}.$$

La grandezza apparente m di un astro può essere ottenuta con vari metodi, visuali, fotografici e fotoelettrici, tra i quali gli ultimi sono senza confronto i più precisi, e, tenendo presenti solo questi, si può ammettere che si arriva ad un errore medio di $\pm$ $0^m.01$ per una determinazione. Mentre però R risulta direttamente dall'osservazione per l'istante della osservazione stessa, la variazione M deve essere derivata da due determinazioni della grandezza apparente m in epoche successive, giacchè non esiste un metodo capace

di fornire immediatamente il dm/dt come per la velocità radiale. Anche qui la quantità M avrà un errore medio corrispondentemente minore se risulterà da molte determinazioni fatte successivamente entro due epoche estreme. Se indichiamo infatti con T l'intervallo di tempo abbracciato dalle osservazioni, e immaginiamo di effettuare $2n + 1$ osservazioni fotometriche con la predetta massima precisione oggi consentita, distribuite il più uniformemente possibile in questo intervallo, si può facilmente vedere che l'errore medio della variazione M della grandezza stellare risultante per l'istante medio delle osservazioni, supposta la variazione proporzionale al tempo per il periodo delle osservazioni, e relativamente alla unità di tempo $T/2n$, è dell'ordine di

$$m_M = \pm \frac{0.01}{\sqrt{2N}}, \tag{4'}$$

essendo

$$N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n (n + 1)(2n + 1).$$

Per esempio si ha per 101 osservazioni: $n = 50$, $N = 42925$, $\sqrt{2N} = 293$, $m_M = \pm 0^m.000\,03$; e per 1001 osservazioni: $n = 500$, $2N = 80 \times 10^6$, $\sqrt{2N} = 9000$, $m_M = \pm 0^m.000\,001$, sempre per l'unità di tempo $\frac{T}{2n}$.

Conviene anche vedere in quale misura contribuiscono i due errori m_R ed m_M alla formazione dell'errore di r e di ω. Osserviamo a tale scopo che dalle (3) e (3') si ha

$$\begin{cases} m_r = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial M}\right)^2 m_M^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 m_R^2} = \frac{k}{M} \sqrt{\frac{R^2}{M^2} m_M^2 + m_R^2}, \\ m_\omega = \frac{l}{R} \sqrt{m_M^2 + \frac{M^2}{R^2} m_R^2} \quad , \quad k = 5.23 \times 10^{-5} \quad , \quad l = 4.50 \times 10^5. \end{cases} \tag{5}$$

Ora, coi dati calcolati in precedenza e con quelli che stabiliremo subito per M ed R, è facile vedere che il secondo termine sotto la radice, a parità di numero di osservazioni, è sempre trascurabile di fronte al primo, il che significa che la precisione delle velocità radiali in questo problema è di gran lunga superiore a quella delle intensità luminose, per cui è sufficiente calcolare m_r ed m_ω in base al solo apporto dovuto al termine dipendente da m_M:

$$m_r = \frac{k R}{M^2} m_M \quad , \quad m_\omega = \frac{l}{R} m_M \quad , \quad \begin{matrix} k = 5.23 \times 10^{-5} \\ l = 4.50 \times 10^5. \end{matrix} \tag{5'}$$

Secondo questa constatazione sono in generale sufficienti meno osservazioni di velocità radiali in confronto al numero delle determinazioni fotometriche, poichè è inutile eccedere nella precisione del valore risultante di R.

3. a) CASO DELLE STELLE. – Vale per questo caso evidentemente la (3'), e l'applicazione sua esige la conoscenza di M con estrema precisione.

Infatti, anche ammettendo per R il valore insolitamente alto per le stelle di 100 km/sec., dato che la parallasse ω è minore di 1", occorre anzitutto che M sia al più dell'ordine di $1/4500 = 0^m.0002$ all'anno. Per quanto precede, non si può pensare di ottenere questo dato con la precisione sufficiente in un tempo relativamente breve. Infatti, con un centinaio di osservazioni di una stella distribuite regolarmente in un anno, si ottiene la variazione M riferita all'unità centesimo di anno (perchè $T/2n$ è in queste condizioni questa unità), cioè $0^m.000\,002$, con un errore di $\pm\, 0^m.000\,03$, ossia con un errore circa 15 volte maggiore della variazione stessa. Con un centinaio di osservazioni distribuite invece in un secolo si ottiene l'errore medio di M (l'unità è qui l'anno) circa 7 volte minore, mentre infine con un migliaio di osservazioni distribuite in un secolo la suddetta variazione annuale risulta con un errore medio di $\pm\, 0^m.000\,01$ (perchè $T/2n$ è ora un decimo di anno e l'errore calcolato sopra per $n = 500$ deve essere moltiplicato per 10 per riferirlo all'anno), cioè circa 20 volte minore del valore di M.

Nel primo caso non si può parlare di risultati attendibili, nel secondo e terzo le condizioni sono più favorevoli; vediamo se nel terzo la precisione di M (e di R) è sufficiente per far risultare la parallasse ω con la desiderata precisione. Abbiamo per la seconda delle (5') coi dati predetti $R = 100$, $m_M = 0.000\,01$,

$$m_\omega = \pm\, 0''.045,$$

errore non del tutto soddisfacente, ma che certamente permette di concludere che delle serie opportunamente lunghe di osservazioni fotometriche e contemporanee determinazioni di velocità radiali, potrebbero dare con questo metodo ottimi risultati (il termine trascurato nella espressione (5) di m_ω, dovuto all'errore m_R, per $M = 0.0002$ ed $m_R = 0.003$, calcolato questo ultimo mediante la (4) per $n = 1000$, è circa la milionesima parte).

b) Caso dei corpi del sistema solare. – Per questo caso deve essere applicata la (3), ed anche qui la maggiore difficoltà consiste nella determinazione della variazione M con la necessaria precisione. Il problema è però diverso da quello precedente, essendo i corpi in questione molto vicini in confronto alle stelle, e potendo presentare delle rapide variazioni di luminosità, che – a differenza delle stelle – permettono di ottenere in un tempo relativamente breve la variazione con una notevole precisione.

Infatti, supponiamo di osservare un pianeta intorno all'epoca della sua massima velocità radiale rispetto alla Terra, e supponiamo che questo vari la sua grandezza apparente di $0^m.1$ al giorno. Allora effettuando 101 osservazioni equidistanti in una notte, supponiamo nello spazio di 8 ore, si avrà il suddetto errore medio di $\pm\, 0^m.000\,03$ per l'unità di tempo di $0^h.08 = 0^d.0033$, durante il quale intervallo la variazione ammonta a $0^m.00033$, cosicchè M risulta con un errore che è circa un decimo del suo importo. Se invece si effettuano le 101 osservazioni in 10 sere consecutive, immaginandole equidistanti in tempo, l'unità di tempo, alla quale corrisponde l'errore $\pm\, 0^m.000\,03$, è ora $2^h.4 = 0^d.1$, rispetto alla quale si ha $M = 0^m.01$; l'errore con cui risulta

M è dunque in questo caso già 300 volte minore del valore di M stesso. Effettuando infine un migliaio di osservazioni fotometriche in 10 notti consecutive, si trova analogamente per M un errore dell'ordine di 1000 volte più piccolo del proprio valore, cioè, riferendosi all'ora per metterci nelle condizioni della relazione (3), $M = 0^m.004 \pm 0^m.000\,004$. In quest'ultimo caso la distanza r del corpo osservato, secondo la prima delle (5'), e prendendo $R = 30$ km/sec., valore tra i massimi nel sistema solare, risulta con l'errore medio

$$m_r = \pm 0.0004 \text{ U. A.},$$

cioè con una precisione almeno dell'ordine di quella data dai metodi geometrici.

4. Stabilita la possibilità teorica di determinare parallassi e distanze con osservazioni fotometriche e velocità radiali, occorrerebbe studiare i metodi pratici per applicare le formole (3) e (3") per la determinazione di queste parallassi, che potremo chiamare *parallassi radiali*, dato che il nome di parallassi fotometriche – che in questo caso sarebbe più appropriato perchè è alle osservazioni fotometriche che spetta il contributo maggiore – è già usato per altri metodi. Non essendo però questo lo scopo della presente Nota, ci limiteremo a qualche considerazione d'indole generale.

I due casi considerati, per le stelle e per i corpi del sistema solare, sono sostanzialmente differenti. Per le parallassi stellari occorrono, come abbiamo visto, serie di osservazioni distribuite in un tempo molto lungo, fatte anche a intervalli grandi, per esempio una all'anno o una al mese, e continuate per almeno un secolo; per i corpi del sistema solare occorrono pure numerose ossservazioni, ma condensate in un tempo relativamente breve di qualche diecina di giorni. Il caso stellare potrebbe quindi essere preso in considerazione con un programma in grande, scegliendo un numero notevole di stelle, da osservare con la massima regolarità e coi mezzi più moderni fotometricamente e spettrograficamente per uno o più secoli. Nessuna difficoltà tecnica si oppone a un tale programma, e il solo inconveniente è quello della durata dell'impresa, che non può dare i frutti a chi la organizza e la inizia. Il caso planetario presenta invece una difficoltà notevole per il fatto che si osservano dei corpi che non emanano luce propria e costante, come è supposto in questo metodo, ma luce riflessa, e quindi una grande parte della loro variazione di luce è dovuta al fenomeno delle fasi. L'effetto di questo fenomeno potrebbe venire eliminato osservando il corpo in esame in posizioni per quanto possibile simmetriche rispetto al Sole e alla Terra, ma è certo che un accurato esame delle condizioni di illuminazione del corpo durante il periodo di osservazione sarebbe indispensabile.

Ad ogni modo però è evidente che sia nell'uno che nell'altro caso si ha un metodo indipendente da quelli fin qui usati, senza ipotesi accessorie, e abbastanza semplice, in particolare senza necessità di impegnare in collaborazione diversi Istituti, tanto più che il numero delle determinazioni di

velocità radiali può essere limitato ad una frazione del numero delle osservazioni fotometriche, per esempio ad un decimo, per la ragione già detta sulla precisione delle due misure. Se infine si considera che il maggior lavoro deve essere speso per garantire al risultato fotometrico la necessaria precisione, e che non è escluso che nel prossimo futuro la precisione di queste osservazioni venga aumentata sensibilmente, con che il predetto lavoro verrebbe corrispondentemente ridotto, è giustificata la speranza che questi metodi divengano in un avvenire molto prossimo veramente utili ed efficaci.

Elettrochimica. — *Sul passaggio dell'idrogeno catodico attraverso sottili strati metallici.* Nota (*) del Corrisp. O. Scarpa.

1. – Dovendo compiere delle ricerche sul passaggio dell'idrogeno catodico, alla temperatura ordinaria, attraverso sottili strati metallici, troppo sottili per poter con essi formare dei setti, ho pensato di costituirli con depositi elettrolitici del metallo in esame su lamine di platino sufficientemente sottili per essere permeabili all'idrogeno (1), e sufficientemente resistenti per servire da supporto. Facendo sviluppare l'idrogeno catodico sulla superficie ricoperta dal metallo in esame determinando i valori degli stati di polarizzazione successivamente acquistati dalla opposta superficie del platino, appare infatti possibile dedurre la grandezza della ricercata diffondibilità, tenendo conto di quella attraverso al supporto. Noto che la trattazione matematica del problema presenta una certa analogia con quella del flusso di calore attraverso una parete formata con due strati sovrapposti aventi differente coefficiente di trasmissione.

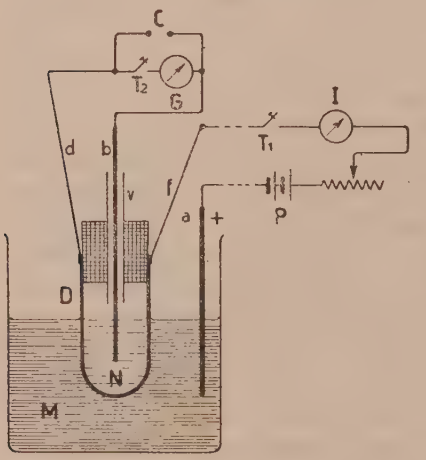


Fig. 1.

La disposizione sperimentale è schematicamente indicata nella figura 1. Un ditale cilindrico di platino, avente lo spessore di 0,1 mm. è parzialmente immerso nel liquido **M**, che per effetto di elettrolisi sviluppa idrogeno sulla superficie esterna del ditale. L'interno contiene una soluzione diluita di acido solforico, oppure di idrossido di potassio, nella quale pesca un elettrodo di

(*) Presentata nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) Per non complicare i fenomeni non ho creduto conveniente impiegare lamine di ferro, metallo di cui è nota la grande permeabilità rispetto all'idrogeno catodico, nè lamine di palladio, non avendone a disposizione in sufficiente quantità.

platino (***b***) oppure il sifone di un elettrodo normale, in modo da poter determinare il valore della forza elettromotrice che, in seguito alla diffusione dell'idrogeno attraverso alla parete del ditale, si deve sviluppare fra la sua superficie interna e ***b***, e determinarne la variazione nel tempo. **G** è un galvanometro aperiodico avente la resistenza interna: 1330 Ohm e la sensibilità: $3,5 \cdot 10^{-9}$ Amp. per divisione della scala (cioè $4,6 \cdot 10^{-6}$ Volt). Per alcune esperienze di controllo **G** venne sostituito con un elettrometro capillare avente la sensibilità di 10^{-4} Volt per divisione. Nelle esperienze preliminari ho adoperato come liquido esterno (**M**) una soluzione decinormale di acido solforico (di eguale concentrazione della interna (**N**). Ho così potuto rilevare il diagramma di figura 2 nel quale è pur indicato il valore della forza elettromotrice parassita esistente fra ***b*** e **D** prima della chiusura dell'interruttore T_1, la quale si stabilizza dopo aver lasciato per alcune ore chiuso il corto circuito **C** fra ***b*** e **D** ma aperto l'interruttore T_1. Noto che prima di ogni prova le superfici del platino venivano accuratamente pulite con opportuni reagenti nonchè arroventate, e che il ditale non era mai stato impiegato per altre operazioni. Dopo circa 5 secondi di elettrolisi con corrente 0,01 Amp/cm² la f. e. m. fra ***b*** e **D** raggiunse un massimo valore e nella prima prova si stabilizzò dopo circa 60 secondi. La polarità di ***b*** rispetto al ditale fu positiva. Dopo aver riarroventato il ditale ho posto nel recipiente **M** una soluzione di solfato rameico, acida per acido solforico, onde ramarne la superficie esterna, ma appena chiuso T_1 mi sono accorto che avveniva un brusco aumento della forza elettromotrice fra ***b*** e la superficie interna del ditale, in modo da raggiungere rapidamente un valore, massimo, per poi diminuire mentre continuava a depositarsi il rame sulla superficie esterna di **D**. Nei diagrammi 1 e 3 di fig. 3, corrispondenti alla massima e alla minima densità di corrente impiegata, sono pur indicati i valori delle f. e. m. parassite (diverse da caso a caso).

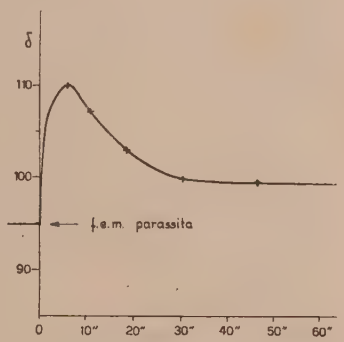


Fig. 2.

Questi risultati devono venir messi in relazione con quanto osservò Lippmann nel corso delle note esperienze con l'elettrometro capillare da lui ideato. Avendo egli immerso un ordinario crogiolo di platino in una soluzione di solfato rameico interponendo l'elettrometro capillare fra il crogiolo, contenente dell'acido solforico, e un filo di platino in questo immerso, egli osservò infatti una brusca deviazione del menisco dell'elettrometro allorquando faceva percorrere da una corrente elettrica un circuito comprendente il crogiolo, il solfato rameico e un elettrodo in questo immerso, in modo da far depositare del rame sulla superficie esterna del crogiolo.

Poichè tanto il fenomeno osservato dal Lippmann quanto quello da me riscontrato hanno notevole interesse dal punto di vista elettrochimico, poichè potrebbero essere assunti come prova di una scarica di idrogenioni sulla

superficie del platino, precedente quella degli ioni rame, e poichè hanno interesse dal punto di vista fisico [2] in quanto indicherebbero la grande velocità con cui, in determinate condizioni, l'idrogeno catodico può diffondersi attraverso al platino, ho creduto interessante (e necessario ai fini delle successive ricerche) approfondirne lo studio [3].

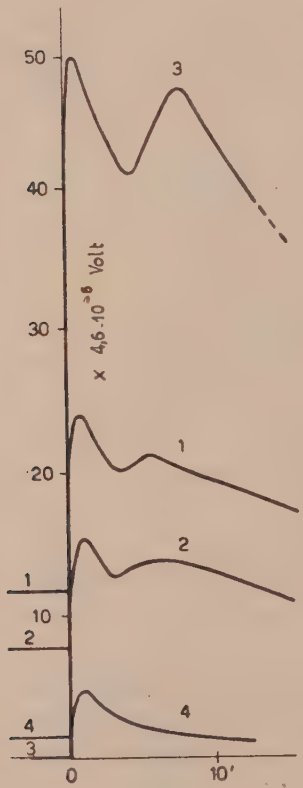


Fig. 3.

2. – Le esperienze eseguite con il ditale di platino impiegando come elettrolita per la ramatura del crogiolo oltre alle soluzioni di solfato rameico (sempre acide per acido solforico libero), soluzioni di cuprocianuro potassico e di sali cuproammoniacali, diedero per risultato i diagrammi 2 e 4 riprodotti nella figura 3 i quali pur indicano i valori delle forze elettromotrici parassite esistenti prima della chiusura dell'interruttore T_1. Di essi il N°. 2 si riferisce alle soluzioni di cuprocianuro potassico e il 4 a quelle del sale cuproammoniacale.

Noto che nel caso delle soluzioni possedenti pH minori di 7 la forza elettromotrice sviluppata fra ***b*** e **D** assume valori decrescenti al crescere della durata della elettrolisi fatto che si dovrebbe ascrivere (nella ipotesi sopraesposta) alla piccolissima permeabilità dello straterello di rame rispetto all'idrogeno; ragione per cui la piccola quantità di idrogenioni scaricata sul platino nel primo tempo dell'elettrolisi e arrivata nell'interno di **D** si esaurirebbe più o meno lentamente quando T_1 è chiuso. Ma gli analoghi andamenti dei diagrammi ottenuti impiegando per la ramatura le soluzioni di sali complessi aventi pH assai superiore a 7 indicano che il fenomeno è molto complesso. Esiste inoltre una grave incognita sulle cause per cui i tre primi diagrammi mostrano l'esistenza di un valor massimo della f. e. m. susseguente al primo.

Alcune irregolarità nei risultati sperimentali e il conseguente dubbio che le cause dei fenomeni fossero ben diverse dalle presupposte, mi indus-

(2) La possibilità di questo fatto si deve mettere in relazione con le teorie riguardanti lo stato di parziale ionizzazione posseduto dagli atomi dell'idrogeno assorbito dai metalli, ai quali ioni (protoni) dovrebbe corrispondere una grande mobilità.

(3) Nelle più recenti esperienze ho usufruito dell'accuratissima opera dell'ing. Giulio Colombo che pubblicamente ringrazio. A tal proposito si è trovato che per ottenere risultati concludenti è necessario provvedere a un isolamento elettrico estremamente accurato di tutto il sistema; fatto che rende assai delicata l'esecuzione delle misure, benchè esse sieno *apparentemente* di facile esecuzione.

sero a ripetere le prove adoperando un altro ditale di platino e, come aveva fatto Lippmann, un ordinario crogiolo di platino, nonchè altri crogioli, dello stesso metallo di cui, alcuni come i due ditali, nuovi di zecca.

Risultò che mentre operando con due crogioli (spessore 0,2 mm) oltre che con i due ditali i fenomeni si riproducevano assumendo analogo andamento, operando con altri crogioli, pur aventi eguali spessori, i sopracitati fenomeni non avvenivano.

3. – La spiegazione di tali fatti risultò mettendoli in relazione con altri riscontrati da alcuni autori nelle esperienze sulla diffusione dell'idrogeno attraverso a lamine di platino (4).

Mentre le prime esperienze, effettuate sotto la direzione di Helmholtz (5) misurando lo stato di polarizzazione assunto dalla superficie di sottili lamine di platino opposta a quella su cui si faceva avvenire lo sviluppo dell'idrogeno catodico avevano condotto a ritenere notevole diffondibilità, le esperienze eseguite successivamente sotto la direzione di W. Nernst (6) condussero a ritenere che il passaggio dell'idrogeno attraverso a sottili lamine di platino avviene per effetto di lacune del metallo.

L'esame di questi risultati, e di quelli ottenuti nel seguito, mostrarono che la diffusione dell'idrogeno catodico può bensì avvenire attraverso a lamine di platino indipendentemente da difetti del metallo, ma con modalità essenzialmente collegate con la sua struttura e con lo stato della superficie sulla quale il gas si sviluppa. Fatti che hanno analogia con quanto avviene per il palladio (7).

Aggiungo che lacune o forellini microscopici simili a quelli scoperti da Walter Nernst furono ritrovati dall'ing. Giuseppe Bianchi in sottili lamine di platino nel corso delle esperienze che gli consigliai di eseguire (8), e che il noto metallografo Mc Bain osservando al microscopio con luce molto intensa e inclinata le superfici speculari di oggetti di platino, trovò che sono rugose e posseggono numerosi forellini (9).

Venne quindi il dubbio che la causa della incostanza dei miei risultati sperimentali, nonchè del fenomeno osservato dal Lippmann, derivasse, malgrado il differente metodo di lavorazione del metallo e la accurata rifinitura, da forellini invisibili alle più accurate ispezioni, i quali mettessero, in un primo tempo, in diretto contatto il liquido esterno con quello interno ai ditali o ai crogioli con i quali il fenomeno era osservabile. Queste lacune ver-

(4) Per la bibliografia vedere nella Nota dell'ing. G. Bianchi in questi «Atti», vol. IV, febbraio 1948.

(5) «Wiss. Abb.», vol. I, p. 835.

(6) «Göttinger Nach.», 1902, p. 146.

(7) Per quanto riguarda il Palladio rinvio alla estesa Nota di DONALD P. SMITH e G. J. DERGA in «The Journal of Am. Chem. Soc.», vol. LVI, 1934, p. 2513.

(8) Vedi nella Nota citata.

(9) Vedere le interessanti micrografie nel trattato di M. BAIN, *The Sorption of Gases by solids*. London, 1932, p. 279 e sg.

rebbero poi ricoperte dallo straterello di rame depositato sulla superficie esterna del platino. E infatti, se ciò fosse avvenuto, sarebbe possibile dar ragione, almeno nelle linee generali, dei fenomeni osservati [10].

Per dirimere la questione vennero eseguite le seguenti prove.

Dopo ramata per via elettrolitica la superficie esterna dei due ditali questi vennero parzialmente riempiti con acido nitrico, il quale, ove i forellini fossero esistiti, avrebbe dovuto pian piano attraversarne la parete e intaccare la ramatura esterna svelando, con le conseguenti macchioline, la ubicazione dei fori, rendendone poi possibile l'osservazione microscopica.

Fenomeno che si verificò con grande evidenza malgrado che i due ditali avessero fin dall'origine le superfici ben speculari, essendo nuovi di zecca.

Dopo di che, per contro prova, usufruendo del fatto che uno dei ditali presentava un solo forellino nel fondo, questo venne internamente ricoperto con uno strato di mastice isolante dello spessore di circa mezzo centimetro in modo da eliminarne l'azione nelle successive esperienze di diffusione dell'idrogeno. *Operando in tali condizioni, più non si presentarono i fenomeni in discussione.*

Conclusioni. — 1° Le conclusioni a cui arrivò W. Nernst nello studio della diffusione dell'idrogeno attraverso a lamine di platino vengono confermate ed estese al caso di recipienti di platino con pareti sottili, malgrado il differente metodo impiegato per la lavorazione del metallo (invece di semplice laminazione) e la accurata rifinitura. Di tale fatto, benchè riscontrato soltanto in una percentuale di questi recipienti, si deve tener gran conto qualora si debbano adoperare per particolari esperienze.

2° Le cause del singolare fenomeno osservato dal Lippmann e degli analoghi da me riscontrati, si debbono ritenere ben differenti dalle presupposte. Esse derivano da lacune del metallo analoghe a quelle scoperte da Nernst in lamine di platino [11].

(10) Lo studio del comportamento elettrochimico dei setti metallici forati ha dato luogo a numerose esperienze (« Electrochem. Zeit. », anni 1902–1903). La trattazione teorica del problema è complicata dal fatto per cui è necessario tener conto non soltanto degli stati di polarizzazione delle due faccie del setto, ma dell'addensamento della corrente nei fori, la cui azione diviene assai notevole quando hanno ampiezza microscopica.

(11) Per confrontare i risultati di Lippmann con quelli sopraesposti si deve tener presente che la sensibilità voltometrica del galvanometro da me impiegato è più di 10 volte maggiore di quella dei più sensibili elettrometri capillari.

I risultati delle esperienze riguardanti l'oggetto principale della attuale Nota verranno successivamente pubblicati.

Fisica. — *Sistemi isolati, leggi di forze elementari, principio di azione e reazione.* Nota di E. PERUCCA e L. A. RADICATI, presentata (*) dal Socio E. PERUCCA.

§ 1. – In un sistema meccanicamente isolato, cioè non soggetto a forze esterne, vale il teorema della conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto. Questo teorema equivale a stabilire che il sistema delle forze interne è un sistema equilibrato: è nulla, ad ogni istante, la risultante di tutte le forze interne e la risultante dei momenti di tutte le forze interne rispetto a un punto qualunque.

§ 2. – Nella dinamica classica dei sistemi di punti materiali le precedenti conclusioni si ottengono dal principio newtoniano di azione e reazione relativo a due punti materiali A , B: se A agisce su B , B reagisce du A con una forza uguale e opposta; azione e reazione giacciono sulla congiungente A B, cioè non costituiscono coppia.

Dal caso di due punti A , B si passa a un sistema di n punti materiali A , B , C , $\cdots$, mutuamente agenti; tra due punti qualunque del sistema sono attive forze mutue soddisfacenti al principio di azione e reazione; sicchè il sistema delle forze interne risulta un sistema equilibrato perchè costituito da forze a due a due uguali e opposte e dotate della stessa retta di azione (1).

Seguendo il metodo di estensione consueto nelle leggi fisiche, si ammette che in un sistema isolato qualsiasi valga la proprietà indicata in § 1, e cioè che le forze interne costituiscono un sistema equilibrato.

L'esperienza conferma in ogni caso la validità di questo teorema al punto che, inversamente, tale teorema può venire accettato come definizione di « sistema isolato ».

§ 3. – La ricerca di leggi elementari per le forze (di gravitazione, elettrostatiche, elettromagnetiche, elettrodinamiche, ecc.) si può considerare come procedimento inverso a quello indicato in § 2.

In molti casi è possibile suddividere il sistema in parti elementari, indipendenti, ciascuna delle quali ha simmetria sferica, o, se si vuole, è « isotropa », nei riguardi dell'azione che essa esercita sulle altre parti del sistema o che da queste ultime subisce.

In questi casi le forze mutue agenti tra due parti elementari qualunque del sistema soddisfano al principio newtoniano di azione e reazione; ciascuna

(*) Nella seduta del 9 giugno 1948

(1) V. per esempio G. BRUHAT, *Mécanique*, Masson, p. 45 (1934); U. CISOTTI, *Meccanica razionale*, Tamburini, p. 221 (1942); E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, Cambridge, University Press, p. 28 (1927).

coppia di particelle del sistema può venire considerata come un sistema isolato.

In tali casi si hanno leggi elementari delle forze mutue in accordo col principio di azione e reazione newtoniano. Così è per le forze di gravitazione e per le forze elettrostatiche; così è anche per le forze magnetostatiche quando si accetti il concetto di massa magnetica coulombiana.

Ma in altri casi la divisione del sistema in parti elementari agenti isotropicamente o addirittura in parti elementari indipendenti non è possibile per motivi concettuali. In tali casi talvolta manca la legge elementare (esempio: il caso della resistenza del mezzo), tal'altra è bensì possibile enunciare una legge elementare, ma allora non vi è più alcuna necessità che essa soddisfi al principio di azione e reazione.

Questo avviene per la legge elementare elettrodinamica perchè il sistema elementare di due elementi di corrente elettrica cui essa legge si riferisce è concettualmente irrealizzabile come sistema isolato.

Questo avviene analogamente per le due leggi elementari elettromagnetiche di Laplace e di Biot, che regolano le forze mutue agenti tra un elemento di corrente elettrica e un polo magnetico; perchè un tale sistema elementare è anch'esso concettualmente irrealizzabile come sistema isolato.

Non guasta che la legge elementare elettrodinamica di Ampère soddisfi al principio newtoniano di azione e reazione, ma si tenga presente che nei casi reali la legge dovrà venire applicata a circuiti completi.

Neanche guasta che le leggi elementari di Laplace e di Biot non rispettino il principio di azione e reazione (le forze sancite da queste leggi formano coppia), perchè nei casi reali le leggi elementari di Laplace e Biot vanno applicate a circuiti completi.

§ 4. È probabile che implicitamente Einstein e Infeld volessero riferirsi a questa anomalia delle leggi elementari elettromagnetiche nei riguardi del principio di azione e reazione in quelle pagine del loro recente libro [2], ove l'esperienza di Oersted è presentata come primo esempio nella fisica di una forza non « semplice », bensì normale al vettore congiungente i due elementi del sistema mutuamente agenti.

§ 5. – Il più caratteristico esempio di forza elementare insoddisfacente dal punto di vista del principio di azione e reazione è dato dalla forza di Lorentz:

$$\vec{f} = q \cdot (\vec{u} \wedge \vec{B})$$

cui è soggetta una carica q (in valore e segno, per esempio un elettrone), dotata di velocità $\vec{u}$ in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$.

(2) A. Einstein e L. Infeld, *The evolution of Physics*, traduz. italiana, G. Einaudi, pp. 65, 66, 98, 99 (1948).

Ove è, infatti, la reazione? Soddisfa essa al principio newtoniano di azione e reazione?

La reazione è evidentemente applicata al sistema (magneti, correnti elettriche) creante il campo $\vec{B}$.

Ma si vede facilmente che il principio di azione e reazione non è generalmente soddisfatto; nulla di strano perchè il sistema « elettrone in moto – magnete creante il campo $\vec{B}$ » non è un sistema isolato; perchè lo sia occorre considerare anche le correnti di spostamento che, fluendo attorno all'elettrone, rendono chiusa la corrente di convezione costituita dall'elettrone in moto.

§ 6. – In conclusione, nei casi ove si possono sollevare dubbi sulla validità del principio di azione e reazione:

1° La simmetria delle parti elementari, in cui può scindersi il sistema non è sferica; ciascuna parte elementare non è « isotropa »: dipolo magnetico, elemento di corrente elettrica, elettrone in moto.

Sicchè, non vi è più necessità di limitarsi ad azioni centrali di pura attrazione o repulsione tra le parti, come sono le forze « semplici », cui Helmholtz pensava di ricondurre ogni fenomeno fisico.

L'azione mutua tra due porzioni elementari del sistema può essere, in generale, più complessa, cioè, essere una forza e una coppia su ciascuna delle due particelle elementari.

2° Il sistema di forze complessivo (due forze e due coppie) deve obbedire al principio di azione e reazione nel senso di costituire un sistema totale equilibrato di forze, soltanto nel caso che il sistema elementare, costituito dalle due porzioni considerate mutuamente agenti, è un sistema isolato.

Ma, se il sistema non è isolato, come è il caso per l'azione elettromagnetica elementare tra polo ed elemento di corrente, per la forza di Lorentz e, infine, per l'azione tra elettrone irraggiante e radiazione emessa, non si pretenda che il principio di azione e reazione sia rispettato.

In questi casi ciò che a noi pare non opportuno è l'accettare una estensione del principio di azione e reazione [3] immaginando che esso sia soddisfatto da un sistema di forze non equilibrato; in particolare, sia soddisfatto dalla coppia di forze costituita dall'azione di un elemento di corrente su di un polo magnetico e viceversa.

(3) Per esempio: E. PERSICO, *Introduzione alla Fisica matematica*, Zanichelli, p. 255 (1941).

Fisica. — *Nuove proprietà dei raddrizzatori a strato di sbarramento.* Nota di E. Perucca e F. Demichelis, presentata(*) dal Socio E. Perucca.

§ 1. – È noto che i raddrizzatori a contatto esteso, detti anche a strato di sbarramento, sono costituiti da una « catena » del tipo seguente: « metallo–semiconduttore–strato sottile isolante–metallo ».

Si ritiene attualmente che ciò valga anche per i numerosi tipi noti di raddrizzatori a punta e cristallo.

I tipi di raddrizzatori a contatto esteso più largamente usati in pratica sono: il raddrizzatore a ossidulo di rame (rame–piombo o grafite o argento–ossidulo di rame con eccesso di ossigeno Cu_2O; O–ossidulo di rame puro Cu_2O–

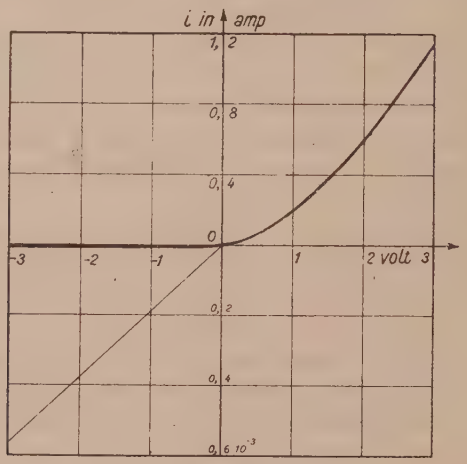


Fig. 1.

rame) e il raddrizzatore al selenio (piombo–ferro–selenio–strato di sbarramento–lega di stagno e cadmio–piombo).

In entrambi i casi il raddrizzatore agisce, a temperatura ambiente, per un tempo indeterminato che, teoricamente, può assumersi infinito. La caratteristica del raddrizzatore, cioè la dipendenza dell'intensità di corrente che l'attraversa dalla differenza di potenziale applicata è rappresentata in fig. 1 (valori relativi a un raddrizzatore all'ossidulo di rame; area $\approx$ 0,80 cm^2).

Diciamo $K = \frac{i_f}{i_d}$ il rapporto tra i valori delle intensità di corrente nel senso di facile passaggio i_f e nel senso inverso i_d sotto tensioni uguali e

(*) Nella seduta del 9 giugno 1948.

opposte. Per $K = 1$ non si ha raddrizzamento; nelle condizioni normali di funzionamento di un raddrizzatore a ossidulo di rame è generalmente $K = 1000 \div 2000$. Queste condizioni presuppongono che la temperatura del raddrizzatore oltrepassi quella consueta ambiente di qualche decina di °C al massimo; per esempio sia di $45 \div 50$ °C al massimo.

Al crescere della temperatura del raddrizzatore, K diminuisce fino ad avvicinarsi ad 1 per temperature di ≈ 250 °C.

Secondo Grondahl [1] possono essere tollerate temperature prossime agli 80 °C, ma quando si desidera che il raddrizzatore abbia lunga vita con alta densità di corrente, la temperatura di regime non deve superare ≈ 40 °C.

Le batterie di raddrizzatori devono perciò essere dotate di mezzi di dispersione del calore di Joule sviluppato al passaggio della corrente in modo che la loro temperatura di esercizio non superi tale valore.

§ 2. – Come e perchè il rapporto K precedentemente definito diminuisce con l'aumentare della temperatura?

Come avviene che tale diminuzione di K sia in parte reversibile e in parte irreversibile?

La diminuzione irreversibile di K, quindi del raddrizzamento, costituisce un deterioramento inevitabile e irrimediabile?

Posti tali problemi in forma così generale, sarebbe stata eccessiva presunzione pretendere di trovarne la soluzione, mentre potenti laboratori di ricerca affiancati a poderose industrie (ad esempio quelli della Westinghouse) si sono dedicati largamente allo studio dei raddrizzatori [2] e mentre sono ancor vive le difficoltà che si incontrano nel tentare una interpretazione teorica soddisfacente del fenomeno del raddrizzamento.

§ 3. – Tuttavia da uno studio sistematico del comportamento di raddrizzatori a ossidulo di rame (area $\approx 0{,}80$ cm^2) con la temperatura (fino a ≈ 200 °C) sono scaturiti taluni fatti sperimentali che non risultano finora descritti e che sembrano meritevoli di segnalazione.

Eccoli in breve.

1° Fissata la tensione applicata al raddrizzatore, l'intensità di corrente, *nel senso di facile passaggio*, è funzione della temperatura t secondo il fascio di caratteristiche di fig. 2, è parametro la tensione applicata cui sono stati dati valori da 0,5 a 3 volt.

Su ogni curva si nota un *massimo della intensità di corrente*; questo si ottiene per una « temperatura critica » t_c decrescente al crescere della tensione applicata.

(1) L. O. Grondahl, *The Copper-Cuprous Oxide Rectifier and Protoelectric Cell.* « Review of Modern Physics », 5, p. 141, 1933.

(2) V. anche il recente libro di H. C. Torrey e C. A. Whitmer, *Crystal Rectifiers Mc Graw-Hill.* Parte I, 1948, sebbene vi sia ampiamente sviluppato soltanto lo studio dei raddrizzatori a punta e cristallo.

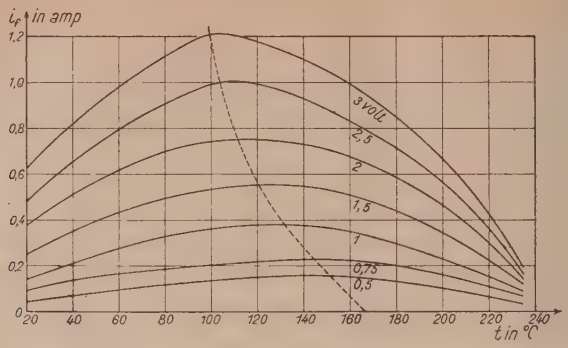


Fig. 2.

Non si può assicurare che la corrente attraverso il raddrizzatore durante la misura non alteri per nulla la temperatura di quest'ultimo, sebbene questa alterazione, con conveniente procedimento della misura, si riduca entro limiti così ristretti, da non infirmare più i risultati osservati. V. anche § 4.

2° Il fascio analogo di caratteristiche, nel senso di difficile passaggio è dato in fig. 3.

L'intensità di corrente è sempre funzione crescente della temperatura; non vi è alcuna traccia di massimo.

3° Il valore di $K = \frac{i_f}{i_d}$ diminuisce con l'aumento della temperatura secondo i diagrammi di fig. 4.

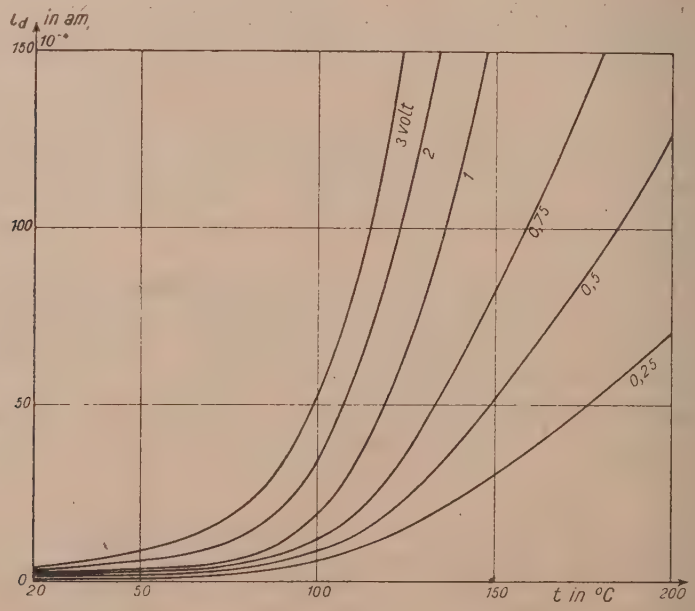


Fig. 3.

4° I fatti sperimentali su indicati riguardano variazioni delle proprietà del raddrizzatore al crescere della temperatura a cui viene successivamente portato.

Se dopo tale trattamento termico il raddrizzatore viene riportato alla temperatura ambiente, esso riprende in modo praticamente completo le sue proprietà precedenti soltanto se la temperatura massima a cui è stato portato *non raggiunge la temperatura* t_c su indicata, che per questa ragione è stata chiamata *temperatura critica.*

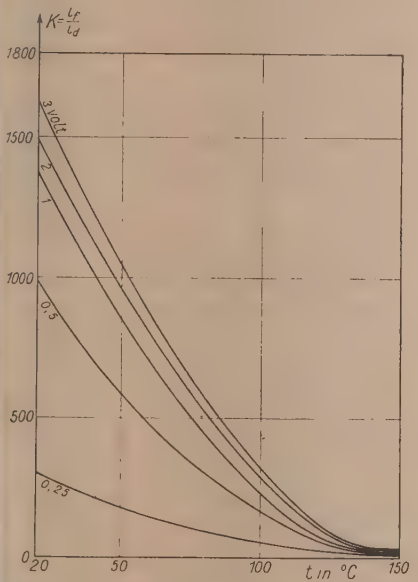


Fig. 4.

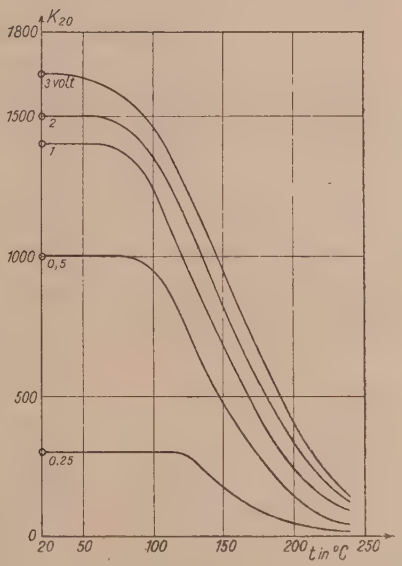


Fig. 5.

Questo fatto si vede ad esempio nel diagramma di fig. 5: sull'asse delle ordinate, in corrispondenza dell'ascissa 20 °C, sono portati i valori K_{20} di K presentati dal raddrizzatore all'inizio dell'esperienza in funzione delle tensioni applicate (da ± 0,25 volt a ± 3 volt). Sull'asse delle ascisse di tale diagramma sono portate le temperature massime a cui fu portato il raddrizzatore e tenuto poche decine di minuti indi raffreddato fino a 20 °C. L'ordinata della curva in corrispondenza di tale temperatura massima dà il valore di K_{20} al termine dell'esperienza.

Se la curva fosse una parallela all'asse delle ascisse, il raddrizzatore non avrebbe alterate le sue proprietà raddrizzanti in conseguenza del riscaldamento subìto.

Ma se, ad esempio, per il valore 0,5 volt del parametro la curva dà in corrispondenza di t_{max} = 200 °C il valore K_{20} = 150, ciò significa che il raddrizzatore sperimentato, il quale inizialmente a 20 °C sotto ± 0,5 volt dava un raddrizzamento corrispondente al valore K_{20} = 1000, dopo riscaldamento

a 200 °C, indi raffreddato a 20 °C, presenta ormai soltanto il raddrizzamento corrispondente al valore $K_{20} = 150$.

Dal diagramma di fig. 5 risulta che il raddrizzamento viene distrutto completamente soltanto a temperature superiori a ≈ 250 °C, ma risulta anche che solo per il campo di valori di t_{max} e delle tensioni applicate, limitato alle parti rettilinee orizzontali delle curve il raddrizzatore conserva le sue caratteristiche anche dopo essere stato assoggettato a carico, quindi a conseguente riscaldamento.

L'irreversibilità nasce in modo relativamente improvviso alla temperatura per cui la curva comincia bruscamente a discendere.

§ 4. – La determinazione dello spessore dello strato di sbarramento ha interessato molto gli studiosi del raddrizzamento.

Alcuni Autori hanno determinato tale spessore dalla misura della capacità dello strato di sbarramento ad alta frequenza (da 60 a 10^6 hertz). Dowling e Place [3] trovarono un valore di 10^{-4} cm; più recenti misure di Waibel (1936) hanno dato un valore di 10^{-3} cm.

Se si applica al raddrizzatore una tensione costante, si osserva che l'intensità di corrente che l'attraversa cresce gradualmente col tempo. Se si attribuisce questa variazione alla contemporanea variazione della temperatura t del raddrizzatore, si può giungere a determinare lo spessore dello strato di sbarramento. Si consideri infatti la corrente i_d e si determini il suo aumento con la durata τ della tensione costante V applicata. Si attribuisca tale aumento al riscaldamento per effetto Joule del solo strato di sbarramento ove è infatti localizzata quasi per intero la tensione applicata. $W = i_d \cdot V \cdot \tau$ è l'energia tutta trasformata in calore di Joule nello strato. Col diagramma di fig. 3 si risale dall'aumento osservato di i_d alla corrispondente variazione di temperatura Δt dello strato di sbarramento stesso. Assunti per il calore specifico del Cu_2O il valore $c = 0{,}1146$ cal/gr$_m$. °C, e per la massa specifica del Cu_2O il valore $\mu = 5{,}88$ gr$_m$/cm^3, dal valore di Δt e dall'energia calorifica $\frac{i_d \cdot V \cdot \tau}{J}$ dovuta all'effetto Joule si risale al volume dello strato di sbarramento, e infine, nota l'area del raddrizzatore, si perviene al valore dello spessore h di tale strato.

Si sono ottenuti come valori dello spessore dello strato di sbarramento, per esperienze su vari raddrizzatori, valori $h = (2{,}0 \div 4{,}1) \cdot 10^{-4}$ cm. Questi valori si inseriscono ottimamente tra quelli su indicati.

§ 5. – Teorie sul raddrizzamento per strato di sbarramento sono state date da Wilson (1932), Nordheim (1932), Frenkel e Joffé (1932) e più recentemente da Mott (1939) [4].

Queste teorie ammettono che lo strato di sbarramento nel raddrizzatore a ossidulo di rame sia Cu_2O « puro », cioè esente da ossigeno, mentre il semiconduttore è ossidulo di rame con eccesso di ossigeno Cu_2O; O.

(3) L. O. Grondahl, lav. cit.

Esse interpretano soddisfacentemente i dati sperimentali e anche la loro dipendenza dalla temperatura, d'accordo con quanto osservato da Grondahl (v. lavoro citato, fig. 13 per 2 volt e per temperature fino a 80 °C), ma solo nei limiti delle variazioni reversibili delle proprietà del raddrizzatore con la temperatura.

Secondo Mott (4), ad esempio, le resistenze nel senso di facile passaggio r_f e nel senso di difficile passaggio r_d variano entrambe esponenzialmente con la temperatura e r_d molto più rapidamente di r_f. È quello che risulta anche dai diagrammi che riassumono le esperienze su descritte.

Ma se si giunge alle temperature per cui si inizia il deterioramento del raddrizzatore, le teorie precedenti non sono più sufficienti; in esse non è stato fatto posto a fenomeni irreversibili.

E questi sono almeno due:

diffusione dell'ossigeno che dal semiconduttore cerchi di migrare verso lo strato di sbarramento inquinandolo e diminuendone l'efficacia.

reazione dell'eventuale ossigeno in eccesso giunto a contatto col rame-padre in modo da formare Cu_2O e ridare efficacia allo strato di sbarramento.

Ma, mentre la dipendenza della diffusione dalla temperatura può ritenersi generalmente nota, e quindi valida anche per l'ossidulo di rame, non sono a nostra conoscenza dati sicuri sulla dipendenza della velocità di reazione $Cu_2O + O \rightarrow Cu_2O$ dalla temperatura nell'intervallo di valori di questa ($20 \div 250$ °C) che ci interessa.

Ci si limita quindi alla sola segnalazione dei fatti sperimentali rinunciando per ora a un loro inquadramento teorico.

Ringraziamo vivamente la Società Westinghouse che ci ha offerto i numerosi raddrizzatori necessari alle esperienze.

Geologia. — *I fenomeni ed i rapporti delle formazioni simiche nelle litosfere planetarie.* Nota (*) del Socio F. Sacco.

In due Note recenti intitolate *Sima e Sial nell'evoluzione planetaria* (« Atti Acc. Sc. Torino », vol. 81–82, 1947) ho cercato di delineare quale sia stata la evoluzione di queste due formazioni, dalla prima fase giovanile, Selenica, di ribollimento magmatico, quale ci è mostrata dalla superficie attuale irrigidita e bucherellata della luna, sino alla fase senile Marziana di alterazione e di spianamento come mostra ora la superficie del pianeta Marte.

Nella presente Nota intendo indicare i rapporti esistenti tra le formazioni simiche e quelle loro connesse.

Tali rapporti possono essere i seguenti:

(4) N. F. Mott, *The theory of crystal rectifiers*. « Proceedings of the Royal Society of London », A, *171*, p. 27, 1939.

(*) Presentata nella seduta del 9 giugno 1948.

I) La formazione sialica rigida, per lo più costituita di rocce granitoidi (L. S.) o altrimenti cristalline sovraincombe direttamente alla formazione simica, fluida e calda, come generalmente si verifica nei cosidetti Massicci cristallini continentali della superficie terrestre (Vedi aree quadrettate fig. 2 della Nota sovraindicata *Sima–Sial* del 1947).

In tale caso, quando per i movimenti diastrofici che si verificano talora nella litosfera terrestre, tale formazione sialica è fratturata, se tali fratture sono tanto profonde da raggiungere la sottostante zona simica, il materiale simico liquido caldo, fluidissimo, per le enormi pressioni che riceve da ogni parte, è obligato a penetrare in tali fessure sino a fuoruscirne in alto e quivi espandersi largamente consolidandosi poi a costituire grandi piani compatti basaltici.

È il caso dei vasti Altipiani, le famose *Ambe* dell'Abissinia e dell'Africa Orientale in generale.

II) Formazioni simiche–basiche ancora fluide, s'intercalano a depositi argillosi delle fosse oceaniche o delle regioni abissali.

Allora nei movimenti diastrofici, in causa di tali formazioni plastiche, si possono originare delle grandiose onde quasi concentriche di corrugamento, come quelle dell'Oceano Pacifico.

In tal caso il materiale simico può venire iniettato fra gli argilloscisti in forma laccolitica, come negli argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino Settentrionale e nella zona dei calcescisti o *Schistes lustrés* con Pietre verdi di età mesozoica delle Alpi occidentali.

III) Le formazioni simiche si sviluppano sino alla superficie degli astri planetari, rimanendo così, libere, scoperte e separate anche orizzontalmente dalle zone sialiche, come nella superficie lunare, dove le aree simiche brunastre basaltiche (cioè le *piazze* o *maria* di Galileo) sono più o meno ben distinte dalle aree sialiche biancastre o *terrae* del Galileo stesso. Tali formazioni simiche lunari, presentano superficialmente svariati corrugamenti ondulati (per raffreddamento e contrazione). (Vedi carta selenologica dell'*Essai schématique de Sélénologie*, F. Sacco, 1907).

Queste rughe sono generalmente allineate in direzione meridiana, quasi fossero in qualche relazione con la rotazione dell'astro; ma altre sono disposte in senso diverso, in rapporto con gli ostacoli presentati al loro corrugamento dalle più vicine zone rigide sialiche.

Alcune altre sono disposte ad archi o collane concentriche, come quelle del *Mare Imbrium* tra i cosidetti «Monti Carpazi» e il *Sinus Iridum* e sulla terra come gli archi delle Aleutine e delle Antille, ecc.

Geologia e mineralogia. — *Il Molibdeno del Monte Bianco.* Nota (*) del Socio F. Sacco.

Nello scorso anno, dopo aver ricevuto in esame alcuni campioni di protogino con spalmature di molibdenite, fui invitato a dare un parere sulla convenienza e modalità di aprire una miniera per ricerche di tale, prezioso minerale nella regione del Monte Bianco, sopra Courmajeur.

Recatomi sul luogo, nel settembre 1947, vi constatai subito che detti campioni molibdeniferi non erano stati tratti dalla roccia in posto, ma raccolti al fondo di un profondo incasso, eseguito per basamento di un pilone della funivia Courmajeur – Mont Frety, che sale al Rifugio Torino, del C. A. I.

Analoghi massi protoginici con molibdenite, si trovano sparsi lungo la strada che sale da Courmajeur al Col Ferret, al confine italo–svizzero, giacendo sopra gli scisti liasici che stanno, in sinclinale fra il Monte Bianco e il Monte « Le Saxe ».

Tali massi sono d'origine franoidi–morenica, derivando dal vicino gruppo del Bianco. Quindi, salvo chè si volesse andarli a raccogliere in certi valloni e luoghi dove essi sono più abbondanti, non è il caso di aprire miniere per ricerche di molibdenite entro la roccia in posto, dove non trovai veri filoni del minerale in questione.

Perciò la società della miniera molibdenifera del Bianco, non ebbe ulteriore sviluppo.

Notisi che il minerale, prevale nel protogino micromero, o aplitico.

Mineralogia. — *I costituenti minori della pollucite elbana e della petalite dell'Elba e di Utö (Svezia)* (*). Nota di G. Carobbi e C. Minguzzi, presentata (**) dal Corrisp. G. Carobbi.

La pollucite e la petalite sono minerali tipici delle pegmatiti. La prima si trova, in Europa nella pegmatite svedese di Varuträsk in masse anche di centinaia di chilogrammi (1) e in piccole quantità nella nostra pegmatite elbana insieme a petalite (2), in America nelle pegmatiti del Maine (3) in

(*) Presentata nella seduta del 9 giugno 1948.

(*) Lavoro eseguito nel Centro di studi per la Geochimica e la Mineralogia del C. N. R. presso l'Istituto di Mineralogia, petrografia e geochimica della Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) P. Quensel, *Mineral of the Varutrask pegmatite.* IV. *Petalite and its alteration product montmorillonite.* « Min. Ab. », *6*, 487 (1937); Idem, XIII. *Pollucite, its vein material and alteration products.* « Min. Ab. », *7*, 335 (1939). Idem, XXXVI. *Further alteration products of pollucite.* « Min. Ab. », *9*, 266 (1946).

(2) A. D'Achiardi, *Mineralogia della Toscana.* Vol. II, 57, Pisa 1872; F. Millosevich, *I 5000 elbani del Museo di Firenze*, *45*, 56, Firenze (1914).

(3) W. E. Richmond e F. A. Gonyer, *On pollucite.* « Amer. Min. », *23*, 783 (1938); H. J. Fraser, *Paragenesis of the Newry pegmatite.* « Amer. Min. », *15*, 349 (1930).

masse trasparenti incolori usate anche come gemma [4] insieme a petalite e anche nel Wyoming e nel S. Dakota, in Africa nella pegmatite di Karibib [5] (Africa del S–O). Masse incolori di petalite, anche da tagliare come gemme, sono state trovate in Australia.

L'accumularsi di questi minerali nelle pegmatiti è dovuto agli speciali caratteri cristallo–chimici del cesio e del litio.

L'ione Cs^{+1} per il suo grande raggio non può imboscarsi e diluirsi nei reticoli degli ordinari minerali delle rocce e perciò si accumula nei residui della cristallizzazione magmatica dando la pollucite che, dopo oltre cento anni dalla sua scoperta (Breithaupt 1846), è ancora l'unico importante minerale di cesio. Il litio, come è stato fatto notare in alcune proposte di uno di noi per un sistema cristallo–chimico degli ioni [6], è un elemento che, per le sue proprietà geochimiche, anticipa il gruppo isomorfogeno del magnesio e può perciò imboscarsi e diluirsi nei minerali delle rocce ferro–magnesiache, invece nelle rocce acide, non trovando sufficienti reticoli di sali ferrosi o di magnesio, si accumula nei residui della cristallizzazione, perciò la petalite è uno dei minerali fondamentali delle pegmatiti granitiche.

La struttura della pollucite è stata studiata, da Strunz [7] che la ritenne cubica e l'assegnò al gruppo O_h^{10} con $a = 13.71$ e una cella contenente $8\,Si_4Al_2O_{12}Cs_2 \cdot H_2O$ e poi da Nàray–Szabò [8] che la considerò tetragonale pseudocubica e appartenente al gruppo D_{4h}^{20} con $a = 13.74$ e con una cella costituita da $16\,CsAlSi_2O_6 \cdot x\,H_2O$.

La questione dell'acqua nella pollucite ha una notevole importanza cristallochimica e poi geochimica.

Secondo Nàray–Szabò la posizione del cesio nel reticolo della pollucite è la stessa di quella occupata dal sodio nel reticolo dell'analcime ($6\,NaAlSi_2O_6 \cdot H_2O$; O_h^{10}; $a = 13.7$) ed in quest'ultimo l'acqua occuperebbe parzialmente le posizioni $\left(o\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\right)$ così si spiegherebbe anche la scomparsa della birifrangenza quando i cristalli vengono scaldati in vapor d'acqua. Non è di questo parere Taylor [9] che nella struttura dell'analcime assegna all'acqua la posizione occupata dal cesio nella pollucite ed al sodio quella che Nàray–Szabò assegna all'acqua.

In verità H. J. Nel [5], in occasione delle sue ricerche sulla pollucite di Karabib (Africa del S–O), riprendendo le idee di Richmond e Gonyer [3], ha

(4) L. J. Spencer, *Pollucite, a new gem stone.* « Gemmologist », *3*, 263 (1934).

(5) H. J. Nel, *Pollucite from Karibib, South West Africa.* « Amer. Min. », *29*, 443 (1944).

(6) G. Carobbi, *Proposte per un sistema cristallochimico degli ioni.* « Atti e Memorie della Accad. di Scienze, Lettere ed Arti di Modena », ser. V, *7* (1947).

(7) H. Strunz, *Die chemische Zusammensetzung von Pollucit.* « Z. für Krystall », *95*, 1 (1936).

(8) St. v. Nàray–Szabò, *Die Struktur des Pollucits* $CsAlSi_2O_6 \cdot xH_2O$. « Z. fur Kristall », *99*, 277 (1938).

(9) W. H. Taylor, *The structure of analcite* ($NaAlSi_2O_6 \cdot H_2O$). « Z. für Kristall », *74*, 1 (1930). Idem, *Note on the structure of analcite and pollucite.* « Z. für Kristall », *99*, 283 (1938).

mostrato che analcime e pollucite possono considerarsi isomorfi e che il numero di ioni Cs^{+1} presenti nella cella elementare delle polluciti è inversamente proporzionale a quello degli ioni sodio ed inoltre che $Cs^{+1} + H_2O$ è costantemente eguale a 16, cioè la diversità geochimica (diversità di raggio) ed il conseguente molto scarso isomorfogenismo fra Cs e Na sarebbero compensati dalla presenza dell'acqua. Contemporaneamente il silicio può essere sostituito dall'alluminio e si ha, secondo Nel, lo schema $AlNa = Si$ e $AlCs = Si + H_2O$ e la seguente formula generale della soluzione solida che costituisce la pollucite:

$$Cs_{16-x}\,Na_{x-y}\,Al_{16-y}\,Si_{32+y}\,O_{96}\,x\,H_2O$$

dove x e $y = 0$ per la pollucite pura e $x = 16$, $y = 0$ per l'analcime.

Qui conviene ricordare che E. Grill [10] nel suo accurato studio sulla pollucite elbana aveva notato, confrontando l'analisi del minerale americano con la sua, che la percentuale di acqua diminuiva al crescere di quella del cesio ed aveva supposto che l'acqua facesse parte di una soluzione solida anticipando così le moderne conclusioni americane.

Nel ha dato anche la variazione dell'indice di rifrazione nella serie pollucite–analcime.

La disidratazione fu studiata da Grill [10] e da Strunz [7] per la pollucite elbana, poi da Fleischer e Ksanda [11] per la pollucite di Hebron (Maine) e per un campione elbano ed infine, per la pollucite di Karabib, da Nel [5]: Naray–Szabo [8] ha mostrato che l'acqua non è parte essenziale del reticolo: infatti il minerale disidratato coi raggi X dà lo stesso fotogramma di quello con acqua. Anche le curve di disidratazione di Nel e di Fleischer e Ksanda sono in favore di un tipo di acqua non parte integrante del reticolo in non completo accordo con la funzione dell'acqua in rapporto alla sostituzione cesio–sodio.

Varie altre parziali sostituzioni isomorfe possono avvenire nella pollucite dopo quelle, in genere entro ampli limiti, del cesio col sodio e del silicio coll'alluminio. Il più recente e accurato studio spettrografico anche quantitativo dei costituenti minori di questo minerale è quello di L. H. Ahrens [12]; nel 1947 egli ha esaminato tre campioni di pollucite: di Greenwood (Maine) e della Tin Mountain (S. Dakota) negli Stati Uniti e di Varutrask in Svezia ed ha trovato in essi: Rb, Li, K, Tl^{+1}, Ga e Sr. In precedenza [13] aveva esaminato quella di Karibib (Africa), già studiata da Nel [5], e quella di Norway (Maine) trovando in ambedue: Rb, Li, K, Tl, Ga e Sr. Importante è il

(10) E. Grill, *Sulla pollucite elbana.* « Atti della Soc. Toscana di Scienze Naturali Processi verbali », *29*, n. 4 (1920).

(11) M. Fleischer e C. J. Ksanda, *Dehydration of pollucite.* « Amer. Min. », *25*, 666 (1940).

(12) L. H. Ahrens, *Analysis of minor constituents in pollucite.* « Amer. Min. », *32*, 44 (1947).

(13) L. H. Ahrens, *Quantitative spectrochemical examination of the minor constituents in pollucite.* « Amer. Min. », *30*, 616 (1945).

ritrovamento dello stronzio nella pollucite di Karabib e nelle due americane (Greenwood e Tin Mountain) perchè le ricerche di Hahn e collaboratori [14] hanno dimostrato che esso è costituito essenzialmente dall'isotopo Sr^{87} proveniente dalla disintegrazione del Rb^{87}, inoltre la pollucite di Greenwood, che ha il 0.68 % Rb_2O, contiene meno stronzio di quella della Tin Mountain che ha 0.25 % Rb_2O perchè la pegmatite dove si trova la prima è geologicamente molto più giovane di quella della seconda.

Anche Nel [5] aveva trovato: Rb, K, Li, Tl e Ga nella pollucite di Karabib. Della pollucite americana e di quella elbana si era anche occupato A. Kastler [15] nel 1926 accertando la loro identità chimica e trovando con lo spettrografo, Li, Rb, K, e Ca.

L'esame della pollucite del granito elbano prometteva di essere interessante sia come contributo alla geochimica dell'isola sia perchè, trattandosi di una pegmatite geologicamente recente, non avrebbe dovuto essere presente lo stronzio e ciò infatti hanno accertato le nostre ricerche.

Noi abbiamo esaminato tre campioni di pollucite del granito tormalinifero di S. Piero in Campo [16] (Elba) dove essa è accompagnata da petalite, lepidolite, talvolta da foresite e cabasite.

Il materiale puro è stato accuratamente pestato e poi volatilizzato nell'arco con 150 V. e 5–6 A. Con lo spettrografo Zeiss Qu. 24, usando la fenditura di Hartmann, per ogni campione sono stati ripresi successivi spettrogrammi con pose rispettivamente di 1', 2' e poi del tempo sufficiente per volatilizzare tutto il materiale rimasto sul carbone. L'arco rimaneva quindi costantemente acceso durante l'esecuzione degli spettrogrammi. Furono anche fatti vari spettrogrammi riprendendo per 1' lo spettro dell'arco in piena emissione ed, infine, furono fotografati anche spettri del prodotto dell'attacco della pollucite con acido fluoridrico.

La determinazione delle lunghezze d'onda delle singole righe è stata fatta per confronto con lo spettro del ferro; la fenditura era di mm. 0.008.

Sono stati identificati con certezza i seguenti elementi:

K, Fe (tracce minime), Li, Na, Ga, Tl, Ca, Rb, Mn.

in base specialmente alla constatata presenza delle seguenti righe ultime [17]:

K	4404.14	Fe	3581.20	Li	3232.61	Na	3302.32
	4047.20		3719.94		4603.20		3302.99
			3734.87				

(14) O. Hahn, F. Strassmann, J. Mattauch, H. Ewald, «Naturwiss.», *30*, 541 (1942).

(15) A. Kastler, *Contribution à l'étude de la pollucite*. «Comp. Rend.», *182*, 1285 (1926).

(16) Campioni della collezione generale del Museo di Mineralogia della Università di Firenze N. 11996/636; 11998/636, il terzo senza numero.

(17) F. Gossler, *Bogen und Funkenspektrum des Eisens*. Jena, 1942; R. Harrison, *Wavelength Tables*, New York, 1939. Occorre tenere presente che le righe ultime con lunghezza d'onda superiore a 4000 Å sono state scartate, quando era possibile, per utilizzare, invece, la porzione dello spettrogramma con la massima dispersione.

Ga	Tl	Ca
2874.24	2767.87	3933.67
2943.63	3519.24	4226.73
4032.98	3775.72	4454.78
4172.06		

Del rubidio in qualche spettro di tutti e tre i campioni è stata individuata debole o debolissima la 4201.85; l'altra riga ultima 4215.56 non era per noi utilizzabile perchè cade al limite della banda del carbonio. Comunque riteniamo che tracce minime di rubidio siano presenti in tutti i campioni di pollucite analizzati. Anche tracce di manganese sono certamente presenti in tutti i campioni; negli spettrogrammi compaiono infatti debolissime le righe: 2794.82 ; 2801.08 ; 4030.76.

Sono stati cercati con esito negativo: Cu , Mg , Ni , Hg , Pb , Ge , Sr , Ba, Sn, Sc.

La presenza nel reticolo della pollucite dei costituenti minori trovati è, se si esclude il sodio, pienamente in accordo con le loro proprietà cristallochimiche.

Il potassio, il rubidio ed il tallio sono dei sostituenti del cesio, costituente fondamentale. In alcune proposte fatte da uno di noi [6] per la costruzione di un sistema cristallo–chimico degli ioni è stato appunto dimostrato che essi, per il loro raggio e per le loro proprietà dal punto di vista dell'isomorfismo, appartengono ad un'unica colonna del sistema; però il potassio ed il cesio costituiscono rispettivamente il primo e l'ultimo termine conosciuto della colonna stessa ($K^{+1} = 1.33$; $Cs^{+1} = 1.65$) pertanto il loro isomorfogenismo è blando ed il cesio non può imboscarsi e quindi diluirsi completamente nei composti di potassio costituenti fondamentali del granito ma si accumula, invece, nei residui della cristallizzazione come abbiamo già accennato.

Non è normale la sostituzione del cesio col sodio data la grande differenza fra i loro raggi ionici e quindi l'appartenenza a due colonne diverse del sistema cristallo–chimico, ma abbiamo già visto che la sua presenza nel reticolo della pollucite è legata, secondo le recenti ricerche, alla contemporanea introduzione dell'acqua e sembra, quindi, ad un assestamento del reticolo tale da consentire l'introduzione del sodio indipendentemente dal suo volume. Ammessa come possibile la presenza del sodio si comprende quella di tracce di calcio con esso tipicamente isomorfogeno per la vicinanza dei loro raggi ionici ($Na^{+1} = 0.98$; $Ca^{+2} = 1.06$). In tutti i silicati naturali di calcio esso è parzialmente sostituito dal sodio e viceversa, si spiega così anche la presenza di tracce di manganese spesso presente nei reticoli con calcio e sodio. Il gallio sostituisce l'alluminio, esso in natura è sempre completamente imboscato nei composti di alluminio e perciò molto diffuso. Non riteniamo probabile che il litio sostituisca il cesio, esso deve essere piuttosto, nel reticolo della pollucite, un sostituente dell'alluminio insieme al silicio.

Tutti i costituenti minori identificati nella pollucite elbana (eccettuati il calcio ed il manganese) erano stati trovati da L. H. Ahrens [12] [13] durante le sue ricerche spettrografiche sulla pollucite svedese, americana e africana; si tratta quindi di normali costituenti minori di questo minerale, notevolissima

è la constatata assenza dello stronzio che abbiamo visto provenire nella pollucite dalla disintegrazione del rubidio. La pegmatite elbana è infatti molto più giovane delle altre; mentre secondo Ahrens, l'età della pegmatite di Greenwood (Maine) può ritenersi eguale a circa 300.000.000 di anni e quella della pegmatite della Tin Mountain (S. Dakota) eguale a circa 1.300.000.000 di anni si può calcolare che la pegmatite della pollucite elbana abbia solamente 20.000.000 di anni.

La petalite o castore delle druse tormalinifere del granito elbano, monoclina, fu analizzata dal Comucci [18]; la sua struttura fu determinata più di recente da B. Gossner e F. Mussgnug [19]; oltre che nella pegmatite del granito elbano è nota in quella di Varutrask [1] (Svezia) dove spesso è parzialmente argillificata (in laboratorio si coalinizza facilmente a 300°) [20], nella pegmatite della Bridgers Mountains nel Wyoming [21], nelle apliti di Meldon Okehampton (Devonshire) [22], in Australia in masse incolori da usare anche come gemma [23].

Non vi sono ricerche moderne sui suoi costituenti minori. Noi abbiamo esaminato tre campioni accuratamente purificati di S. Piero in Campo (Isola d'Elba) [24] ed un campione di Utö (Svezia) [25] con lo stesso procedimento usato per la pollucite.

Oltre, naturalmente, al litio ed all'alluminio cationi fondamentali, sono stati sicuramente identificati i seguenti costituenti minori:

Petalite elbana Na , Mg , Fe , Mn , Ga.

Petalite svedese Na , Ca , Mg , Fe , Mn , Ga.

Il gallio, nelle petaliti, è un sostituente isomorfogeno dell'alluminio; il magnesio ed anche il ferro ferroso sostituiscono certamente il litio, abbiamo già visto che questo elemento, nel sistema cristallochimico, appartiene infatti alla colonna del gruppo isomorfogeno del magnesio. L'introduzione del sodio non può essere facilmente spiegata perchè esso non è isomorfogeno del litio; bisogna allora ammettere che la sostituzione sia compensata in volume da altre contemporanee o magari, come nel caso della pollucite, dalla presenza di acqua.

(18) P. Comucci, *Sopra la petalite elbana.* « Rend. R. Accad. Naz. Lincei », ser. 5ª, *24*, 1141 (1915). Qui è citata la vecchia letteratura sulla petalite elbana.

(19) B. Gossner e F. Mussgnug, *Ueber die strukturelle und molekulare Einheit von Petalit.* « Z. für Krystall », *74*, 62 (1930).

(20) F. H. Norton, *Hydrothermal formation of clay minerals in the laboratory.* « Amer. Min.», *24*, 1 (1939).

(21) T. G. McLaughlin, *Pegmatites dikes of the bridger Mountains, Wyoming.* « Amer. Min. », *25*, 46 (1940).

(22) W. F. P. McLintock, *On the occurrence of petalite and pneumatolytic apatite in the Meldon aplite, Okehampton, Devonshire.* « Min. Mag. », *20*, n. 103, 140 (1923).

(23) E. S. Simpson, *Contributions to the mineralogy of Western Australia.* Series XI, « Journ. Roy. Soc. W. Australia », *24*, 107 (1938).

(24) Della collezione generale del Museo di mineralogia di Firenze N. 13027/636 e della collezione elbana N. 2515/310 e 2535/310.

(25) Della collezione generale N. 13030/636.

Botanica. — *L'evoluzione del fiore femmineo e la maturazione del frutto nel Nocciuolo* (« *Corylus Avellana* » L. s. l.). Nota (*) del Corrisp. A. TROTTER.

Pochissime specie di Fanerogame (qualche Conifera, ad esempio) ci presentano, come il Nocciuolo, così nettamente disgiunti nel tempo, i due momenti fondamentali della riproduzione: impollinazione e fecondazione. Nelle altre, li troviamo separati da breve o brevissimo intervallo, talora di poche ore, cosicchè a molti, l'impollinazione, per quanto erroneamente, appare quasi sinonimo di fecondazione. Per il N. invece, l'intervallo non è di giorni o di settimane ma di alcuni mesi. Tale lentezza funzionale, la separazione dei sessi, le discordanze nell'antesi, la lentissima evoluzione dei fiori ♀ congiunta alla minutezza di tutta la loro organizzazione, avevano proiettato sul N. una certa ombra di mistero, per cui il botanico Baillon (1873, 1877) ricordava a tale proposito le parole spesso ripetute dal suo maestro Payer: « . . . celui-là serait bien habile qui decouvrirait le mode de developpement des fleurs femelles des Coudriers ». Ma Baillon stesso aveva raccolto l'ammonimento, lasciandoci (invero dopo Malpighi 1687, e Schacht 1854) alcune frammentarie notizie sull'evoluzione del fiore ♀ dei *Corylus*, anche di confronto con altre piante (Abietinee) ed in particolare con l'affine gen. *Carpinus*.

Intendo qui brevemente integrare e coordinare le osservazioni loro e di qualche altro botanico, e quelle posteriori mie. In rapporto non a var. selvagge ed imprecisate, come è avvenuto, ma a qualche classica var. di *Corylus* coltivata nella Campania, principalmente la S. Giovanni, o Lunga di Sarno (probabile ibrido *Avellana* × *maxima*), fra tutte la più singolare: per la sua maggiore precocità e per i suoi stili verdognoli o lievemente rosei, anzichè rosso-incarnati rutilanti come negli altri *C.* sia selvaggi che coltivati.

Il fiore ♀ comincia a formarsi entro la gemma ed all'ascella di una brattea ancora in piena estate (fine giugno-primi di luglio): trattasi di un semplice mammellone meristemale un po' espanso e successivamente trilobo. Il lobo mediano scompare, mentre i laterali si accrescono verso l'esterno, per costituire due carpelli rudimentali, superiormente differenziati in appendici stilari stimmatifere. Inferiormente, sono limitati da un minutissimo cercine, che poi costituirà il rilievo perigoniale. In tal modo hanno origine i fiorellini, appaiati all'ascella della piccola brattea connessa al ricettacolo.

L'antesi ♀ nella var. ricordata, ha inizio alla metà di dicembre per protrarsi, con qualche intermittenza causata da eventuali avversità meteoriche,

(*) Presentata nella seduta del 15 maggio 1948.

sino alla fine di gennaio. In tale periodo, che coincide più o meno [1] con l'antesi ♂, gli stili sporgono visibilmente all'apice di gemme miste. Ogni paio di stili corrisponde ad un singolo fiorellino rudimentale ed ogni gemma ne può contenere sino a 15 circa, per lo più da 5 a 10 disposti in minuscola infiorescenza spiciforme, o piuttosto racemosa per la riunione di cimule bipare o dicasi, causa la scomparsa di un terzo fiorellino mediano. La superfice degli stili, papillata specialmente verso l'alto, funziona per buona parte della sua lunghezza da superfice stimmatica. Inferiormente, cioè dentro la gemma, i due stili si trovano collegati ad un tenue lobulo meristemale, sul quale poggiano come su minuscolo piedestallo, limitando una angustissima rima a fondo cieco, la quale rappresenta una cavità ovarica primitiva e quasi virtuale (fig. 1).

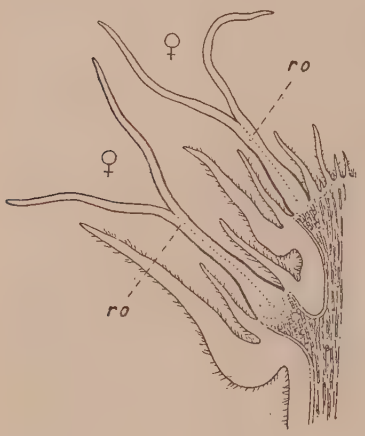


Fig. 1. – Porzione d'infiorescenza ♀ (Var. S. Giovanni) con 2 fiori, il superiore meno sviluppato (19 marzo): *ro*, rima ovarica. – Ingr. circa × 15.

I due stili di ogni singolo fiorellino, filiformi o subcilindrici, presentano, in sezione trasversale, dal lato interno e sino a breve distanza dall'apice, un lieve incavo che corrisponde ad una doccia longitudinale; cosicchè le due docce contrapposte, confluiscono con il meristema nel quale si perfezionerà la cavità dell'ovario. Il tessuto interno degli stili, in sezione trasversale e longitudinale, non presenta lacune o nette differenziazioni di tessuto conduttore. Il ricordato cercine perigoniale, quasi impercettibile, si salderà progressivamente all'ovario: nella parte libera dentellato, mentre con la maturazione della nucula od achenio, persisterà più o meno visibilmente come un minuscolo calice supero. Originariamente, al disotto di tale cercine, una brattea e due bratteole fortemente pubescenti, costituiscono invece i rudimenti del futuro involucro che dovrà avvolgere, a guisa di cupola, la base dell'achenio.

Tale si presenta la rudimentale organizzazione del fiore ♀ durante tutto il periodo dell'antesi. Avvenuta l'impollinazione [2], il budello pollinico raggiunge rapidamente la cavità ovarica primitiva dove l'ho potuto rinvenire, con un percorso che ritengo prevalentemente ectotropico segnato dai due solchi stilari. Segue un lungo periodo di quiescenza, almeno apparente della sua attività, come pure nella evoluzione del fiore. Una vera ripresa vegetativa non si avrà che all'inizio della fogliazione, cioè ad un mese di distanza e più (fine febbraio–metà marzo), con germoglio lungo 2–3 cm. e 4–5 piccole foglie alquanto divaricate. Nei fiori non impollinati, gli stili persistono vivaci,

(1) A. Trotter, *Caratteri e fenomeni della riproduzione nel Nocciuolo: l'impollinazione*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. II, fasc. 6, pp. 745–749 (1947).

(2) Avrei notato che un eccesso di polline sulla superfice stimmatica può esercitare una rapida azione necrotizzante, forse sfavorevole alla germinazione ed allungamento.

con il loro normale colorito, anzi si allungano più o meno assieme alle papille stimmatiche, quasi attendessero qualche granulo ritardatario. Come ho dimostrato in altro lavoro [3], i fiori non impollinati od impollinati da granuli sterili, sono destinati a disseccare e cadere. In quelli efficacemente impollinati, gli stili leggermente imbruniscono per l'ossidazione di sostanze tanniche [4], e con la ripresa della vegetazione il fiore proseguirà nella sua evoluzione, sotto lo stimolo, di natura probabilmente ormonica, dovuto alla presenza del tubo pollinico nel suo interno. Trattasi di eccitamento puramente vegetativo, ma non meno importante della stessa fecondazione: senza di esso (come avviene nelle Orchidee) l'ovario non si completerebbe; l'aveva già intuito l'inglese Bradley (1717) nel Trattato *New improvements of planting*, ecc. (con edizioni successive sino al 1731), ricordato anche da Linneo (*Spons. plant.*). Così si chiude questa prima fase critica della riproduzione.

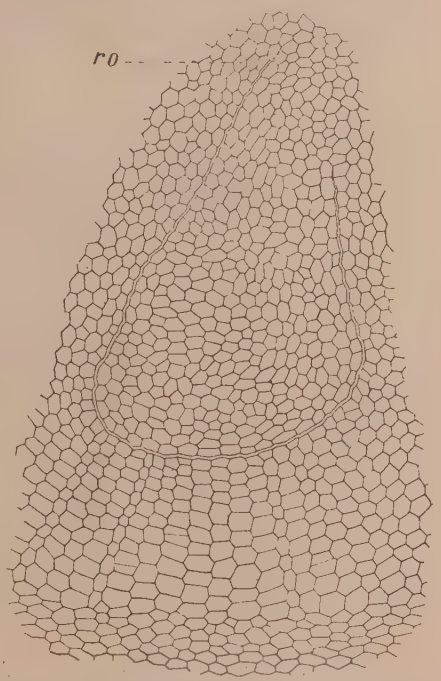


Fig. 2. – Sez. long. tangen. ovario rudiment. in corrispondenza loggia ovarica (fine marzo).

ro, rima ovarica. Al disotto, zona di accrescimento. Ingr. circa × 160.

Ad un mese circa dalla penetrazione del tubo pollinico, gli stili più o meno raggrinziti, si mantengono vivi solo nel segmento basilare connivente (meristema ovarico) racchiuso entro la gemma, che allora accenna ad un lieve inturgidimento. Ciò precede di qualche decina di giorni la schiusa, con l'apparire delle due prime fóglioline, mentre due altre superiori e rudimentali occultano e proteggono l'infiorescenza apparentemente immutata. In questo periodo, ha inizio anche la formazione del minuscolo ovario (di circa 0.5 mm. di diametro) e la differenziazione delle placente situate verso il suo centro; gli stili si fanno apicali, l'asse si ricopre di peli ghiandoliferi, e le brattee involucrali, lievemente ingrandite, cominciano a saldarsi, mentre si accentua il rilievo perigoniale. Dopo 20–30 giorni (fine III–metà IV), il germoglio ha raggiunto circa 10 cm. di lunghezza, con 5 foglie ben sviluppate e qualche altra piccola apicale; le squame della perula, tra loro distanziate, allungate e rinverdite, appaiono quasi stipoliformi. Frattanto l'asse dell'infio-

(3) A. TROTTER, *Della supposta partenocarpia del Nocciuolo e dei suoi eventuali caratteri*, ecc. « Rend. R. Accad. Lincei », vol. 28, pp. 505–508; vol. 29, pp. 72–76 (1920).

(4) A. TROTTER, *Ricerche ed osservazioni sulla presenza del tannino negli organi sessuali dei fiori*, ecc. « Nuovo Giorn. Botan. Ital. », 1919, p. 26 (1921).

rescenza si va pure allungando e differenziando in direzione acropeta e si irrigidisce lignificandosi; i fiori si distanziano visibilmente, inframmezzati dalle bratteole notevolmente allargate, e verso l'apice, a seconda delle var., l'asse si sarà maggiormente rivestito di tricomi linfatici o ghiandoliferi. L'ovario ha raggiunto circa 2 mm. di diametro, compreso l'involucro che è lungo 5–6 mm. In tale periodo, la piccola infiorescenza, tuttora poco appariscente, appare protetta da 4–6 squale stipoliformi. L'involucro, visibilmente differenziato, raggiunge o supera col suo margine libero, in relazione con le var., l'apice degli stili, oramai disseccati, salvo sempre una ristrettissima zona basilare alla loro confluenza. L'ovario, ancora imperfetto, è largamente saldato al fondo dell'involucro, mentre al suo centro ha inizio la differenziazione degli ovuli (fig. 2). Un altro mese, o quasi, sarà necessario (fine aprile) prima che si delinei la differenziazione dell'unico tegumento ovulare e della nucella (fig. 3), mentre con l'accrescersi basipeto dell'ovario (di 2.5–3 mm. di diametro), si vedranno gli ovuli (2 per lo più) avvicinati allora al suo apice. Ha inizio anche la vascolarizzazione delle pareti ovariche e la formazione di un tessuto interno di riempimento. Un'altra quindicina di giorni sarà necessaria (prima metà di maggio) a completare l'evoluzione dell'ovario e degli ovuli con la formazione del tessuto sporogeno e la maturazione del sacco embrionale. L'ovario, di 6–8 mm. di diametro, presenta sempre una larga inserzione basilare (fig. 4). Superiormente, esso appare vellutato e provvisto di cercine perigoniale ben distinto; qui è già iniziata la lignificazione della calotta perigoniale a protezione dei due ovuli. L'involucro, nella S. Giovanni, è allora lungo 10–12 mm., rivestito di pelli ghiandoliferi, a margine distintamente dentato, con tenui pliche esterne che segnano la sua vascolarizzazione. L'atto fecondativo pertanto non potrà compiersi che dopo tale periodo (seconda metà di maggio), con ovario di 8–10 mm. di diametro, cioè a circa 4 mesi o poco più dalla impollinazione [5].

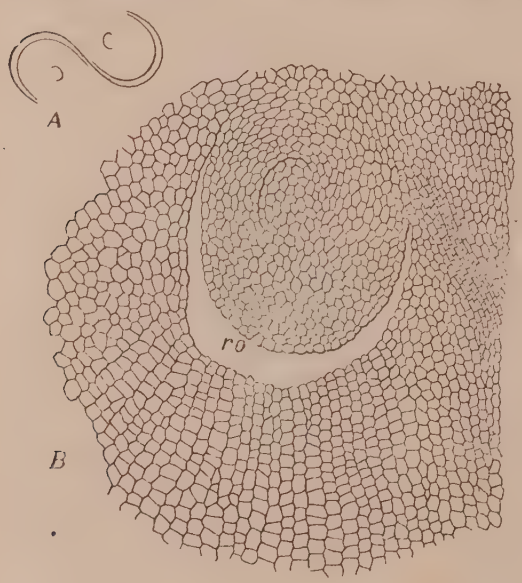


Fig. 3. – *A*. Sez. trasv. equat. schematica ovario rudiment., con rima ovarica e 2 ovuli e nucella in differenziazione. – *B*. Sez. long., come in *A*, *ro*, rima ovarica ed ovulo con nucella (metà aprile). – Ingr. circa × 100.

(5) In Inghilterra (Surrey), per una var. non precisata, secondo mi comunicò M. Benson (in lettera 17 gennaio 1916), la germinazione del polline sarebbe avvenuta il 5 febbraio,

Periodo critico adunque, poichè in coincidenza con la rapida formazione e maturazione dei sacchi embrionali (da ultimo trovasi un solo sacco) si possono avere sfavorevoli condizioni di temperatura (metà maggio) capaci di turbare i delicati processi mitotici nell'apparato sessuale ♀, quanto nel ♂ durante l'attività dei due nuclei generativi contenuti nel tubo pollinico, oramai dalla rima ovarica penetrato nell'ovulo. Nel N., anche in tale periodo, non si può parlare di una vera cavità ovarica, poichè la rima cui mi sono sempre riferito (fig. 4), viene progressivamente occupata, come ho già ricordato, da un tessuto di riempimento derivato dalla proliferazione degli strati più interni della parete ovarica: tessuto di colorito bianco candido, di aspetto midollare, il quale subirà, con l'ingrandirsi del seme e con la matura-

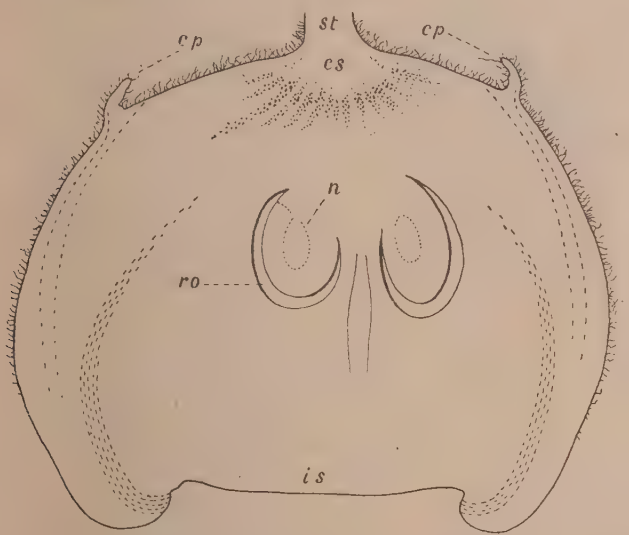


Fig. 4. – Sez. long. giovane ovario (Var. S. Giovanni, fine aprile); i 2 ovuli immaturi e subcentrali.

n, nucella; *ro*, rima ovarica; *cp*, cercine perigoniale; *st*, stili alla loro base d'inserzione; *cs*, calotta sclerosa a lignificazione precoce; *is*, inserzione scudetto. – Ingr. circa ×,15 (dimens. reale 6 mm.).

zione del frutto, una progressiva contrazione, sino ad accollarsi contro il guscio, quale pellicola imbrunita ferruginea necrotica. Tuttociò durante lo spazio di un altro mese all'incirca.

Il tubo pollinico, nel periodo della fecondazione od ancor prima, dalla rima ovarica è penetrato nell'ovulo a traverso il funicolo e la calaza, o piuttosto tra la calaza ed il micropilo (mesogamia), senza escludere la possibi-

la fecondazione non prima del 21 giugno, alla distanza di mesi 4 1/2. – Il compianto prof. Petri, il quale ebbe l'opportunità di studiare il fenomeno della cascola delle nocciuole, riteneva invece che la fecondazione seguisse immediatamente la impollinazione e che perciò l'ovocellula o l'embrione passassero un periodo di riposo sino alla primavera (L. PETRI, *Sulla cascola delle nocciuole nell'Avellinese*. In « La Terra, Boll. Catt. Amb. Agricolt. », Avellino, XI, 1913, n. 7, pp. 90–95 (p. 93, II colonna; p. 95, I colonna).

lità di una normale porogamia, data la regolare costituzione del foro e del condotto micropilare (fig. 5). Secondo Benson (1894), che una sola volta lo riscontrò nel tessuto calazale (Nawaschin 1895 e 1899, due volte), esso vi penetrerebbe lungo il funicolo *senza mai* trovarsi in una *cavità*, contrariamente a quanto ho potuto osservare. Se così fosse, si tratterebbe di una calazogamia sui generis, la quale si attuerebbe, prima di raggiungere la macrospora, entro tessuti in progressiva differenziazione, dei quali dovrebbe paral-

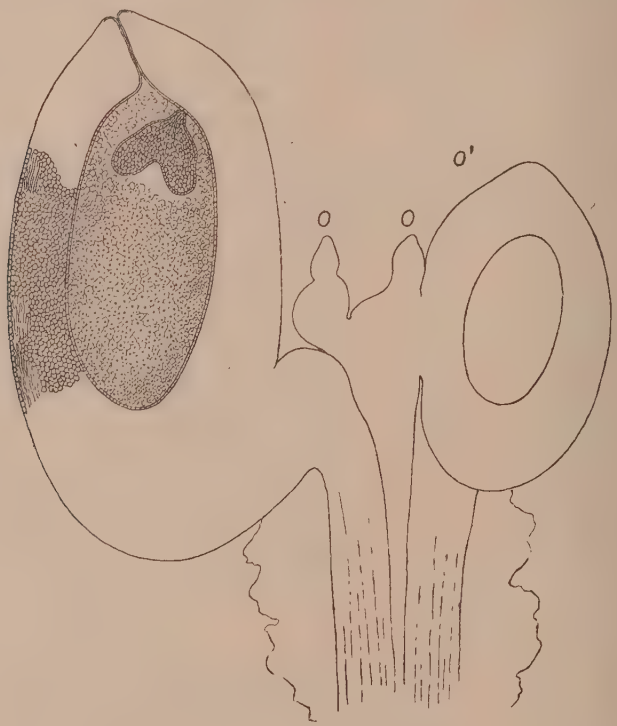


Fig. 5. – Sez. long. ovulo fecondato con embrione in sviluppo ed endosperma nutritivo avvolgente (Var. Mortarella, 18 giugno).
In *o'*, secondo ovulo non fecondato; in *o*, ovuli abortivi. – Ingr. circa × 30.

lelamente accompagnare l'evoluzione. Nella macrospora, l'apparato ovulare è però di fugace e difficile osservazione, maturando con grande rapidità nel breve periodo della fecondazione. Le osservazioni di Benson e Nawaschin, si riferiscono solo a queste ultime fasi, mentre rimase loro ignoto il percorso del tubo pollinico successivamente alla sua penetrazione nell'interno del gineceo rudimentale.

Con il costituirsi dell'embrione (metà giugno), si è differenziato un endosperma od albume, nel N. di natura cellulare, di cui risulta il disfacimento con la progressiva nutrizione dell'embrione (fig. 5). La mancata formazione di tale tessuto, per carenza di una doppia fecondazione, determina

l'arresto di sviluppo dell'embrione e del seme (aborto seminale), di conseguenza il vuoto del frutto e la successiva cascola patologica. Fenomeno il quale si collega ad altro analogo, con la mancata fecondazione anche del gamete femminile (aborto ovulare)[6], che però non pregiudicano l'ulteriore sviluppo dell'ovario o, successivamente, del solo pericarpo (fig. 6).

Nel N., tutto appare coordinato a creare intorno al fiore ♀, e successivamente all'ovario ed agli ovuli, una efficace protezione contro sfavorevoli influenze esteriori. Allo schiudersi della gemma, le prime foglie si incurvano sopra l'infiorescenza e l'occultano. Successivamente, tale funzione è assunta dalle squame inverdite della perula, dall'involucro precocemente evoluto, nonchè da rivestimenti di peli. Di poi, il candido tessuto di riempimento protegge gli ovuli e successivamente l'embrione, mantenendo intorno ad essi un elevato grado di freschezza, mentre le pareti dell'ovario iniziano assai presto al suo apice, la loro lignificazione, in corrispondenza dell'areola perigoniale ed immediatamente al di sopra degli ovuli (fig. 4, 6).

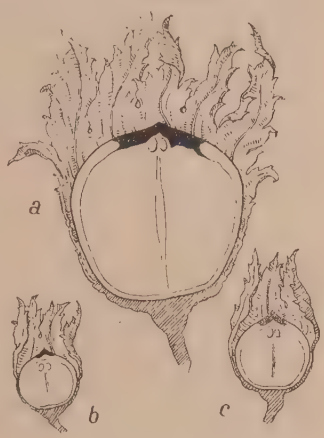


Fig. 6. – Ovari soggetti ad avvizzimento (ovuli abortivi); calotta super. (in nero), già lignificata a protezione degli ovuli (aprile–maggio). – Gr. nat.

Durante il periodo della fecondazione, l'ovario potrebbe già dirsi una giovane nocciuola se l'embrione vi fosse in via di sviluppo, mentre non si tratta che di un ovario fisiologicamente maturo. Infatti, la segmentazione dell'ovocellula ha inizio dopo alcuni giorni (5–8) dalla fecondazione, ma progredisce poi con una certa rapidità, ed il seme raggiunge il suo massimo volume (nella S. Giovanni) dalla fine di giugno ai primi di luglio. Progredisce parallelamente l'ingrossamento definitivo dell'ovario, oramai frutticino, e la lignificazione delle sue pareti, che si completa in direzione basipeta e per settori discontinui, radianti dall'apice quali sottili piramidi acuminate. Ultima a lignificare sarà la base dell'achenio, o scudetto che, con la maturazione, perderà ogni contatto con l'involucro sottoposto (fig. 4, *is*). Tra il guscio cioè e l'involucro, trovasi interposto un sottile tessuto di separazione, costituito da una decina di strati di piccole cellule a pareti sottili a lamella mediana dissolvente (tecolisi). Il successivo contrarsi di tali cellule, determina la separazione dei due organi e dei rispettivi tessuti vascolari, e con ciò la caduta spontanea della nocciuola (fine luglio metà agosto): questo però nelle specie o var. ad involucro breve ed aperto; anzichè lungo, chiuso

(6) A. TROTTER, *Ricerche ed osservazioni sull'aborto seminale*. (II Contrib. alla Patologia del N.). « Ricerche, osservazioni e divulgazioni filopatologiche per la Campania, ecc.», n. VI, Portici 1937, 70 pp., 16 figg., 1 tav. col.; *Il concetto di aborto in Patologia Vegetale*. «Ann. R. Scuola Sup. Agric. Portici», vol. XX, 1924, pp. 3–11.

o strozzato al di sopra, come in *C. maxima* Mill. e talune sue var., od in alcuni ibridi *Avellana* × *maxima*.

La nutrizione del seme è affidata al rafe, che finisce per accollarsi alla superfice seminale e vi persiste. La compressione che ne deriva, determina il prodursi di un lieve solco nei tessuti ancor teneri del seme. Solco diritto nelle tipiche var. di *C. Avellana*, sinuoso, cioè più o meno sigmoideo, in *C. maxima* sue var. ed ibridi. A conclusione, aggiungerò che la maturazione commerciale delle nocciuole dopo il raccolto, con una conveniente esposizione all'aria ed al sole, accentua la colorazione del guscio. Nelle differenti var., tra tale colorito (che va dal giallo-paglierino un po' bruciato sino al castagno più o meno intenso, a traverso il tipico color « nocciuola ») ed il colorito verde più o meno intenso del fogliame, esiste una evidente correlazione.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Questioni di equivalenza relative alle curve riducibili e ai punti base di un fascio di curve sopra una superficie algebrica.* Nota II di A. Andreotti, presentata (*) dal Corrisp. B. Segre.

3. Possiamo ora dimostrare il seguente teorema:

In un fascio H *(razionale o no) di curve non tutte riducibili, il contributo*

$$\Delta = \sum_{C\,(r,s)} (\mu_r + \mu_s - 1)\,[\Theta_r, \Theta_s] + \sum_{1}^{h}{}_r\, (\mu_r - 1)\,(2\,p_r - 2)$$

portato nel computo dell'invariante di Zeuthen-Segre della superficie F *da una curva* $C = \sum_{1}^{h}{}_r\, \mu_r \Theta_r$ *spezzata nelle componenti irriducibili* $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_h$ *di generi rispettivi* $p_1, p_2, \cdots, p_h$, *contate ciascuna* $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_h$ *volte rispettivamente, è sempre positivo a meno che*:

o C *si riduca ad una componente ellittica multipla, nel qual caso* $\Delta = 0$

ovvero C *si riduca ad una componente razionale multipla. In questo caso è* $\Delta < 0$, *ma quest'ultima curva possiede necessariamente almeno un punto doppio cosicchè il contributo complessivo di* C *è ancora positivo.*

Per la dimostrazione noi scriveremo il numero Δ in forma opportuna, in modo da porre, in certa guisa, in evidenza il contributo portatovi da ciascuna delle componenti Θ di C; il ragionamento si sviluppa allora in modo del tutto naturale da quella formula. Faremo dapprima alcune ipotesi restrittive su H, dalle quali ci libereremo in seguito.

(*) Nella seduta del 10 aprile 1948.

a) Supponiamo in primo tempo, che il fascio H sia privo di punti base e che non contenga (parzialmente) alcuna curva eccezionale di prima specie.

Se allora C *possiede almeno due componenti distinte*, ciascuna componente Θ_r di C ha grado virtuale negativo e, in particolare, se Θ_r è razionale, non superiore a -2.

Invero, essendo H privo di punti base, risulta:

$$(1) \qquad [C, \Theta_r] = \sum_1^h{}_s \mu_s [\Theta_s, \Theta_r] = 0$$

e quindi:

$$(1') \qquad -\mu_r [\Theta_r, \Theta_r] = \sum_{s \neq r} \mu_s [\Theta_s, \Theta_r];$$

ma pel principio di spezzamento, uno almeno dei numeri $[\Theta_s, \Theta_r]$, $s \neq r$, è ≥ 1. epperò intanto $[\Theta_r, \Theta_r] < 0$. Se poi Θ_r è razionale, per l'ipotesi che H non contenga curve eccezionali di prima specie, sarà necessariamente $[\Theta_r, \Theta_r] \leq -2$.

Ciò posto si può scrivere:

$$= \sum_{C(r,s)} (\mu_r + \mu_s - 1)[\Theta_r, \Theta_s] + \sum_1^h{}_r (\mu_r - 1)(2\rho_r - 2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \sum_1^h{}_r \sum_1^h{}_s (\mu_r + \mu_s - 1)[\Theta_r, \Theta_s] - \sum_1^h{}_r (2\mu_r - 1)[\Theta_r, \Theta_r] \right\} + \sum_1^h{}_r (\mu_r - 1)(2\rho_r - 2) =$$

$$= \sum_1^h{}_r \left\{ \frac{1}{2}(\mu_r - 1) \sum_{s \neq r}{}_s [\Theta_r, \Theta_s] + \frac{1}{2} \sum_1^h{}_s \mu_s [\Theta_r, \Theta_s] - \frac{1}{2}\mu_r [\Theta_r, \Theta_r] + (\mu_r - 1)(2\rho_r - 2) \right\}.$$

Ma per la (1) $\sum_1^h{}_s \mu_s [\Theta_r, \Theta_s] = 0$ onde:

$$\Delta = \sum_1^h{}_r \left\{ (\mu_r - 1)\left(2\rho_r - 2 + \frac{1}{2} \sum_{s \neq r}{}_s [\Theta_r, \Theta_s] \right) - \frac{1}{2}\mu_r [\Theta_r, \Theta_r] \right\}.$$

Quindi Δ è uguale alla somma degli h contributi:

$$\Delta_r = (\mu_r - 1)\left(2\rho_r - 2 + \frac{1}{2} \sum_{s \neq r}{}_s [\Theta_r, \Theta_s] \right) - \frac{1}{2}\mu_r [\Theta_r, \Theta_r],$$

ciascuno dei quali è positivo, eccettuato il solo caso che Θ_r sia una componente razionale di grado virtuale -2, (di molteplicità $\mu_r \geq 3$), avente un sol punto di connessione con le rimanenti Θ.

Invero, essendo $[\Theta_r, \Theta_r] < 0$, potrà essere $\Delta_r < 0$ solo se $\rho_r = 0$ e il numero dei punti di connessione di Θ_r colle altre componenti non supera 4: $\sum_{s \neq r}{}_s [\Theta_r, \Theta_s] \leq 4$.

Tenendo conto che adesso è $[\Theta_r, \Theta_r] \leq -2$ solo nel caso indicato risulta:

$$\Delta_r = \frac{1}{2}(3 - \mu_r) < 0.$$

Ciò posto, sia, se esiste, Θ_1 una componente razionale siffatta e sia Θ_2 *la* componente Θ connessa con Θ_1.

Dalla (1') otteniamo:

$$2\,\mu_1 = \mu_2 .$$

Ora se Θ_2 non è razionale, o lo è, ma ha almeno tre punti di connessione con le altre Θ si ha:

$$\Delta_2 \geqq \frac{1}{2}\mu_2 .$$

(come si verifica subito sull'espressione di Δ_r tenendo conto, nel caso che sia Θ_2 razionale, che $[\Theta_2 , \Theta_2] \leqq -2$), ossia: $\Delta_2 \geqq \mu_1$ e quindi:

$$\Delta_1 + \Delta_2 \geqq \frac{1}{2}(3 - \mu_1) + \mu_1 > 0 .$$

Altrimenti Θ_2 è razionale con esattamente due punti di connessione (chè, se Θ_2 fosse connessa colla sola Θ_1, si avrebbe per la (1') $-\mu_2 [\Theta_2 , \Theta_2] = \mu_1$ mentre è $\mu_2 > \mu_1$).

Si indichi con Θ_3 la componente, distinta da Θ_1, connessa con Θ_2.

Dalla (1') otteniamo:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,\mu_1 = \mu_2 \\ -\mu_2 [\Theta_2 , \Theta_2] = \mu_1 + \mu_3 \quad \text{da cui} \quad \mu_3 \geqq 2\,\mu_2 - \mu_1 = \mu_2 + \mu_1 = 3\,\mu_1 . \end{array}\right.$$

Ora se Θ_3 non è razionale, o lo è, ma ha almeno tre punti di connessione colle altre Θ risulta:

$$\Delta_3 \geqq \frac{1}{2}\mu_3 \geqq \frac{3}{2}\mu_1 \quad , \quad \Delta_2 \geqq 1 \quad , \quad \Delta_1 = \frac{1}{2}(3 - \mu_1)$$

e quindi:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 > 0 .$$

Altrimenti Θ_3 è razionale con esattamente due punti di connessine (chè, se Θ_3 fosse connessa con la sola Θ_2, si avrebbe per la (1') $-\mu_3 [\Theta_3 , \Theta_3] = \mu_2$ mentre è $\mu_3 > \mu_2$).

Si indichi con Θ_4 la componente, distinta da Θ_2, connessa con Θ_3.

Ragionando come sopra e proseguendo così di seguito, dopo non più di h passi, la catena $\Theta_1 , \Theta_2 , \Theta_3 , \Theta_4 , \cdots$ si sarà certamente chiusa con una Θ o irrazionale, o razionale con almeno tre punti di connessione colle altre Θ cosicchè:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \cdots > 0 .$$

Inoltre si avrà per ogni Θ_r della catena:

$$(2) \qquad \mu_r \geqq \mu_{r-1} + \mu_1 \quad ; \qquad (3) \qquad \mu_r \geqq r\mu_1 .$$

Operiamo in modo analogo a partire dalle altre Θ che dànno in Δ contributo non positivo e costruiamoci, come sopra, la relativa catena.

Se due qualunque di queste catene non hanno la stessa curva terminale risulta senz'altro $\Delta > 0$.

Altrimenti indichiamo con:

$$\begin{vmatrix} \Theta_1', \cdots, \Theta_i', \Theta^* \\ \Theta_1'', \cdots, \Theta_j'', \Theta^* \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Theta_1^{(s)}, \cdots, \Theta_l^{(s)}, \Theta^* \end{vmatrix}$$

un gruppo di catene aventi la medesima curva terminale Θ^*. Proviamo che anche in questo caso il contributo complessivo $\mathfrak{D}$ delle Θ considerate è positivo.

Se Θ^* non è razionale, o lo è, ma ha almeno quattro punti di connessione, risulta, con evidenti notazioni:

$$\Delta^* \geqq -\frac{1}{2}\mu^*[\Theta^*, \Theta^*] \geqq \frac{1}{2}\{\mu_i' + \mu_j'' + \cdots + \mu_l^{(s)}\}, \quad \text{per la (1')}$$

e quindi:

$$\mathfrak{D} = \Delta^* + (\Delta_1' + \cdots + \Delta_i') + (\Delta_1'' + \cdots + \Delta_j'') + \cdots + (\Delta_1^{(s)} + \cdots + \Delta_l^{(s)}) \geqq$$

$$\geqq \Delta^* + \Delta_1' + \Delta_1'' + \cdots + \Delta_1^{(s)} = \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}(\mu_i' - \mu_1') +$$

$$+ \frac{1}{2}(\mu_j'' - \mu_1'') + \cdots + \frac{1}{2}(\mu_l^{(s)} - \mu_1^{(s)}) > 0 \quad \text{in virtù delle (3).}$$

Resta da esaminare il caso che Θ^* sia razionale con tre soli punti di connessione (Θ^* come curva terminale non può aver per costruzione meno di tre punti di connessione).

In questo caso, poichè per le (3)

$$\mu^* \geqq 2\mu_1' \; ; \; \mu^* \geqq 2\mu_1'' \; ; \cdots,$$

se le catene appoggiate a Θ^* sono solo due ($s = 2$) risulta senz'altro:

$$\mathfrak{D} \geqq \Delta^* + \Delta_1' + \Delta_1''$$

$$\geqq 3 + \frac{1}{2}\{\mu^* - \mu_1' - \mu_1''\} > 0.$$

Se invece quelle catene sono tre ($s = 3$), allora $-\mu^*[\Theta^*, \Theta^*] = \mu_i' + \mu_j'' + \mu_l'''$ onde essendo per le (3) $\mu^* > \mu_i'$, $\mu^* > \mu_j''$, $\mu^* > \mu_l'''$, necessariamente sarà $[\Theta^*, \Theta^*] = -2$, cosicchè una sola di quelle catene può constare di due soli elementi.

Ora se $i \geqq 2$, $j \geqq 2$, $l \geqq 2$, certamente:

$$\mathfrak{D} \geqq \Delta^* + \Delta_1' + \Delta_1'' + \Delta_1''' = \frac{1}{2}\{3 + \mu^* - \mu_1' - \mu_1'' - \mu_1'''\} > 0$$

poichè in virtù delle (3) risulta: $\mu^* \geqq 3\mu_1'$, $\mu^* \geqq 3\mu_1''$, $\mu^* \geqq 3\mu_1'''$.

Se invece fosse $i = 1$, sarebbe $\mu^* = 2\mu_1'$; d'altra parte per le (2)

$$\mu^* \geqq \mu_j'' + \mu_1'' \quad ; \quad \mu^* \geqq \mu_l''' + \mu_1''',$$

onde $2\mu^* \geq \mu_1'' + \mu_1''' + \mu_1'' + \mu_1'''$, da cui $\mu_1' \geq \mu_1'' + \mu_1'''$, dato che, per quanto si è detto, è $2\cdot\mu^* = \mu_1' + \mu_1'' + \mu_1'''$. Di qui ancora

$$\mathfrak{D} \geq \Delta^* + \Delta_1' + \Delta_1'' + \Delta_1''' = \frac{1}{2}\{9 + \mu^* - \mu_1' - \mu_1'' - \mu_1'''\} > 0.$$

Pertanto, se le componenti di C sono almeno due, è sempre $\Delta > 0$.

Se poi C *si riduce a una componente multipla*, $C = \mu\Theta$, $(\mu \geq 2)$, risulta:

$$\Delta = (\mu - 1)(2p - 2)$$

onde se Θ è di genere $p > 1$, è $\Delta > 0$;

se è di genere 1 è $\Delta = 0$;

se è razionale è $\Delta = -2(\mu - 1) < 0$. Ma allora Θ possiede certamente almeno un punto doppio (chè altrimenti, il genere virtuale di C sarebbe negativo ed H dovrebbe essere formato con curve tutte spezzate). Ora il contributo $[j_\Theta]$ dei punti doppi di Θ è $\geq 2\mu - 1$ onde $\Delta + [j_\Theta] > 0$.

b) L'ipotesi che il fascio H non contenga (parzialmente) curve eccezionali di prima specie, può essere omessa.

Infatti, se N è il numero delle componenti Θ eccezionali di prima specie distinte, contenute in $C = \sum_1^h \mu_r \Theta_r$ [1] e se con una trasformazione birazionale delle superficie F si fanno scomparire, il contributo Δ_1 della curva omologa di C nel computo dell'invariante di Zeuthen–Segre della superficie trasformata F_1 è, per quanto si è detto in *a*), positivo (dato che il fascio omologo di H è tutt'ora privo di punti base). Ma nel passare da F ad F_1 l'invariante di Zeuthen–Segre è diminuito di N onde risulta $\Delta = \Delta_1 + N > 0$.

c) Anche l'ipotesi che il fascio H sia privo di punti base, non è essenziale.

Invero basta ricordare in che modo si devono computare i punti base nel calcolo dell'invariante di Zeuthen–Segre, per vedere che il contributo Δ dovuto a C, è uguale a quello della curva omologa di C su una trasformata birazionale di F ottenuta col far scomparire successivamente i punti base di H.

Per quanto è detto in *a*) e *b*), segue che il nostro teorema è sempre valido.

Osservazione 1ª. – L'ipotesi che la curva generica di H sia irriducibile, è essenziale come lo prova il seguente esempio.

Su una superficie rigata F di genere $p > 0$, priva di curve eccezionali di prima specie, l'invariante di Zeuthen–Segre è $I = -4p$.

Nel fascio delle generatrici una serie lineare semplicemente infinita, di gruppi di h curve, dà luogo ad un fascio lineare H, privo di punti base, di curve di genere virtuale $-(h - 1)$ e il contributo complessivo Δ nel computo di I dovuto alle curve di H con componenti multiple è dato da:

$$\Delta = I - 4(h - 1) = -4(p + h - 1) < 0 \text{ [2]}.$$

(1) O che tali divenissero dopo che, con trasformazione birazionale, si son fatte scomparire alcune delle componenti eccezionali di prima specie.

(2) Si può osservare che, se per un fascio lineare H (privo di componenti fisse) di una superficie F, il contributo complessivo Δ dovuto a curve con punti doppi o spezzate, nel computo dell'invariante di ZEUTHEN–SEGRE è negativo, la F è razionale o riferibile

Osservazione 2ª. – Indichiamo con p il genere della generica curva di H, con $\dot{J}_{\Theta_r}$ il gruppo dei punti doppi della componente Θ_r di $C = \sum_1^h{}_r \mu_r \Theta_r$.

Esprimendo p mediante i caratteri delle componenti Θ_r di C, otteniamo, con facile calcolo (3), la relazione:

$$2p - 2 = \sum_1^h{}_r \mu_r (2\rho_r - 2 + 2[\dot{J}_{\Theta_r}] - [\Theta_r, \Theta_r]).$$

Tenendo conto di questa espressione, il contributo complessivo $\Delta + [\dot{J}]$ portato da C nel computo dell'invariante di Zeuthen-Segre di F, si può allora scrivere (come facilmente si verifica) sotto la forma particolarmente semplice:

$$\Delta + [\dot{J}] = 2p - 2 - \left\{ \sum_1^h{}_r (2\rho_r - 2) + \sum_1^h{}_r [\dot{J}_{\Theta_r}] + \sum_{C(r,s)} [\Theta_r, \Theta_s] \right\}.$$

Questa formula pone, in certo modo, in evidenza il significato topologico, del numero $\Delta + [\dot{J}]$.

Invero $-(2p - 2)$ non è che la caratteristica di Eulero-Poincaré della riemanniana della curva generica di H mentre

$$-\left\{ \sum_1^h{}_r (2\rho_r - 2) + \sum_1^h{}_r [\dot{J}_{\Theta_r}] + \sum_{C(r,s)} [\Theta_r, \Theta_s] \right\},$$

si può intuitivamente riguardare come la caratteristica di Eulero-Poincaré della riemanniana della curva $C = \sum_1^h{}_r \mu_r \Theta_r$ osservando che, almeno nei casi più «onesti», l'acquisto per C di un punto doppio porta una diminuzione in quella caratteristica di una unità, mentre il ripiegarsi di C su sè stessa in modo da ridursi, per esempio a due curve coincidenti, porta il dimezzarsi della suddetta caratteristica.

Perciò il numero $\Delta + [\dot{J}]$ si può considerare come l'aumento che subisce la caratteristica di Eulero Poincaré della riemanniana della generica curva di H quando questa assume la posizione di C.

a rigata di genere $p > 0$ e in quest'ultimo caso H è formato da una involuzione entro il fascio di genere p di curve razionali di F.

Invero poichè $\Delta < 0$, la generica curva di H dev'essere spezzata e quindi H essere formato con una involuzione lineare g_h^1 entro un fascio L (razionale o no) di curve D irriducibili ($h \geq 2$). Se il genere π della generica D è nullo, si ottiene l'asserto in virtù del teorema di NOETHER-ENRIQUES. Se poi $\pi > 0$, il genere virtuale π_h delle curve di H è: $\pi_h = h\pi + \binom{h}{2}[D, D] - h + 1 > 0$ epperò: $I + 4 \leq I + 4\pi_h \leq \Delta < 0$. Allora per un teorema di DANTONI (*Determinazioni delle superficie con serie di Severi d'ordine nullo o negativo.* «Atti dell'Acc. d'Italia», to. XIV 1943) F è riferibile ad una superficie rigata di genere $p > 0$.

Allora $I \geq -4p$ (si tenga conto, qualora F contenesse delle curve eccezionali di prima specie che il valore di I è maggiore del valore che lo stesso invariante assume sui vari modelli di F, privi di curve eccezionali) e L coincide necessariamente col fascio di genere p di curve razionali di F perchè, se L fosse lineare, sarebbe certamente $\pi \geq p$ e quindi $\pi_h \geq h\pi - h + 1 = \pi + (h-1)(\pi - 1) \geq p$ onde $\Delta \geq I + 4\pi_h \geq -4p + 4p = 0$, contro il supposto.

(3) Ci riferiamo, per semplicità, ad un fascio privo di punti base.

Matematica (Serie di Fourier). — *Un'osservazione sui coefficienti di Fourier delle funzioni crescenti.* Nota di M. PAGNI, presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.

C. Carathéodory in una sua classica Memoria (1) da il seguente

TEOREMA. — *Affinchè i numeri della successione* $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots$ *siano i coefficienti di Fourier di una funzione monotona (non decrescente)* $\lambda(t)$ *definita in* $(0, 2\pi)$, *è necessario e sufficiente che posto*

$$\alpha_k = a_k - ib_k \text{ e } \varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \zeta^k, \text{ la funzione } \psi(\zeta) = c_0 \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + i\zeta\varphi'(\zeta)$$

possieda nell'interno del cerchio unità $|\zeta| < 1$, *per* c_0 *sufficientemente grande, parte reale sempre positiva.*

Ci proponiamo qui di stabilire una condizione necessaria e sufficiente perchè una data successione di numeri sia successione di Fourier di una funzione $\lambda(t)$ crescente in senso stretto (una funzione $\lambda(t)$ definita in (a, b), diremo crescente in senso stretto, se per ogni coppia di valori $t_1 < t_2$ di (a, b) si ha $\lambda(t_1) < \lambda(t_2)$).

Consideriamo la funzione $\psi(\zeta)$ del teorema ora citato e scriviamone la parte reale (che denoteremo con $R\psi(\zeta)$) per $|\zeta| < 1$.

Ponendo $\zeta = r(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$, dove $0 \leq r < 1$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$; si ha

$$(1) \qquad R\psi(\zeta) = J(\omega, r) = c_0 \frac{1-r^2}{1-2r\cos\omega + r^2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda(t) \frac{(1-r^2)\,2r\operatorname{sen}(t-\omega)}{[1-2r\cos(t-\omega)+r^2]^2}\,dt.$$

Il termine $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda(t) \frac{(1-r^2)\,2r\operatorname{sen}(t-\omega)}{[1-2r\cos(t-\omega)+r^2]^2}\,dt$ è la derivata rispetto ad ω di $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda(t) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\omega)+r^2}\,dt$, che è l'integrale di Poisson della $\lambda(t)$.

Studiamo ora il comportamento di $R\psi(\zeta) = J(\omega, r)$ per $r \to 1$.

Il primo termine $c_0 \frac{1-r^2}{1-2r\cos\omega+r^2}$, se $\omega \neq 0$ e $\neq 2\pi$, tende per $r \to 1$ allo zero mantenendosi positivo. Il secondo termine:

(*) Nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) C. CARATHÉODORY, *Ueber die Fourierschen Koeffizienten monotonen Funktionen*, « Berl. Ber. », 1920, pp. 559–573.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda(t)\frac{(1-r^2)\,2r\,\mathrm{sen}\,(t-\omega)}{[1-2r\cos(t-\omega)+r^2]^2}\,dt$$

(che come abbiamo osservato è la $\frac{\partial}{\partial\omega}$ dell'integrale di Poisson della $\lambda(t)$) tende [2] per $r\to 1$ ad $\lambda'(\omega)$ in tutti i punti ove questa esista finita. Ne segue che in tutti i punti ove esista finita la $\lambda'(\omega)$ si ha $\lim_{r\to 1} R\,\psi(z) = \lim_{r\to 1} J(\omega, r) = \lambda'(\omega)$.

Ciò posto dimostriamo che:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè i numeri della successione $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots$ *siano i coefficienti di Fourier di una funzione* $\lambda(t)$ *definita in* $(0, 2\pi)$ *ed ivi crescente in senso stretto, è che:*

1° *Posto* $\alpha_k = a_k - i\,b_k$ e $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^k$, *la funzione* $\psi(z) = c_0\frac{1+z}{1-z} + i\,z\,\varphi'(z)$, *possieda nell'interno del cerchio unità* $|z|<1$, *per* c_0 *sufficientemente grande, parte reale* $R\,\psi(z)$ *sempre positiva.*

2° *Posto* $z = r\,e^{i\omega}$, *dove* $0\leq r<1$, $0\leq\omega\leq 2\pi$, *vi sia un'infinità (numerabile) di punti* ω_j *ovunque densa nell'intervallo* $(0, 2\pi)$ *per cui* $\min \lim_{r\to 1} R\,\psi(r\,e^{i\omega_j}) > 0$.

La condizione è sufficiente. Per l'ipotesi 1° la successione $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots a_n, b_n, \cdots$ è successione di Fourier di una funzione $\lambda(t)$ definita in $(0, 2\pi)$, e ivi monotona non decrescente (teorema citato del Carathéodory), occorre provare che $\lambda(t)$ non ha tratti in cui è costante. Se vi fosse un tale tratto sarebbe in esso (estremi al più esclusi) $\lambda'(\omega) = 0$; e quindi un tratto di valori ω in cui $\lim_{r\to 1} R\,\psi(r\,e^{i\omega_0}) = 0$; ma ciò in contrasto all'ipotesi formulate in 2°.

La condizione è necessaria. Sia infatti $\lambda(t)$ una funzione crescente in senso stretto, considerata la sua successione di Fourier e formata la funzione $\psi(z)$, per quanto abbiamo già visto (teorema del Carathéodory), si ha che $R\,\psi(z) > 0$ per $|z|<1$. Ci resta da provare che non vi può essere un tratto tutto formato da punti ω per i quali $\min \lim_{r\to 1} R\,\psi(r\,e^{i\omega_0}) = 0$ [3].

Ammettiamo che esista un tale tratto, che indicheremo con σ, si possono dare due casi:

a) la $\lambda(t)$ è assolutamente continua in σ. La $\lambda'(t)$ che esiste finita in quasi tutto $(0\,2\pi)$ dovrebbe essere in quasi tutto l'intervallo σ uguale allo zero. Ciò, unitamente al fatto che $\lambda(t)$ è assolutamente continua in σ, comporta (contrariamente all'ipotesi $\lambda(t)$ crescente in senso stretto,) $\lambda(t) = \text{cost.}$ in σ.

(2) Intendiamo $r\to 1$, per ω fisso. Il fatto vale anche più in generale, vedere, per esempio, L. TONELLI, *Serie Trigonometriche*, p. 388.

(3) Che $\min \lim_{r\to 1} R\,\psi(r\,e^{i\omega}) \geq 0$ è conseguenza del fatto che $R\,\psi(z) > 0$ per $|z|<1$.

b) la funzione $\lambda(t)$ non è assolutamente continua in σ.

Dimostriamo allora che scelto a piacere un numero $M > 0$ esiste almeno un punto ω_0 di σ in cui $\min \lim_{r \to 1} R\psi(r e^{i\omega_0}) > M$.

Avremo con ciò dimostrato la proposizione.

Osserviamo intanto che i numeri derivati di $\lambda(t)$ sono tutti e quattro non limitati nell'intervallo σ (se uno dei numeri derivati di $\lambda(t)$ fosse limitato in σ, resulterebbe $\lambda(t)$ assolutamente continua in σ).

Consideriamo il numero derivato inferiore destro della $\lambda(t)$; scelto a piacere il numero $M > 0$ esisterà un punto $t_0 \equiv \omega_0$ del tratto σ, in cui detto numero derivato sia maggiore di $2M + 1$. Si potrà allora determinare un numero $\delta > 0$, tale che per ogni $0 \leq u \leq \delta$ si abbia

$$\frac{\lambda(t_0 + u) - \lambda(t_0)}{2u} > M \quad \text{e quindi} \quad \frac{\lambda(t_0 + u) - \lambda(t_0 - u)}{2u} > M;$$

infatti

$$\frac{\lambda(t_0 + u) - \lambda(t_0 - u)}{2u} = \frac{\lambda(t_0 + u) - \lambda(t_0)}{2u} + \frac{\lambda(t_0) - \lambda(t_0 - u)}{2u}$$

e l'ultimo termine della relazione ora scritta, risulta > 0, per essere la $\lambda(t)$ crescente in senso stretto.

D'altra parte possiamo scrivere la (1), decomponendone il termine integrale e cambiando la variabile d'integrazione t in $t_0 + u$, nel seguente modo:

$$R\psi(r e^{i\omega_0}) = c_0 \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\omega_0 + r^2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\lambda(t_0+u) - \lambda(t_0 - u)}{2u} \cdot u \frac{(1 - r^2)\, 2r \operatorname{sen} u}{[1 - 2r\cos u + r^2]^2} du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{t_0 - \delta} \lambda(t) \frac{(1 - r^2)\, 2r \operatorname{sen}(t - \omega_0)}{[1 - 2r\cos(t - \omega_0) + r^2]^2} dt + \frac{1}{2\pi}\int_{t_0+\delta}^{2\pi} \lambda(t) \frac{(1 - r^2)\, 2r \operatorname{sen}(t - \omega_0)}{[1 - 2r\cos(t - \omega_0) + r^2]^2} dt$$

$$\geq c_0 \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\omega_0 + r^2} + \frac{M}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{u(1 - r^2)\, 2r \operatorname{sen} u}{[1 - 2r\cos u + r^2]^2} du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{t_0 - \delta} \lambda(t) \frac{(1 - r^2)\, 2r \operatorname{sen}(t - \omega_0)}{[1 - 2r\cos(t - \omega_0) + r^2]^2} dt + \frac{1}{2\pi}\int_{t_0+\delta}^{2\pi} \lambda(t) \frac{(1 - r^2)\, 2r \operatorname{sen}(t - \omega_0)}{[1 - 2r\cos(t - \omega_0) + r^2]^2} dt.$$

Avremo quindi

$$\min \lim_{r \to 1} R\psi(r e^{i\omega_0}) \geq \min \lim_{r \to 1} \left[c_0 \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\omega_0 + r^2} + \frac{M}{\pi}\int_0^{\delta} u \frac{(1 - r^2)\, 2r \operatorname{sen} u}{[1 - 2r\cos u + r^2]^2} du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\int_0^{t_0 - \delta} \lambda(t) \frac{(1 - r^2)\, 2r \operatorname{sen}(t - \omega_0)}{[1 - 2r\cos(t - \omega_0) + r^2]^2} dt + \frac{1}{2\pi}\int_{t_0+\delta}^{2\pi} \lambda(t) \frac{(1 - r^2)\, 2r \operatorname{sen}(t - \omega_0)}{[1 - 2r\cos(t - \omega_0) + r^2]^2} dt \right];$$

Ed osservando che tutti i termini dentro parentesi ad eccezione di $\frac{M}{\pi}\int_0^{\delta} u\,\frac{(1-r^2)\,2r\,\operatorname{sen} u}{[1-2r\cos u+r^2]^2}\,du$ tendono allo zero per $r\to 1$ abbiamo

$$\min \lim_{r\to 1} R\psi(re^{i\omega_0}) \geqq \min \lim_{r\to 1} \frac{M}{\pi}\int_0^{\delta} u\,\frac{(1-r^2)\,2r\,\operatorname{sen} u}{[1-2r\cos u+r^2]^2}\,du$$

ed essendo $\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} u\,\frac{(1-r^2)\,2r\,\operatorname{sen} u}{[1-2r\cos u+r^2]^2}\,du = 1$ risulta

$$\min \lim_{r\to 1} R\psi(re^{i\omega_0}) \geqq 2M, \text{ e quindi } \min \lim_{r\to 1} R\psi(re^{i\omega_0}) > M.$$

Matematica (Calcolo delle Variazioni). — *Sopra l'esistenza dell'estremo in campi illimitati.* Nota di S. CINQUINI, presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.

Nelle nostre ricerche di alcuni anni fa (1) dedicate agli integrali del Calcolo delle variazioni

$$I^{[n]}_{C^{[n]}} = \int_{C^{[n]}} f(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x))\,dx \quad , \quad \left(y^{(j)}(x) = \frac{d^j y(x)}{dx^j}\right)$$

abbiamo stabilito, tra l'altro, parecchi teoremi di esistenza dell'estremo assoluto in campi illimitati, tra i quali citiamo il seguente (2):

TEOREMA A. – *Se*: I) *esiste un numero finito* $h > 0$, *tale che, in tutti i punti* $(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ *del campo illimitato* $A^{[n]}$, *sia* $-h \leqq x \leqq h$; II) *l'integrale* $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ *è quasi regolare positivo*; III) *per* $|y^{(n)}| \to \infty$ *è*

$$\left|\frac{f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})}{y^{(n)}}\right| \to \infty$$

uniformemente in tutto $A^{[n]}$; IV) *esiste un numero finito* N *tale che, in tutti i punti* $(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$ *e per ogni valore finito di* $y^{(n)}$, *sia*

$$f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \geqq N;$$

V) $K^{[n]}$ *è una classe, completa di ordine n, di curve* $C^{[n]}$: $y = y(x)$ *per ognuna delle quali esiste almeno una n-pla di valori* x_j, $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$, *(di-*

(*) Nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle variazioni di ordine n.* («Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa», vol. V, pp. 169–190) (1936). *Nuovi teoremi di esistenza dell'estremo in campi illimitati per i problemi di Calcolo delle variazioni di ordine n.* (Ibidem, vol. VI, pp. 191–209) (1937). Tali lavori verranno citati nel seguito con Memoria (I) e Memoria (II) rispettivamente.

Per tutte le generalità rinviamo alla Memoria (I).

(2) Vedi Memoria (II), n. 8.

stinti o no), appartenenti al rispettivo intervallo di definizione, i quali possono anche essere variabili al variare di $C^{[n]}$ *nella classe* $K^{[n]}$ *e per i quali sono verificate le disuguaglianze*

$$|y^{(j)}(x_j)| \leq L, \qquad (j = 0, 1, \cdots, n-1 \; ; \; y^{(0)} \equiv y),$$

con L *numero fisso dipendente soltanto dalla classe considerata; allora nella classe* $K^{[n]}$ *esiste il minimo assoluto di* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$.

A proposito di tale teorema vogliamo ricordare, innanzi tutto, che le condizioni III), IV), per quanto tra loro indipendenti [3], possono sembrare nel loro insieme piuttosto restrittive, specialmente per il fatto che la III) è verificata in modo uniforme; quindi non ci sembra inutile rilevare che se si sopprime, senz'altro, o la IV) o l'ipotesi che la III) sia verificata uniformemente, il Teorema A non è più valido: ciò si mostra immediatamente mediante qualche esempio che indichiamo nel n. 2.

Tuttavia nella nostra Memoria (II) sono contenute parecchie altre proposizioni, nelle quali le ipotesi III) e IV) sono poste sotto altra forma e in particolare la III) è attenuata; però in tutte queste proposizioni, ad eccezione di una sola [4], la funzione $f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$ risulta inferiormente limitata. Nella presente Nota vogliamo rilevare sia (n. 3) un nuovo teorema nel quale quest'ultima ipotesi non è verificata, sia (n. 5) un'estensione del teorema stesso nella quale è contenuta come caso particolare anche la proposizione citata in [4]: qualche esempio mette in evidenza quanto ampia sia la portata di questi nuovi risultati.

2. a) *Se la funzione* $f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$ *non è inferiormente limitata, il Teorema* A *non è valido.*

Supponiamo per semplicità $n = 1$, soggiungendo che l'esempio che ora indichiamo si adatta subito al caso di $n > 1$.

Sia

$$(a) \qquad f(x, y, y') \equiv y'^2 + x^4 y^4 (y'^2 - 1),$$

e si consideri la classe completa di curve

$$C_r^{[1]} : \quad y = y_r(x) \quad , \quad (0 \leq x \leq 1), \qquad r = 1, 2, \cdots,$$

con

$$y_r(x) = r^2 x, \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{r} \quad ; \quad y_r(x) = r, \quad \text{per} \quad \frac{1}{r} \leq x \leq 1,$$

per le quali è

$$y_r(0) = 0.$$

Ad eccezione della IV) sono verificate tutte le altre ipotesi del Teorema A, e in particolare la III) in modo uniforme, essendo, per $|y'| \geq 1$, $f(x, y, y') \geq y'^2$;

(3) Vedi luogo cit. in (2).
(4) Vedi Memoria (II), n. 11.

però nella classe considerata non esiste il minimo assoluto di $I^{[1]}_{C^{[1]}}$. Infatti risulta

$$I^{[1]}_{C^{[1]}_r} = \int_0^{\frac{1}{r}} [r^4 + (r^4 - 1) r^8 x^8]\, dx - \int_{\frac{1}{r}}^{1} r^4 x^4\, dx = \frac{10}{9} r^3 + \frac{4}{45} \frac{1}{r} - \frac{1}{5} r^4,$$

e quindi

$$I^{[1]}_{C^{[1]}_r} \to -\infty, \quad \text{per} \quad r \to +\infty.$$

b) *Se l'ipotesi* III) *è verificata in modo non uniforme, il Teorema* A *non è valido.*

Supposto dapprima $n > 1$, consideriamo la funzione

$$f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \equiv \frac{1 + [y^{(n)}]^2}{(1 + [y^{(n-2)}]^2)^2},$$

e la classe completa di ordine n di curve

$$C^{[n]}_r: \qquad y = y_r(x) \equiv r \operatorname{sen} x \quad , \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right), \qquad r = 1, 2, \cdots,$$

per le quali è

$$y_r(0) = y''_r(0) = \cdots = 0 \quad ; \quad y'_r\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'''_r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cdots = 0.$$

Sono soddisfatte tutte le altre ipotesi del Teorema A, ad eccezione della III), la quale è verificata in modo non uniforme.

Supposto, per fissare le idee, n pari, risulta mediante la sostituzione $u = \operatorname{tg} x$

$$I^{[n]}_{C^{[n]}_r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + r^2 \operatorname{sen}^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (r^2 + 1) u^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}},$$

e quindi, per $r \to \infty$, $I^{[n]}_{C^{[n]}_r} \to 0$, senza che vi sia alcuna curva della classe per la quale sia $I^{[n]}_{C^{[n]}} = 0$.

Alla stessa conclusione si perviene per n dispari e > 1.

Infine per $n = 1$, consideriamo la funzione

$$f(x, y, y') \equiv \frac{y'^2}{(1 + y^2)^2} + \frac{(xy - 1)^2}{1 + y^2},$$

e la classe completa di curve $C^{[1]}_r$: $y = y_r(x)$, $(-1 \leq x \leq 1)$, $r = 1, 2, \cdots$ con $y_r(x) = r$, per $-1 \leq x \leq \frac{1}{r}$; $y_r(x) = \frac{1}{x}$, per $\frac{1}{r} \leq x \leq 1$; per le quali è $y_r(1) = 1$.

Risulta

$$I_{C_r}^{[1]} = \int_{-1}^{\frac{1}{r}} \frac{(rx-1)^2}{1+r^2}\,dx + \int_{\frac{1}{r}}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+r^2}\,\frac{(r+1)^3}{3r} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\,\frac{r}{r^2+1},$$

e si verifica che, per $r \to +\infty$, $I_{C_r}^{[1]} \to \frac{\pi}{8} + \frac{7}{12}$, sempre decrescendo, cosicchè nella classe considerata non esiste il minimo di $I_{C_r}^{[1]}$.

3. Teorema B. – *Siano verificate le ipotesi* I), II), V) *del Teorema* A *e inoltre*: III') *in ciascun punto* $(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ *del campo* $A^{[n]}$ *sia, per* $|y^{[n]}| \to \infty$,

$$\left|\frac{f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})}{y^{(n)}}\right| \to \infty;$$

IV') *sia*

(1) $$f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \equiv f_0(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) - f_1(x, y, y', \cdots, y^{(n)}),$$

ed esistano due funzioni $\Psi_0(u)$, $\Psi_1(u)$, *definite e continue per* $u \geqq 0$, *non decrescenti, con* $\Psi_0(u)$ *concava verso l'alto e tali che sia per* $u \to \infty$

(2) $$\Psi_0(u) - \Psi_1(u) \to \infty,$$

in modo che, indicato con (a^*, b^*) *il minimo intervallo dell'asse x nel quale sono contenuti tutti gli intervalli di definizione delle curve della classe* $K^{[n]}$ *e con* Ω_ν *il*

$$\max\left|\int_{v_\nu}^{x} dz_\nu \int_{v_{\nu-1}}^{z_\nu} dz_{\nu-1} \cdots \int_{v_2}^{z_3} dz_2 \int_{v_1}^{z_2} dz_1\right|$$

al variare di $v_1, v_2, \cdots, v_\nu, x$ *nell'intervallo* (a^*, b^*), *risulti*

(3) $f_0(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \geqq \Psi_0(|y^{(n)}|)$, $f_1(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \leqq \Psi_1(k|y^{(n-\mu)}|)$,

ove μ *è un intero con* $2 \leqq \mu \leqq n$, *è* $k > 0$, *ed è verificata la disuguaglianza*

(4) $$k(b^* - a^*)\,\Omega_{\mu-1} < 1.$$

Allora nella classe $K^{[n]}$ *esiste il minimo assoluto di* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$.

Infatti sia $C_0^{[n]}$ una curva di $K^{[n]}$, e si abbia $I_{C_0^{[n]}}^{[n]} = M_0$; allora possiamo limitarci a considerare la sottoclasse $K_1^{[n]}$, costituita da quelle curve di $K^{[n]}$ per la quali è

(5) $$I_{C^{[n]}}^{[n]} \leqq M_0 + 1,$$

perchè il minimo di $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ in $K_1^{[n]}$ coincide con quello in $K^{[n]}$.

Se $C^{[n]}$: $y = y(x)$, $(a \leq x \leq b)$ è una curva qualunque di $K_1^{[n]}$ abbiamo

$$y^{(n-\mu)}(x) = y^{(n-\mu)}(x_{n-\mu}) + y^{(n-\mu+1)}(x_{n-\mu+1}) \int_{x_{n-\mu}}^{x} du +$$

$$+ y^{(n-\mu+2)}(x_{n-\mu+2}) \int_{x_{n-\mu}}^{x} du_1 \int_{x_{n-\mu+1}}^{u_1} du_2 + \cdots$$

$$\cdots + \int_{x_{n-\mu}}^{x} du_1 \int_{x_{n-\mu+1}}^{u_1} du_2 \cdots \int_{x_{n-3}}^{u_{\mu-3}} du_{\mu-2} \int_{x_{n-2}}^{u_{\mu-2}} y^{(n-1)}(u_{\mu-1})\, du_{\mu-1},$$

e quindi, applicando all'ultimo integrale il teorema della media e prendendo poi il modulo, in virtù dell'ipotesi V) risulta per ogni x di (a, b)

$$|y^{(n-\mu)}(x)| \leq L \sum_{j=0}^{\mu-2} (b^* - a^*)^j + |y^{(n-1)}(\xi)|\, \Omega_{\mu-1} \leq$$

$$\leq L \sum_{j=0}^{\mu-2} (b^* - a^*)^j + (L + Y^{(n-1)})\, \Omega_{\mu-1},$$

ove abbiamo indicato con $Y^{(n-1)}$ la differenza tra il massimo e il minimo della derivata $y^{(n-1)}(x)$ nei punti di (a, b).

Quindi, posto

$$L' = k L \left[\sum_{j=0}^{\mu-2} (b^* - a^*)^j + \Omega_{\mu-1} \right],$$

siccome $\Psi_1(u)$ è non decrescente risulta

$$\int_a^b \Psi_1(k\,|y^{(n-\mu)}(x)|)\, dx \leq (b-a)\, \Psi_1(L' + k\,\Omega_{\mu-1}\, Y^{(n-1)}).$$

D'altra parte, in virtù della disuguaglianza di Jensen e siccome $\Psi_0(u)$ è non decrescente abbiamo

$$\int_a^b \Psi_0(|y^{(n)}|)\, dx \geq (b-a)\, \Psi_0\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |y^{(n)}(x)|\, dx\right) \geq (b-a)\, \Psi_0\left(\frac{Y^{(n-1)}}{b-a}\right),$$

e quindi dalle (1) e (3) segue

$$(6) \qquad I_{C^{[n]}}^{[n]} \geq (b-a)\left[\Psi_0\left(\frac{Y^{(n-1)}}{b-a}\right) - \Psi_1(L' + k\,\Omega_{\mu-1}\, Y^{(n-1)})\right].$$

A questo punto occorre distinguere due casi: se le ampiezze degli intervalli di definizione delle curve di $K_1^{[n]}$ hanno un limite inferiore $\omega > 0$, in virtù della (4) e della (2) il secondo membro della (6) tende a $+\infty$ per $Y^{(n-1)} \to +\infty$, e quindi, tenendo presente la (5) e l'ipotesi V), si conclude in modo noto che le derivate di ordine $n-1$ delle funzioni che definiscono le curve di $K_1^{[n]}$ sono ugualmente limitate.

Invece, se è $\omega = 0$, siccome tale conclusione è senz'altro valida per quelle curve di $K_1^{[n]}$ i cui intervalli di definizione hanno ampiezza $\geqq 1 : [1 + k\Omega_{\mu-1})$, consideriamo una curva qualunque di $K_1^{[n]}$ per la quale sia

$$b - a < \frac{1}{1 + k\Omega_{\mu-1}}. \tag{7}$$

Allora, in conseguenza delle ipotesi fatte su $\Psi_0(u)$ e $\Psi_1(u)$, risulta $\Psi_0(u) \to +\infty$, per $u \to \infty$, e si può determinare un $u_0 \geqq 0$, in modo che, per ogni $u \geqq u_0$, sia

$$\Psi_0(u) \geqq \Psi_1(u) \quad , \quad D^+\Psi_0(u) > 0. \tag{8}$$

Ciò premesso possiamo supporre che sia

$$Y^{(n-1)} \geqq L' \quad , \quad L' + k\Omega_{\mu-1} Y^{(n-1)} \geqq u_0, \tag{9}$$

perchè se una delle (9) non è verificata, il nostro asserto è già provato; allora in virtù della prima delle (8) dalla (6) segue

$$I_{C^{[n]}}^{[n]} \geqq (b-a)\left[\Psi_0\left(\frac{Y^{(n-1)}}{b-a}\right) - \Psi_0(L' + k\Omega_{\mu-1} Y^{(n-1)})\right]. \tag{10}$$

Ma siccome $\Psi_0(u)$ è concava verso l'alto sussiste la disuguaglianza

$$\Psi_0(u) \geqq \Psi_0(L' + k\Omega_{\mu-1} Y^{(n-1)}) + \\ + D^+\Psi_0(L' + k\Omega_{\mu-1} Y^{(n-1)})\,[u - (L' + k\Omega_{\mu-1} Y^{(n-1)})],$$

per ogni $u \geqq L' + k\Omega_{\mu-1} Y^{(n-1)}$ e quindi in particolare per $u = \frac{Y^{(n-1)}}{b-a}$; pertanto dalla (10), siccome $D^+\Psi_0(u)$ è non decrescente, segue

$$I_{C^{[n]}}^{[n]} \geqq D^+\Psi_0(u_0)\,[\{1 - k\Omega_{\mu-1}(b^* - a^*)\}\, Y^{(n-1)} - (b^* - a^*)\, L'],$$

ove il secondo membro tende a $+\infty$ per $Y^{(n-1)} \to +\infty$, e quindi si conclude come sopra che le derivate di ordine $n-1$ delle funzioni da cui sono definite le curve di $K_1^{[n]}$ risultano ugualmente limitate. Pertanto, sempre in virtù dell'ipotesi V), della stessa proprietà godono anche le derivate degli ordini $n-2$, $n-3, \cdots, 1$ e le funzioni stesse.

Per provare il teorema enunciato non rimane che usufruire di un nostro teorema di esistenza dell'estremo in campi limitati (5).

Osservazione. – Se è $x_{n-\mu} \equiv x_{n-\mu+1} \equiv \cdots \equiv x_{n-2}$, alla (4) si può sostituire la disuguaglianza $k\frac{(b^* - a^*)^\mu}{(\mu-1)!} < 1$, la quale per $\mu \geqq 4$ è meno restrittiva della (4).

4. Esempi. *a*) Le condizioni del Teorema B sono verificate dalla funzione

$$f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \equiv \sqrt{1 + [y^{(n)}]^2}\, \lg(1 + [y^{(n)}]^2) - \sqrt{1 + [y^{(n-\mu)}]^2},$$

(5) Vedi Memoria (I), n. 5.

qualunque sia l'ampiezza ($\leq 2h$) dell'intervallo (a^*, b^*). Ciò si verifica subito prendendo

$$\Psi_0(u) = \sqrt{1+u^2}\,\lg(1+u^2) \quad ; \quad \Psi_1(u) \equiv \sqrt{1+\lambda^2 u^2}, \text{ con } \lambda > (b^* - a^*)\,\Omega_{\mu-1},$$

perchè la seconda delle (3) e la (4) risultano soddisfatte per $k = 1 : \lambda$.

b) Sia

$$f(x, y, y', y'') \equiv y''^2 + \frac{1}{1+y'^2} - y^2.$$

Le condizioni del Teorema B sono soddisfatte per

$$b^* - a^* < 1. \tag{11}$$

Infatti, posto

$$f_0(x, y, y', y'') = y''^2 + \frac{1}{1+y'^2} \quad , \quad f_1(x, y, y', y'') \equiv y^2,$$

se prendiamo $\Psi_0(u) \equiv u^2$, $\Psi_1(u) \equiv \lambda^2 u^2$, con $(b^* - a^*)^2 < \lambda < 1$, la seconda delle (3) e la (4) risultano verificate per $k = 1 : \lambda$ essendo $\Omega_1 = b^* - a^*$.

D'altra parte, se non è soddisfatta la (11) il minimo può mancare; infatti, considerata la classe, completa di ordine 2, di curve

$$C_r^{[2]}: \qquad y = y_r(x) \equiv r \operatorname{sen} x \quad , \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right), \qquad r = 1, 2, \cdots,$$

per le quali è $y_r(0) = 0$, $y_r'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, ma non è verificato la (11), risulta

$$I_{C_r^{[2]}}^{[2]} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + r^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} \to 0, \text{ per } r \to +\infty,$$

e quindi non esiste il minimo $I_{C^{[2]}}^{[2]}$.

5. UN'ESTENSIONE DEL TEOREMA B. – *Il Teorema* B *è ancora valido quando, ferme restando tutte le altre ipotesi, in luogo delle* (1), (2), (3), (4) è

$$f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \equiv f_0(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x, y, y', \cdots, y^{(n)}),$$

$$\Psi_0(u) - \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(u) \to +\infty, \text{ per } u \to +\infty,$$

ove $\Psi_0(u), \Psi_1(u), \cdots, \Psi_n(u)$ *sono funzioni definite, continue e non decrescenti per* $u \geq 0$ *con* $\Psi_0(u)$ *concava verso l'alto e tali che sia:*

$$f_0(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \geq \Psi_0(|y^{(n)}|) \quad ;$$

$$f_i(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \leq \Psi_i(k_i |y^{(n-i)}|), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$k_i (b^* - a^*)\,\Omega_{i-1} < 1, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n\,;\ \Omega_0 = 1\,;\ k_i > 0).$$

OSSERVAZIONE. – Si può fare un'osservazione analoga a quella del n. 3.

ESEMPIO. – Sia $f(x, y, y', y'') = y''^2 - y'^2 - y^2$. La proposizione del presente numero assicura l'esistenza del minimo per $b^* - a^* < \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$; ciò si verifica in modo analogo al n. 4, *b*) prendendo $\Psi_0(u) \equiv u^2$; $\Psi_1(u) \equiv \lambda^2 u^2$; $\Psi_2(u) \equiv \lambda^4 u^2$, con $b^* - a^* < \lambda < \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

D'altra parte considerata la classe, completa di ordine 2, di curve;

$$C_r^{[2]}: \qquad y = y_r(x) \equiv r \operatorname{sent} x, \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2t}\right) \qquad r = 1, 2, \cdots,$$

per le quali è $y_r(0) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2t}\right) = 0$, si vede immediatamente che, per $0 < t < \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ non esiste il minimo di $I_{C^{[2]}}^{[2]}$ nella classe considerata, perchè risulta $I_{C^{[2]}}^{[2]} = r^2 \frac{\pi}{4}\left(\frac{t^4-1}{t} - t\right) \to -\infty$, per $r \to +\infty$.

Matematica (Equazioni alle derivate parziali). — *Sopra i sistemi di equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali e multiple*. Nota di M. CINQUINI-CIBRARIO, presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. In una Memoria recente (1) abbiamo risolto, nel campo delle funzioni di variabile reale, il problema di Cauchy per un sistema di equazioni *non lineari* alle derivate parziali del primo ordine:

$$(I) \qquad F_i(x, y; z_1, z_2, \cdots, z_n; p_1, p_2, \cdots, p_n; q_1, q_2, \cdots, q_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

dove si è posto:

$$p_j = \frac{\partial z_j}{\partial x} \quad ; \quad q_j = \frac{\partial z_j}{\partial y} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

nell'ipotesi che il sistema stesso sia *del tipo iperbolico* nel campo D di variabilità delle $x, y; z_j; p_j; q_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, in cui sono definite le funzioni F_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, cioè che posto:

$$P_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \quad ; \quad Q_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

(*) Nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sopra il problema di Cauchy per i sistemi di equazioni alle derivate parziali del primo ordine*. « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova », anno XVII, pp. 75-96 (1948).

Rimandiamo a tale Memoria, che citeremo nel seguito con (M), per le notazioni e la bibliografia.

l'equazione:

$$(II)\qquad \begin{vmatrix} P_{11}\,dy - Q_{11}\,dx & P_{12}\,dy - Q_{12}\,dx \cdots & P_{1n}\,dy - Q_{1n}\,dx \\ P_{21}\,dy - Q_{21}\,dx & P_{22}\,dy - Q_{22}\,dx \cdots & P_{2n}\,dy - Q_{2n}\,dx \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ P_{n1}\,dy - Q_{n1}\,dx & P_{n2}\,dy - Q_{n2}\,dx \cdots & P_{nn}\,dy - Q_{nn}\,dx \end{vmatrix} = 0$$

abbia sempre n radici *reali* e *distinte*, comunque varino $x, y; z_j; p_j; q_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ nel campo D.

Sorge ora la questione di determinare in quali casi il problema di Cauchy per il sistema (I) è risolubile nel campo delle funzioni di variabile reale, quando il sistema (I) ammette caratteristiche multiple, cioè quando le radici dell'equazione (II) non sono tutte distinte.

Nella presente Nota ci proponiamo di portare un primo contributo a quest'ordine di ricerche, mettendo in luce una classe di sistemi (I) a caratteristiche tutte reali e multiple, per i quali il problema di Cauchy è risolubile nel campo delle funzioni di variabile reale cogli stessi metodi tenuti in (M).

Se le radici $\rho = \frac{dy}{dx}$ della (II) sono tutte semplici per ognuna di esse la caratteristica del determinante, che sta a primo membro della (II), è proprio $n-1$. Se invece una radice della (II) è doppia, tripla, $\cdots$, k-pla, in corrispondenza a questa radice tale caratteristica è $\geqq n-2$, $\geqq n-3, \cdots$, $\geqq n-k$ rispettivamente, e viceversa se la caratteristica del determinante è $n-2$, $n-3, \cdots, n-k$ per una data radice della (II), la radice stessa è almeno doppia, tripla, $\cdots$, k-pla [2]. Nella presente Nota consideriamo la classe dei sistemi (I) per cui vale la seguente:

IPOTESI A). – *Tutte le radici* $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_l$ $(n \geqq l \geqq 2)$ *dell'equazione* (II) *sono reali nel campo* D; *ognuna di esse ha sempre lo stesso ordine di molteplicità in tutto il campo* D; *e, se* $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_l$ *sono gli ordini di molteplicità rispettivi* $(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_l = n)$, *il determinante a primo membro della* (II) *ha, in corrispondenza alle radici* $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_l$, *proprio le caratteristiche* $n-\nu_1, n-\nu_2, \cdots, n-\nu_l$ *rispettivamente in tutto il campo* D.

2. Le funzioni $F_i(x, y; z_1, z_2, \cdots, z_n; p_1, p_2 \cdots, p_n; q_1, q_2, \cdots, q_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ siano $D^{III} - L$ in tutto il campo D [3], e valga l'ipotesi A); sia dato nel piano xy un arco γ di curva di equazione $y = f(x)$, dove $f(x)$ è una funzione $D^{II} - L$ definita in un intervallo $x_1 \leqq x \leqq x_2$; siano inoltre assegnate le $3n$ funzioni: $\zeta_j(x), \pi_j(x), \chi_j(x)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ definite nello stesso intervallo, ivi $D^{II} - L$, e tali che i valori:

$$x, y = f(x);\ z_j = \zeta_j(x);\ p_j = \pi_j(x);\ q_j = \chi_j(x) \quad (j = 1, 2, \cdots, n;\ x_1 \leqq x \leqq x_2)$$

(2) Per queste considerazioni cfr. anche E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes*, to. II, Paris, Hermann, Chap. X, n. 216, p. 323 (1898).

(3) Chiameremo funzione D^n una funzione finita e continua con tutte le sue derivate fino a quelle di ordine n incluse, e funzione $D^n - L$ una funzione D^n, le cui derivate n^{esime} sono, inoltre, lipschitziane.

per ogni x dell'intervallo $x_1 \leqq x \leqq x_2$ siano tutti interni al campo D, e che valgano le:

$$\zeta_j'(x) = \pi_j(x) + \chi_j(x) f'(x) \quad ; \quad F_i[x, f(x) ; \zeta_1(x), \zeta_2(x), \cdots, \zeta_n(x) ; \pi_1(x), \pi_2(x), \cdots, \pi_n(x) ; \chi_1(x), \chi_2(x), \cdots, \chi_n(x)] = 0$$
$$(i, j = 1, 2, \cdots, n \; ; \; x_1 \leqq x \leqq x_2).$$

Inoltre quando nella (II) le P_{ij}, Q_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ si calcolino per $y = f(x) ; z_j = \zeta_j(x) ; p_j = \pi_j(x), q_j = \chi_j(x)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, il valore $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ *non sia mai radice* della (II), comunque sia x nell'intervallo $x_1 \leqq x \leqq x_2$.

In queste ipotesi vale il:

TEOREMA. – *Esiste uno e un solo sistema di integrali* $z_j = z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ *del sistema* (I), *che sono definiti in un campo* δ *del piano* xy, *abbastanza piccolo, contenente l'arco di curva* γ, *sono ivi funzioni* $D^{III} - L$, *e nei punti di* γ *soddisfano le condizioni*:

$$\text{(III)} \qquad z_j[x, f(x)] = \zeta_j(x) \quad ; \quad p_j[x, f(x)] = \pi_j(x) \quad ; \quad q_j[x, f(x)] = \chi_j(x)$$
$$(j = 1, 2, \cdots, n \; ; \; x_1 \leqq x \leqq x_2),$$

cioè il problema di Cauchy per il sistema (I), *coi valori iniziali assegnati* $\zeta_j(x), \pi_j(x), \chi_j(x)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ *sulla curva* γ, *è risolubile in modo unico* (4).

3. Come in (M), si porti l'origine in un punto della curva γ, e si supponga, il che non è restrittivo, che tutte le funzioni cercate $z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ si annullino nell'origine assieme alle loro derivate prime e seconde; inoltre gli assi x, y siano scelti non coincidenti con alcuna delle l direzioni caratteristiche nell'origine. Introdotte poi, come in (M), le variabili λ, μ, ad ogni sistema di integrali $z_j = z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ del sistema (I) corrisponde un sistema di $3n+2$ funzioni di λ, μ: $x = x(\lambda, \mu)$, $y = y(\lambda, \mu) ; z_j = \bar{z}_j(\lambda, \mu) ; p_j = \bar{p}_j(\lambda, \mu) ; q_j = \bar{q}_j(\lambda, \mu)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, che soddisfano il sistema delle $3n + 2$ equazioni:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} y_\lambda = \rho_1 x_\lambda \; ; \; y_\mu = \rho_2 x_\mu \; ; \; \bar{z}_{j\lambda} = \bar{p}_j x_\lambda + \bar{q}_j y_\lambda & (j = 1, 2, \cdots, n) \\ \left(\frac{dF_i}{dx}\right) x_\lambda + \left(\frac{dF_i}{dy}\right) y_\lambda + \sum_{j=1}^{n} (P_{ij} \bar{p}_{j\lambda} + Q_{ij} \bar{q}_{j\lambda}) & (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \sum_{i=1}^{n} h_i^{(1,s)} \left(\frac{dF_i}{dx}\right) x_\lambda + \sum_{i,j=1}^{n} h_i^{(1,s)} P_{ij} \bar{p}_{j\lambda} = 0 & (s = 1, 2, \cdots, \nu_1) \\ \sum_{i=1}^{n} h_i^{(2,s)} \left(\frac{dF_i}{dx}\right) x_\mu + \sum_{i,j=1}^{n} h_i^{(2,s)} P_{ij} \bar{p}_{j\mu} = 0 & (s = 1, 2, \cdots, \nu_2) \\ \sum_{i=1}^{n} h_i^{(r,s)} \left(\frac{dF_i}{dx}\right) \frac{dx}{dt_r} + \sum_{i,j=1}^{n} h_i^{(r,s)} P_{ij} \frac{d\bar{p}_j}{dt_r} & (r = 3, 4, \cdots, l \; ; \; s = 1, 2, \cdots, \nu_r). \end{cases}$$

(4) Per le condizioni (III) cfr. anche la nota (8), p. 78 e la nota (9) p. 79 di (M).

dove $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_l$ sono tutte le radici *distinte* della (II), dove inoltre:

$$\left(\frac{dF_i}{dx}\right) = \frac{\partial F_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial z_j} p_j \quad ; \quad \left(\frac{dF_i}{dy}\right) = \frac{\partial F_i}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial z_j} q_j \quad . \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\frac{d}{dt_r} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt_r} + \frac{\partial}{\partial \mu}\frac{d\mu}{dt_r} \qquad (r = 3, 4, \cdots, l),$$

e il rapporto tra le $\frac{d\lambda}{dt_r}, \frac{d\mu}{dt_r}$ è determinato dalle:

$$\frac{dy}{dt_r} = \rho_r \frac{dx}{dt_r} \qquad (r = 3, 4, \cdots, l),$$

e dove infine per ogni r fissato $(r = 1, 2, \cdots, l)$ le: $h_1^{(r,s)}, h_2^{(r,s)}, \cdots, h_n^{(r,s)}$ $(s = 1, 2, \cdots, \nu_r)$ sono ν_r sistemi linearmente indipendenti di soluzioni non tutte nulle del sistema di equazioni lineari:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} (P_{ij}\rho_r - Q_{ij}) h_i^{(r,s)} = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n \; ; \; s = 1, 2, \cdots, \nu_r \; ; \; r = 1, 2, \cdots, l).$$

Tali sistemi esistono certamente per l'ipotesi A), per cui il determinante a primo membro della (II) in corrispondenza alla radice ρ_r di molteplicità ν_r ha proprio caratteristica $n - \nu_r$ (5).

4. Come in (M), si dimostra che, se esiste uno e un solo sistema di integrali del sistema (I) $z_j = z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ che soddisfano le condizioni (III), allora ammette uno e un solo sistema di soluzioni il:

PROBLEMA a). – *Determinare un sistema di funzioni*: $x(\lambda, \mu)$, $y(\lambda, \mu)$; $\bar{z}_j(\lambda, \mu)$; $\bar{p}_j(\lambda, \mu)$; $\bar{q}_j(\lambda, \mu)$, *definite almeno per* $|\lambda|, |\mu|$ *abbastanza piccoli, e* $D^{II} - L$, *che soddisfano le* (IV), *e inoltre le*:

$$(V) \quad \begin{cases} x(\lambda, -\lambda) = \lambda \quad ; \quad y(\lambda, -\lambda) = f(\lambda); \\ \bar{z}_j(\lambda, -\lambda) = \zeta_j(\lambda) \quad ; \quad \bar{p}_j(\lambda, -\lambda) = \pi_j(\lambda) \quad ; \quad \bar{q}_j(\lambda, -\lambda) = \chi_j(\lambda) \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

Tale problema è un caso particolare di una questione studiata in un nostro precedente lavoro (6); si deve verificare che sono soddisfatte tutte le ipotesi, ivi introdotte. Tale verifica è immediata (7), tranne per la condizione:

$$(2) \qquad H \neq 0,$$

dove H indica il determinante, i cui elementi sono le $h_i^{(r,s)}$ $(i = 1, 2, \cdots, n \; ; \; r = 1, 2, \cdots, l \; ; \; s = 1, 2, \cdots, \nu_r \; ; \; \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_l = n)$.

(5) Per il sistema (IV) cfr. anche (M) § 2, n. 3, form. (IV_1), (IV_2), (IV_3), p. 83, dove il sistema è dato nell'ipotesi che le radici dell'equazione (II) siano tutte semplici. Per il caso delle radici multiple vi è un cenno nel GOURSAT, loc. cit.

(6) M. CINQUINI-CIBRARIO, *Un teorema di esistenza e di unicità per un sistema di equazioni alle derivate parziali*. «Ann. di Mat.», ser. IV, t. XXIV, pp. 157-175 (1945). Cfr. anche (M) nota (6) p. 76 e nota (14) p. 85.

(7) Cfr. (M), § 3, n. 1, pp. 85-86.

Si indichino ora con $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \cdots, \rho^{(n)}$ le n radici, per ipotesi non tutte distinte, della (II), e si indichino con $h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, \cdots, h_n^{(j)}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ gli n sistemi $h_1^{(r,s)}, h_2^{(r,s)}, \cdots, h_n^{(r,s)}$ $(r = 1, 2, \cdots, l\,;\ s = 1, 2, \cdots, \nu_r)$, in modo che, per ogni j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ il sistema $h_1^{(j)} h_2^{(j)}, \cdots, h_n^{(j)}$ corrisponda alla radice $\rho^{(j)}$ della (II). Per provare la (II) si ragioni per assurdo; se è $H = 0$, e se la caratteristica del determinante H è $n - 1$, ragionando come in (M), § 3, n. 2, pp. 86–87, si trova che si possono determinare delle quantità $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, non tutte nulle contemporaneamente, per cui valgono insieme le [8]:

$$\sum_{j=1}^{n} h_i^{(j)} \xi_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

$$\frac{\xi_1 \rho^{(1)}}{\xi_1} = \frac{\xi_2 \rho^{(2)}}{\xi_2} = \cdots = \frac{\xi_n \rho^{(n)}}{\xi_n}\,. \tag{4}$$

Come in (M), si vede che almeno due delle ξ_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ non possono essere nulle contemporaneamente [9]; se sono diverse da zero almeno due quantità ξ_j, ξ_k, tali che le radici $\rho^{(j)}, \rho^{(k)}$ siano distinte, si ha un assurdo; altrimenti, se le ξ_j sono tutte nulle, tranne quelle relative a una *stessa* radice ρ_r, e siano, per esempio (il che non è restrittivo) $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\alpha$, dalle (3) segue che:

$$\sum_{j=1}^{\alpha} h_i^{(j)} \xi_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)\,; \tag{5}$$

ma allora gli α sistemi $h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, \cdots, h_n^{(j)}$ $(j = 1, 2, \cdots, \alpha)$, che sono tutti relativi a quella stessa radice ρ_r, non sono più linearmente indipendenti, contro quanto si è detto nel precedente n. 3.

Se la caratteristica del determinante H è $n - t$ $(1 < t < n)$, ed è, per esempio (il che non è restrittivo), diverso da zero un minore estratto dalle ultime $n - t$ colonne, ragionando come in (M), § 3, n. 2, pp. 87–88, si trova che le quantità $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, che soddisfano le (3), si possono scegliere in modo che valgano le:

$$\begin{cases} \xi_1 = 1\,;\ \xi_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_t = 0\,; \\ \xi_{t+1}\,\rho^{(t+1)} = \xi_{t+1}\,\rho^{(1)}\,;\ \xi_{t+2}\,\rho^{(t+2)} = \xi_{t+2}\,\rho^{(1)}\,;\ \cdots;\ \xi_n\,\rho^{(n)} = \xi_n\,\rho^{(1)}\,. \end{cases} \tag{6}$$

Segue di qui che, per ognuna delle ξ_j diversa da zero $(j = t+1, t+2, \cdots, n)$, si ha $\rho^{(j)} = \rho^{(1)}$; siano, per esempio, il che non è restrittivo, diverse da zero $\xi_{t+1}, \xi_{t+2}, \cdots, \xi_\alpha$ e nulle le altre; allora le (3) divengono:

$$h_i^{(1)} + \sum_{j=t+1}^{\alpha} h_i^{(j)} \xi_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)\,; \tag{7}$$

(8) Cfr. (M), § 3, n. 2, form. (5), p. 86 e form. (9), p. 87.

(9) Cfr. (M) nota (15), p. 86; se tutte le ξ_j sono nulle, tranne, per esempio, la sola ξ_1, dalla prima delle (3) segue: $h_1^{(1)} = h_2^{(1)} = \cdots = h_n^{(1)} = 0$, il che è assurdo, dato il modo, in cui è stato definito uno qualunque dei sistemi $h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, \cdots, h_n^{(j)}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ (cfr. il precedente n. 3 e le (1)).

ma allora i corrispondenti sistemi $h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, \cdots, h_n^{(j)}$ $(j = 1, t+1, t+2, \cdots, \alpha)$, che sono tutti relativi alla stessa radice $\rho^{(1)}$ della (II), non sono linearmente indipendenti, contro quanto si è detto al precedente n. 3.

5. Gli stessi metodi tenuti in (M), § 4, pp. 89-91, valgono a dimostrare anche nel caso presente che ogni sistema di soluzioni del PROBLEMA a) conduce ad un sistema di integrali $z_j = z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, che soddisfano le (III); poichè i ragionamenti fatti valgono nell'intorno di un qualunque punto della curva γ, ne riesce completamente dimostrato il teorema del n. 2.

6. *Se* $l = 2$, *comunque sia* n [10], si ha qualche riduzione nelle ipotesi; è sufficiente, perchè valga il teorema, enunciato al n. 2, che le $F_i(x, y; z_1, z_2, \cdots, z_n; p_1, p_2, \cdots, p_n; q_1, q_2, \cdots, q_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ siano funzioni $D^{II} - L$ dei loro argomenti, che valga l'ipotesi A) e che le funzioni $f(x)$; $\zeta_j(x)$; $\pi_j(x)$; $\chi_j(x)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ siano D^I nell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$ e soddisfino le altre ipotesi enunciate al n. 2; gli integrali del sistema (I), che si costruiscono, sono funzioni D^{II}, anzichè $D^{III} - L$.

7. Nel caso del sistema quasi-lineare:

$$\text{(VI)} \qquad \sum_{j=1}^{n} [A_{ij}(x, y; z_1, z_2, \cdots, z_n)\, p_j + B_{ij}(x, y; z_1, z_2, \cdots, z_n)\, q_j] = C_i(x, y; z_1, z_2, \cdots, z_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

è sufficiente per la validità del teorema del n. 2 che le A_{ij}, B_{ij}, C_i $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ siano funzioni $D^{II} - L$ nel campo in cui sono definite, che valga l'ipotesi A), e che siano soddisfatte le altre ipotesi enunciate al n. 2; si tenga presente che nel caso del sistema (VI) non si introducono le funzioni $\pi_j(x)$, $\chi_j(x)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, così che le condizioni (III) divengono semplicemente:

$$\text{(VII)} \qquad z_j[x, f(x)] = \zeta_j(x) \qquad (j = 1, 2, \cdots, n\ ;\ x_1 \leq x \leq x_2);$$

gli integrali del sistema (VI), che soddisfano le (VII), sono funzioni $D^{II} - L$ nel campo δ in cui sono definiti [11].

Se $l = 2$, è sufficiente supporre che le funzioni A_{ij}, B_{ij}, C_i $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ siano $D^I - L$, e che le $f(x), \zeta_j(x)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ siano D^I; gli integrali $z_j = z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ del sistema (VI) che soddisfano le (VII), sono semplicemente D^I.

8. Le considerazioni dei precedenti nn. 2-7 non si applicano al caso $l = 1$, in cui dunque l'equazione (II) ha una sola radice n-pla; se vale l'ipotesi A),

(10) Invece nel caso, in cui le radici sono tutte distinte, queste semplificazioni si hanno proprio soltanto se $n = 2$ (cfr. (M), § 5, pp. 92-93).

(11) Cfr. (M), § 6, pp. 93-96.

per tale radice la caratteristica del determinante a primo membro della (II) è zero. In tale caso si dimostra [12] che il sistema (I) si può porre sotto la forma:

$$A(x, y; z_1, z_2, \cdots, z_n)\, p_i + B(x, y; z_1, z_2, \cdots, z_n)\, q_i = C_i(x, y; z_1, z_2, \cdots, z_n)$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n),$$

e per un tale sistema il problema di Cauchy (nel campo reale) è risolubile con metodi classici, come si vede immediatamente.

Matematica (Topologia). — *Sulle proprietà topologiche dei circuiti d'ordine dispari tracciati sopra quadriche a punti iperbolici.* Nota di M. Piazzolla–Beloch, presentata [*] dal Socio G. Castelnuovo.

1. Nella presente Nota mi occupo dei circuiti d'ordine dispari tracciati sopra una quadrica a punti iperbolici [1], partendo dalla distinzione da me data dei detti circuiti in due categorie, secondo la parità o disparità del numero dei punti in cui essi segano le generatrici dei due sistemi della quadrica, e ne deduco varie proprietà, completando così le mie ricerche sulla configurazione delle curve situate sopra quadriche [2].

2. Per fissare le idee suppongo che la quadrica data sia un iperboloide rigato.

Un circuito d'ordine dispari, tracciato sull'iperboloide, dovendo segare ogni piano in un numero dispari di punti reali [3], incontrerà le generatrici dell'un sistema in un numero dispari di punti e quelle dell'altro in un numero pari di punti reali.

I circuiti d'ordine dispari sulla superficie si dividono quindi in due categorie:

1°) circuiti d'ordine dispari che segano le generatrici del 1° sistema in un numero pari di punti e quelle del 2° sistema in un numero dispari di punti reali;

(12) Cfr. E. Goursat, loc. cit., Chap. X, n. 216, pp. 323–325; cfr., in particolare, le formula (38 bis), p. 324 e (39), p. 325.

(*) Nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) Per i circuiti d'ordine pari vedi la mia Nota: *Sulla configurazione delle curve situate sopra quadriche e in particolare sulla configurazione delle curve algebriche sghembe col massimo numero di circuiti.* « Rend. R. Accad. Lincei », vol. XXII, ser. V, 2° sem., fascicoli 2 e 3.

(2) V. loc. cit.

(3) Per le proprietà fondamentali dei circuiti v. Staudt, *Geometrie der Lage*, § 12 e seguenti.

2°) circuiti d'ordine dispari che segano le generatrici del 1° sistema in un numero dispari di punti e quelle del 2° sistema in un numero pari di punti reali.

3. *Due circuiti d'ordine dispari della stessa categoria si segano in un numero pari* ($\geqq 0$) *di punti reali; due circuiti d'ordine dispari di categoria diversa si segano in un numero dispari* ($\geqq 1$) *di punti reali.*

Infatti sia k il numero dei punti reali in cui si segano i due circuiti d'ordine dispari dati γ_1, γ_2.

Proiettiamo i due circuiti sopra un piano π da un punto generico O della quadrica, punto che non appartenga nè all'uno nè all'altro dei circuiti e sia tale che sulle due generatrici r, s passanti per esso non cadono punti d'intersezione dei due circuiti. Otterremo come proiezione dei due circuiti d'ordine dispari γ_1, γ_2, due circuiti piani γ_1', γ_2' di π, circuiti che saranno di ordine dispari, come subito si vede. Ma nel piano due circuiti d'ordine dispari si segano in un numero dispari di punti reali. Sia $2h+1$ questo numero. Dei detti punti un certo numero cadrà nei punti fondamentali R, S della proiezione stereografica eseguita, i rimanenti saranno le proiezioni dei k punti in cui si segano i circuiti obbiettivi γ_1, γ_2.

Siano i_1, i_2 rispettivamente il numero dei punti reali in cui i circuiti dati γ_1, γ_2 segano la generatrice r, e j_1, j_2 rispettivamente il numero dei punti reali in cui γ_1, γ_2 segano la generatrice s. Dei numeri i_1 e j_1 e così dei numeri i_2 e j_2 uno è pari e l'altro è dispari. I circuiti proiezione γ_1', γ_2' avranno $i_1 i_2$ intersezioni riunite in R e $j_1 j_2$ intersezioni riunite in S, più k intersezioni fuori di R e S. Il numero totale delle intersezioni sarà quindi:

$$i_1 i_2 + j_1 j_2 + k = 2h + 1. \qquad (1)$$

Se i due circuiti γ_1, γ_2 sono della stessa categoria, saranno i_1 e i_2 pari, e j_1 e j_2 dispari (v. n. 2), cioè $i_1 i_2 + j_1 j_2$ sarà dispari, quindi per la (1) sarà k pari, c. d. d.

Se invece i due circuiti γ_1, γ_2 sono di categorie diverse, sarà i_1 pari e i_2 dispari, j_1 dispari e j_2 pari, cioè $i_1 i_2 + j_1 j_2$ sarà pari, quindi per la (1) sarà k dispari, c. d. d.

4. Da queste proprietà segue che *sopra una quadrica, a punti iperbolici, una curva algebrica (priva di punti multipli), può eventualmente possedere soltanto circuiti d'ordine dispari appartenenti alla stessa categoria.*

5. Un circuito d'ordine dispari tracciato sull'iperboloide sega in un numero dispari di punti ($\geqq 1$) il piano all'infinito, come ogni altro piano dello spazio, punti che giacciono sulla conica impropria dell'iperboloide.

Consideriamo in particolare i circuiti d'ordine dispari, privi di punti multipli, con un sol punto reale all'infinito. Sia c uno di questi circuiti che abbia un sol punto improprio, I_∞, reale.

Per questo punto I_∞ passano due generatrici della superficie g_1, g_2, di sistema opposto. Il circuito segherà (v. n. 2) l'una di queste, per esempio g_1, in un numero dispari ($\geqq 1$) di punti reali; l'altra, g_2, in un numero pari ($\geqq 0$). Ora, siccome il circuito ha con g_2 il punto reale I_∞ in comune e, poichè deve segare g_2 in un numero pari di punti reali, avrà sopra g_2 certamente un altro punto reale P. Potranno darsi due casi: il punto P potrà coincidere con I_∞, e allora il circuito avrà per asintoto la generatrice g_2, (il circuito avrà contatto tripunto nel punto I_∞ con il piano $g_1 g_2$, che sarà quindi il piano osculatore nel punto I_∞); oppure P sarà un punto situato a distanza finita, e allora l'asintoto in I_∞ sarà esterno alla superficie (contatto semplice in I_∞ con il piano $g_1 g_2$). Nel *primo caso* il circuito con deformazione continua, restando sempre sulla superficie si può, ferme restando le intersezioni all'infinito, ridurre a trovarsi tutto da una stessa banda della generatrice g_2 (v. fig. 1), e si potrà, con ulteriore deformazione continua, restando sulla superficie, ridurre a

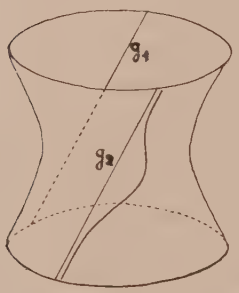


Fig. 1

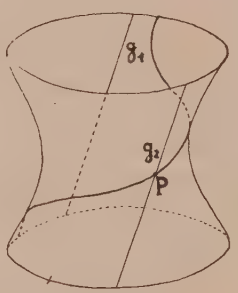


Fig. 2

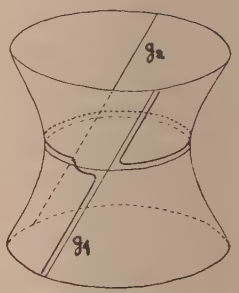


Fig. 3

coincidere con g_2. Nel *secondo caso* il circuito, a distanza finita, attraversa la generatrice g_2 nel punto P (oltre che in un numero pari $\geqq 0$ di punti reali) e a distanza infinita nel punto I_∞, e attraversa la generatrice g_1 al finito in un numero pari $\geqq 0$ di punti reali e a distanza infinita nel punto I_∞, e si potrà con deformazione continua, restando sempre sulla superficie, tenendo fermi i punti P e I_∞, ridurre ad avere con g_1 la sola intersezione reale I_∞, e con g_2, a distanza finita, la sola intersezione reale P (v. fig. 2).

Per «piccola variazione» topologica il primo tipo si può ottenere dall'insieme della generatrice g_2 e di un ovale (circuito d'ordine pari di prima specie, segante cioè le generatrici in un numero pari ($\geqq 0$) di punti reali (v. loc. cit. [1]), avente in comune con g_2 due punti reali. (Si otterrà oltre al circuito dispari del primo tipo un circuito pari che non ci interessa) (v. fig. 1). Il secondo tipo si potrà ottenere dall'insieme della generatrice g_1 e di una ellisse, sezione piana (trasversale) dell'iperboloide (circuito d'ordine pari di seconda specie, segante cioè ogni generatrice in un numero dispari di punti reali, v. loc. cit. [1]), che necessariamente sega tutte le generatrici, ognuna in un punto reale, (v. fig. 3). Si ottiene un unico circuito d'ordine dispari, che sega le generatrici del sistema di g_1 in un punto e quelle del sistema di g_2 in due

punti (v. fig. 3). Esso avvolge l'iperboloide, ma non ha per asintoto g_1 (che attraversa nel punto I_∞). Senza alterare il comportamento del circuito all'infinito, ossia senza alterare il tipo del circuito, potremo far fare al circuito un certo numero di giri intorno all'iperboloide, a guisa di spirale (con ogni nuovo giro però il circuito cambia di categoria – v. n. 2). Se il numero totale dei giri è t (compreso quello di partenza) $t = 1, 2, 3, \cdots$ diremo che, rispettivamente, il circuito è *a una spira, a due spire, a tre spire . . . e in generale a t spire*. Esso si può ottenere « per piccola variazione » (topologica), opportunamente eseguita, dall'insieme di una generatrice g_1 e di t ellissi, sezioni piane dell'iperboloide, non intersecantisi in punti reali, ed incontra le generatrici dell'un sistema in t punti reali, e quelle dell'altro in $t+1$. Per t pari si avranno circuiti tutti appartenenti alla stessa categoria (v. n. 2), per t dispari, tutti appartenenti alla categoria opposta.

Tornando ai circuiti del primo tipo (fig. 1) per analogia li diremo circuiti *a zero spire*.

6. *Un circuito d'ordine dispari, a t spire, ha l'ordine (topologico) maggiore o uguale a* $2t+1$. Prendiamo infatti due generatrici r, s di sistema opposto. Ognuna di esse ha in comune con ogni spira almeno un punto reale. In tutto avremo almeno $2t$ punti reali comuni al piano delle due generatrici e al circuito. Ma il circuito essendo d'ordine dispari, il numero delle intersezioni reali del piano col circuito dovrà essere dispari, quindi almeno uguale a $2t+1$.

7. Se facciamo tendere a infinito il numero dei giri che il circuito fa intorno all'iperboloide, per il teorema precedente l'ordine del circuito tenderà a ∞, e si ha un esempio di circuito d'ordine dispari il cui ordine topologico tende a ∞.

8. Per quel che si è detto al n. 5, due dei circuiti dispari ivi considerati sono della stessa categoria se hanno entrambi un numero pari, o entrambi un numero dispari di spire; sono di categoria opposta se hanno l'uno un numero pari e l'altro un numero dispari di spire.

Scambiando tra loro l'ufficio delle due generatrici g_1, g_2, possiamo considerare i circuiti dispari a t spire che ne risultano. Anche per essi valgono le proprietà di cui sopra. Però, se confrontiamo uno di essi con uno dei precedenti avente la stessa parità di spire, otteniamo due circuiti di categoria opposta; se invece i due circuiti che confrontiamo hanno l'uno un numero pari e l'altro un numero dispari di spire appartengono alla stessa categoria.

Geometria. — *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia ad Jacobiano nullo di caratteristica uno.* Nota di U. Salini, presentata (*) dal Socio G. Castelnuovo.

§ 1. – Introduzione. — 1. Nella presente Nota mi propongo di portare un primo contributo allo studio delle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia (O, O') di punti corrispondenti ad Jacobiano nullo di caratteristica uno (1). Per necessità di spazio, citerò qui solamente i risultati a cui sono pervenuto, riservandomi di esporre i relativi calcoli in nota a parte. Nella Nota viene esteso lo studio all'intorno del secondo ordine di (O, O'), e viene stabilito il riferimento intrinseco proiettivo fra le due stelle; vengono poi trovati alcuni invarianti proiettivi dei quali si dà l'interpretazione geometrica e si deducono alcuni enti proiettivamente legati alle due stelle di centri O ed O'. Si vengono in oltre a caratterizzare alcune involuzioni e particolari proiettività intercedenti fra gli elementi delle due stelle.

§ 2. – Studio dell'intorno del primo ordine. — 2. Consideriamo due spazi ordinari S_3 (x, y, z) ed S_3' (x', y', z') e fra essi una trasformazione puntuale T (1):

$$(1) \qquad x' = f(x, y, z) \;\; ; \;\; y' = \varphi(x, y, z) \;\; ; \;\; z' = \psi(x, y, z)$$

ed assumiamo i due punti O ed O' come origini delle coordinate in S_3 ed S_3'. Sviluppando le funzioni f, φ, ψ in serie nell'intorno di O, si ottiene:

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z + [2]_{xyz} \\ y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z + [2]_{xyz} \\ z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z + [2]_{xyz} \end{cases}$$

dove a, b, c sono costanti e si sono indicati con $[2]_{xyz}$ termini di secondo grado e grado superiore in x, y, z. Supponiamo ancora che in (O, O') sia nullo

(*) Nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) Si vedano i seguenti lavori: E. Bompiani, *Corrispondenze puntuali fra due piani proiettivi: esame delle Jacobiane.* («Memoria dell'Accademia d'Italia», vol. XIV, p. 11, 1943); E. Bompiani, *Sulle Jacobiane di una corrispondenza puntuale fra piani.* («Rendiconti dell'Accademia dei Lincei», s. 8ª, vol. II, p. 22, anno 1947); E. Bompiani, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi.* («Mem. Acc. d'Italia» (6), 13–1942); M. Villa, *Sull'annullarsi in un punto della matrice Jacobiana di m funzioni in m variabili.* («Rend. Acc. d'Italia» (7), 3, 1941, 209–216); M. Villa, *Sulle trasformazioni puntuali degeneri.* («Mem. R. Accademia di Bologna» (9), 9, 1941–42, 19–26); M. Villa, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi.* («Rend. R. Acc. d'Italia» (7), 3, 1942); M. Villa, *Sull'approssimazione delle trasformazioni puntuali fra due spazi mediante trasformazioni cremoniane.* («Rend. di matem. e delle sue applicazioni» (5), 3, 216–230); M. Villa, *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia a Jacobiano nullo.* («Boll. Unione Matematica Italiana», anno 1947).

lo Jacobiano e sia di caratteristica uno, anzi, per fissare le idee, possiamo supporre che sia $a_{33} \neq 0$. Ne segue che:

$$(3) \quad b_1 = \rho a_1 , c_1 = \sigma b_1 \quad ; \quad b_2 = \rho a_2 , c_2 = \sigma b_2 \quad ; \quad b_3 = \rho a_3 , c_3 = \sigma b_3$$

e quindi:

$$(4) \qquad c_1 = \rho\sigma a_1 \quad ; \quad c_2 = \rho\sigma a_2 \quad ; \quad c_3 = \rho\sigma a_3 .$$

Per l'intorno del primo ordine si hanno allora i risultati:

1° *Esiste nella stella* O *il piano* $a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$, *che diremo stazionario, esso è tale che ad un qualunque piano della stella* O′ *non passante per la retta* $y' = \rho x' , z' = \rho\sigma x'$ *corrisponde nella stella* O *il detto piano stazionario.*

2° *Preso un qualunque piano della stella* O, *diverso da quello stazionario, ai punti di esso, nell'intorno del primo ordine di* O, *corrispondono in* O′ *punti della retta* $y' = \rho x'$; $z' = \rho\sigma x'$, *che diremo stazionaria.*

3° *A qualunque punto del piano stazionario, preso nell'intorno del primo ordine di* O, *corrisponde nella stella di centro* O′ *il punto* O′.

4° *A qualunque piano della stella* O′ *per la retta stazionaria corrisponde qualunque piano per* O.

Ne risulta allora che:

a) *A qualunque elemento del primo ordine* E_1 *della stella* O, *appartenente ad un piano diverso da quello stazionario corrisponde nella stella* O′ *l'*E_1' *appartenente alla retta stazionaria*;

b) *Tutte le calotte del primo ordine aventi il centro in* O′ *e non appartenenti a piani per la retta stazionaria hanno come corrispondente nella stella* O *la calotta del primo ordine appartenente al piano stazionario e avente centro in* O.

c) *Ad ogni punto infinitamente vicino ad* O *sul piano stazionario corrisponde il punto* O′.

Possiamo allora semplificare le (2) tenendo conto delle (3), (4) e scegliendo come piano xy del riferimento di S_3 il piano stazionario, e come asse delle x' del riferimento di S_3', la retta stazionaria. La prima condizione porta come conseguenza che $a_1 = 0$; $a_2 = 0$ e la seconda $\rho = 0$, le (1) si semplificano allora nelle

$$(5) \qquad x' = az + [2]_{xyz} \quad ; \quad y' = [2]_{xyz} \quad ; \quad z' = [2]_{xyz}$$

§ 3. · STUDIO DELL'INTORNO DEL SECONDO ORDINE. - · 3. Scriviamo le (5) ponendo in evidenza i termini del 2° ordine:

$$(6) \quad \begin{cases} x' = az + a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} xz + 2a_{23} yz + [3]_{xyz} \\ y' = \quad b_{11} x^2 + b_{22} y^2 + b_{33} z^2 + 2b_{12} xy + 2b_{13} xz + 2b_{23} yz + [3]_{xyz} \\ z' = \quad c_{11} x^2 + c_{22} y^2 + c_{33} z^2 + 2c_{12} xy + 2c_{13} xz + 2c_{23} yz + [3]_{xyz} \end{cases}$$

La superficie Jacobiana in S_3 ha in O un punto doppio e scegliendo in S_3 come assi x ed y le rette di intersezione del cono tangente con il piano stazionario ($z = 0$), dovremo avere $c_{12} = 0$; $b_{12} = 0$. Detto cono tangente lo diremo il *primo cono principale*. Assumiamo ancora nel riferimento di S_3 come asse delle z la retta polare del piano stazionario (piano xy) rispetto al detto cono, allora dovremo avere:

$$c_{22} = \lambda b_{22} \quad ; \quad c_{13} = \lambda b_{13} \quad ; \quad b_{11} = \mu c_{11} \quad ; \quad b_{23} = \mu c_{23} \qquad \left(\text{con } \mu = \frac{1}{\lambda}\right).$$

§ 4. – Le direzioni cuspidali per O'. — *Si hanno le due proprietà:*

1° *All'*E_2 *di flesso di centro* O *appartenente alla retta* $z = 0 \, ; \, x = 0$ *corrisponde mediante la* T (1) *un elemento cuspidale di centro* O' *la cui tangente la diremo la prima direzione cuspidale per* O' *ed ha le equazioni:*

$$\frac{x'}{a_{22}} = \frac{y'}{b_{22}} = \frac{z'}{\lambda b_{22}}.$$

2° *All'*E_2 *di flesso di centro* O *appartenente alla retta* $z = 0, y = 0$ *corrispondente mediante la* T (1) *un elemento cuspidale di centro* O' *la cui tangente la diremo la seconda direzione cuspidale per* O' *ed ha le equazioni*:

$$\frac{x'}{a_{11}} = \frac{y'}{\mu c_{11}} = \frac{z'}{c_{11}}.$$

Se assumiamo la prima direzione cuspidale e la seconda rispettivamente come assi delle y' e delle z' del riferimento di S_3', dovremo avere:

$$c_{22} = 0 \quad ; \quad c_{13} = 0 \quad ; \quad a_{22} = 0 \quad ; \quad b_{11} = 0 \quad ; \quad b_{23} = 0 \quad ; \quad a_{11} = 0 \quad ; \quad b_{22} \neq 0 \quad ; \quad c_{11} \neq 0.$$

Allora, tenendo conto del particolare riferimento assunto in S_3', le (6) diventano:

$$(7) \qquad \begin{cases} x' = az + a_{33} z^2 + 2 a_{12} xy + 2 a_{13} xz + 2 a_{23} yz + [3]_{xyz} \\ y' = \quad b_{22} y^2 + b_{33} z^2 \quad + 2 b_{13} xz + [3]_{xyz} \\ z' = \quad c_{11} x^2 + c_{33} z^2 \quad + 2 c_{23} yz + [3]_{xyz} \end{cases}$$

Le due terne di assi x, y, z per S_3 ed x', y', z' per S_3' risultano così intrinsecamente fissate e perciò nella geometria metrica gli elementi geometrici precedentemente fissati dànno luogo ad un riferimento intrinseco e le (7) rappresentano la forma canonica assunta dalle equazioni della trasformazione T (1), i coefficienti delle (7) sono invarianti metrici della T (1).

4. Al piano $y' = 0$ della stella O', in virtù delle (7), corrisponde in S_3 una superficie che ha in O un punto doppio il cui relativo cono quadrico tangente, che diremo il *secondo cono principale per* O, ha l'equazione $b_{22} y^2 + b_{33} z^2 + 2 b_{13} xz = 0$.

Analogamente, al piano $z' = 0$ corrisponde in S_3 una superficie che ha in O un punto doppio il cui relativo cono quadrico tangente, che diremo il

terzo cono principale per O, ha l'equazione: $c_{11}x^2 + c_{33}z^2 + 2c_{23}yz = 0$. Il secondo cono principale taglia il piano $y = 0$ nell'asse x ed in una retta p_2 di equazioni: $y = 0$, $z = -(2b_{13} : b_{33})x$, analogamente il terzo cono principale taglia il piano $x = 0$ lungo l'asse delle y ed in una retta p_2 di equazioni: $x = 0$, $z = -(2C_{23} : C_{33})y$. La retta di intersezione del piano π_1, individuato dalla retta p_1 e dall'asse delle y (piano che è tangente al secondo cono lungo la retta p_1), e del piano π_2 individuato dalla retta p_2 e dall'asse delle x (piano che è tangente al terzo cono lungo la retta p_2), non appartiene in generale ai piani coordinati e perciò si può assumere come retta $x = y = z$, ciò porta che deve essere:

$$b_{33} = -2b_{13} \quad ; \quad c_{33} = -2c_{23}.$$

5. *Si ha ancora la proprietà*: *All'* E_2 *di flesso di centro* O *appartenente alla retta* $x = y$, $z = 0$, *corrisponde in* S_3' *per la* T (1) *un elemento cuspidale la cui tangente la diremo la terza direzione cuspidale per* O' *ed ha le equazioni:*

$$x' : 2a_{12} = y' : b_{22} = z' : c_{11}.$$

Questa retta, in generale, non appartiene ai piani coordinati e quindi si può assumere come retta $x' = y' = z'$ del riferimento in S_3'. Ciò porta come conseguenza che deve essere: $c_{11} = 2a_{12}$; $b_{22} = 2a_{12}$. Tenendo allora conto delle condizioni viste al n° 4 e di quelle ora dette, le (7) si semplificano come segue:

$$(8) \quad \begin{cases} x' = az + a_{33}z^2 - 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + [3]_{xyz} \\ y' = 2a_{12}y^2 - 2b_{13}z^2 + 2b_{13}xz + [3]_{xyz} \\ z' = 2a_{12}z^2 - 2c_{23}z^2 + 2c_{23}yz + [3]_{xyz}. \end{cases}$$

Resta quindi fissato intrinsecamente nelle stelle di centri O ed O' il riferimento proiettivo e le (8) sono la forma definitiva assunta delle equazioni della trasformazione T (1).

§ 5. – ALCUNI INVARIANTI PROIETTIVI E LORO INTERPRETAZIONE GEOMETRICA. – 6. Le equazioni del primo, del secondo, del terzo cono principale sono rispettivamente:

$$c_{23}b_{13}z^2 - 4a_{12}^2xy = 0 \quad ; \quad a_{12}y^2 - b_{13}z^2 + b_{13}xz = 0 \quad ; \quad a_{12}x^2 - c_{23}z^2 + c_{23}yz = 0$$

In corrispondenza a tali tre coni si hanno i tre invarianti:

$$I_1 = c_{23}b_{13} : 4a_{12}^2 \quad ; \quad I_2 = 2a_{12} : b_{13} \quad ; \quad I_3 = 2a_{12} : c_{23}.$$

Dell'invariante I_1 si hanno le seguenti interpretazioni:

1° *L'invariante* I_1 *è la metà del birapporto formato sul piano* xz *dalle quattro rette* q_1, p_1, *asse* z, *asse* x (essendo q_1 la retta ove il piano xz è tagliato dal piano σ_1 polare della retta unità $x = y = z$ rispetto al primo cono).

2° *L'invariante* I_1 *è la metà del birapporto formato sul piano* yz *dalle quattro rette* q_1', p_2, *asse* y, *asse* z (essendo q_1' la retta ove il piano yz è tagliato dal piano σ_1).

3° *L'invariante* I_1 *è il birapporto formato dalle quattro rette del piano* γ_1: *retta unità* $x = y = z$; *retta* m_1; *asse* x; *retta* $y = z$, $x = 0$ (essendo m_1 la retta, diversa dall'asse x, ove il piano γ_1, di equazione $z = y$, taglia il primo cono).

4° *L'invariante* I_1 *è il birapporto formato dalle quattro rette del piano* γ_2: *retta unità* $x = y = z$; *retta* m_2; *asse* y; *retta* $x = z$, $y = 0$, (essendo m_2 la retta, diversa dall'asse y, ove il piano γ_2, di equazione $x = z$, taglia il primo cono).

Dell'invariante I_2 si hanno le seguenti interpretazioni geometriche:

1° *L'invariante* I_2 *è il birapporto formato sul piano* yz *dalle quattro rette: retta* q_2; *retta* p_2; *asse* y; *asse* z (essendo la retta q_2 la intersezione col piano yz del piano σ_2 polare della retta unità u rispetto al secondo cono).

2° *L'invariante* I_2 *è il doppio del birapporto formato dalle quattro rette del piano* γ_1: *retta* l_1; *retta* $y = z$, $x = 0$; *retta unità*; *asse* x (essendo la retta l_1 l'intersezione, diversa dall'asse x, del piano γ_1 col secondo cono).

Dell'invariante I_3 si hanno le seguenti interpretazioni geometriche:

1° *L'invariante* I_3 *è il birapporto formato sul piano* xz *dalle quattro rette: retta* r_1; *retta* p_1; *asse* x; *asse* z (essendo r_1 la retta ove il piano xz è tagliato dal piano σ_3 polare della retta unità x rispetto al terzo cono).

2° *L'invariante* I_3 *è il doppio del birapporto formato dalle quattro rette del piano* γ_2: *retta* l_2; *retta* $x = z$, $y = 0$; *retta unità* u; *asse* y (essendo la retta l_2 l'intersezione, diversa dell'asse y, del piano γ_2 col terzo cono).

Da ultimo osserviamo che i tre invarianti soddisfano alla relazione $I_1 \cdot I_2 \cdot I_3 = 1$.

§ 6. – Il cono delle direzioni cuspidali per O′ e le direzioni caratteristiche per O. — 7. Si hanno poi ancora le seguenti proprietà:

1° *A tutti gli elementi del secondo ordine inflessionali aventi per tangenti le direzioni uscenti da* O *e giacenti sul piano stazionario, corrispondono, mediante la* T (1), *in* S'_3 *elementi cuspidali per* O′ *le cui tangenti formano il cono quadrico* $y'z' - x'^2 = 0$, *che diremo il cono assoluto delle direzioni cuspidali per* O′.

2° *Le rette di intersezione del secondo e terzo cono godono della seguente proprietà: Esse sono le uniche rette fuori del piano stazionario tali che gli elementi inflessionali di centro* O *aventi per tangenti tali rette vengono mutati dalla* T (1) *in elementi inflessionali per* O′ (essi hanno per tangente la retta stazionaria).

3° *Le rette di intersezione fra il primo ed il secondo cono, distinte dall'asse* x (e perciò fuori del piano stazionario) *sono tali che ad esse corrispondono in* S'_3 *curve il cui piano osculatore in* O′ *è quello* $y' = 0$.

4° *Le rette di intersezione fra il primo ed il terzo cono, distinte dall'asse delle* y, (e perciò fuori del piano stazionario) *sono tali che ad esse corrispondono in* S'_3 *curve il cui piano osculatore in* O′ *è quello* $z' = 0$.

§ 7. - LE PROIETTIVITÀ ω_1 ED ω_2 E LE TRE INVOLUZIONI J_1, J_2, J_3. — 8. Ad un qualunque piano $x' = my'$ del fascio di asse z' corrisponde in S_3' una superficie le cui direzioni asintotiche in O sono l'asse x e la retta $x = my$, $z = 0$. Si viene allora a stabilire una corrispondenza fra i piani del fascio di asse z' e le corrispondenti direzioni asintotiche (distinte dall'asse x), tale corrispondenza è una proiettività ω_1. Analogamente vi è una proiettività ω_2 che lega i piani del fascio di asse y' e le rette del fascio di centro O avente per sostegno il piano stazionario ($z = 0$).

Ad un qualunque piano $y' = pz'$ del fascio (φ) di asse x' (retta stazionaria) corrisponde in S_3 una superficie che ha in O un punto doppio e per cono tangente in esso $I_3(I_2 y^2 + 2xz - 2z^2) - p I_2 (I_3 x^2 + 2yz - 2z^2) = 0$, questo appartiene al fascio (F) determinato dal secondo e terzo cono. Si viene così a stabilire una corrispondenza fra i piani del fascio (φ) e i coni del fascio (F).

Il fascio di coni (F) sega sul piano stazionario una involuzione J_3 di rette i cui raggi doppi sono l'asse x e quello y. Sul piano yz sega una involuzione J_1 di rette i cui raggi doppi g_1 e g_2 sono le generatrici di contatto dei coni del fascio tangenti ad esso; in corrispondenza a tali rette, e quindi a tali coni tangenti, vengono individuati nel fascio (φ) due particolari piani $y' = p_1 z'$; $y' = p_2 z'$ dove si ha:

$$p_1 = \frac{I_3}{I_2}\left\{I_2 - \sqrt{I_2(I_2 - 2)}\right\} \quad ; \quad p_2 = \frac{I_3}{I_2}\left\{I_2 + \sqrt{I_2(I_2 - 2)}\right\}.$$

Il piano $y' = \frac{I_3}{I_2} z'$ del fascio (φ) è tale che il cono corrispondente del fascio (F) passa per l'asse z e taglia quindi ancora il piano yz in una certa retta ben definita a_1 di equazioni $y = (2 : I_2) z$, $x = 0$. Sul detto piano vi è ancora la coppia di rette $y = \pm \sqrt{2 : I_2}\, z$; $x = 0$ tagliata dal secondo cono principale e ad essa corrisponde il piano $y_1 = 0$ del fascio (φ). Analoghe considerazioni si possono fare nei riguardi del piano xz, tenendo conto della involuzione J_2 tagliata su esso dal fascio (F) di coni. Si ha allora su questo piano una retta a_2 analoga a quella a_1 ed essa ha le equazioni $y = (2 : I_3) z$, $y = 0$ e si hanno ancora le rette $y = \pm \sqrt{2 : I_3}\, z$; $y = 0$ tagliate dal terzo cono principale e a tale coppia corrisponde il piano $z' = 0$ del fascio (φ).

Le rette a_1 ed a_2 individuano un piano δ e sono proiettate rispettivamente dall'asse x e da quello y secondo due piani che si tagliano lungo una retta d di equazioni: $y = (2 : I_2) z$; $x = (2 : I_3) z$. Il piano δ è tangente al primo cono principale lungo una retta n di equazioni $z = I_3 x$; $y = (I_3 : I_2) x$ che è una retta ben definita di tale cono e fuori del piano stazionario.

A tale retta n si può associare in S_3' il piano $[I_2 + 2 I_3 - 2 I_2 I_3] y' - [I_3 + 2 I_2 - 2 I_2 I_3] z' = 0$ del fascio (φ), esso è il piano osculatore in O' alla curva che corrisponde in S_3' alla detta retta.

9. Prendiamo una qualunque retta $x = \lambda z$, $y = \mu z$ (distinta da quelle caratteristiche e fuori del piano stazionario) appartenente ad un fissato cono

$(I_2\, y^2 + 2\, xz - 2z^2) - K\,(I_3\, x^2 + 2\, yz - 2\, z^2) = 0$ del fascio (F). A tale retta corrisponde in S'_5 una curva il cui piano osculatore in O ha l'equazione $y' = kz'$. Quindi si può dire che tutte le rette del detto cono distinte da quelle caratteristiche e fuori del piano stazionario, dànno luogo a curve corrispondenti in S'_5 che hanno in O' lo stesso piano osculatore $y' = kz'$.

Da ultimo è da osservare che facendo uso delle proiettività ω_1 ed ω_2 e delle involuzioni J_1, J_2, J_3, da rette e piani ben definiti geometricamente che già si sono individuati nella stella O, si possono dedurre particolari rette e piani della stella O' che in tal modo risultano pure pienamente individuati.

Così, per esempio, preso un piano β di equazione $y = \Delta x$ del fascio di asse z, alla retta t_1 tagliata da esso sul piano stazionario, in virtù delle proiettività ω_1 ed ω_2, corrispondono i due piani $x' = \Delta y'$; $x' = (1 : \Delta)\, z'$; tali piani si tagliano in una retta r ben definita della stella O' che viene ad associarsi così al piano β. Tale retta è proiettata dall'asse x' mediante il piano β'_1 di equazione $y' = (1 : \Delta^2)\, z'$; che è proprio il piano che viene a corrispondere alla retta t_1 in virtù della involuzione J_3 e delle corrispondenze intercedenti fra le coppie di tale involuzione, i coni del fascio (F) ed i piani del fascio di asse x'.

Analogamente, se si considera un piano $y = \xi z$ del fascio di asse x (diverso da quello stazionario) e la retta $y = \xi z$, $x = 0$ tagliata da esso sul piano yz, vi sarà un cono del fascio (F) che taglia su tale piano una coppia della involuzione J_1 una retta della quale e proprio quella detta. A tale cono, come sappiamo, corrisponde un piano del fascio di asse x', quindi col detto procedimento ad ogni piano del fascio di asse x si può associare un particolare piano del fascio di asse x'. Con procedimento analogo, tenendo conto della involuzione J_2, ad ogni piano del fascio di asse y (diverso da quello stazionario) si può associare un particolare piano del fascio di asse x'. Ne risulta che se l è una retta ben definita geometricamente uscente da O, proiettandola dall'asse x si ottiene un piano λ_1 al quale col procedimento detto (utilizzando l'involuzione J_1) corrisponde un certo piano λ'_1 del fascio di asse x'. Proiettando la retta l dall'asse z si ottiene un piano λ_2, al quale, col primo dei detti procedimenti ed utilizzando la proiettività ω_1, si può fare corrispondere un piano λ'_2 del fascio di asse z'. I due piani λ'_1 e λ'_2 si intersecano lungo una retta l' per O', che così viene ad individuarsi nella stella O' e che si può associare alla retta l.

Geometria. — *Sopra una proprietà caratteristica delle congruenze di rette* W. Nota di F. MARCUS, presentata (*) dal Socio G. CASTELNUOVO.

È ben nota la proprietà metrica di Halphen (1), che è caratteristica delle congruenze di rette W. In questa Nota faremo vedere che dal punto di vista proiettivo, queste congruenze sono anche esse caratterizzate da una proprietà geometrica, oltre a quella, ben inteso, che serve per la loro definizione.

Sia S una superficie riferita alle sue asintotiche u e v con l'elemento lineare di Fubini $\frac{\beta du^3 + \gamma dN^3}{2\, a_{12}\, du\, dv}$ $\beta\gamma \neq 0$; supponiamo che S sia la prima falda focale di una congruenza di rette. Le coordinate omogenee del punto x che genera la superficie sono soluzioni del sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11}\, x \\ x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22}\, x \end{cases} \qquad (a_{12} = e^{\theta}).$$

Se $\frac{du}{A} = \frac{dv}{B}$ dove A, B sono funzioni di u e v, determina un raggio della congruenza, allora il punto

$$(2) \qquad \bar{x} = \mu x + 2\,(A x_u + B x_v)$$

è il secondo fuoco della congruenza se (2)

$$(3) \qquad \mu = -A_u - A\theta_u - B_v - B\theta_v + A\,\frac{B_u + A\beta}{B} + B\,\frac{A_v + B\gamma}{A}.$$

Se la congruenza di rette è W, si dimostra (3) allora, che si possono moltiplicare le A, B per uno stesso fattore, tale che:

$$(4) \qquad A_v = -B\gamma \quad ; \quad B_u = -A\beta$$

ed in questo caso il punto $\bar{x}$ sarà una soluzione di un altro sistema (1) dove in luogo di $\beta, \gamma, \theta, p_{ii}$ avremo rispettivamente $\bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\theta}, \bar{p}_{ii}$ $(i = 1, 2)$ (4) avendosi

$$(5) \qquad \bar{\beta} + \beta = -\frac{B}{A}\frac{N_u}{N} \quad ; \quad \bar{\gamma} + \gamma = -\frac{A}{B}\frac{N_v}{N}$$

$$(6) \qquad \bar{\theta} = \theta + \log|N|;$$

(*) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) Per esempio L. BIANCHI, *Lezioni di geom. diff.*, vol. I, parte II, p. 425.

(2) G. FUBINI–E. ČECH, *Geometria proiettiva diff.*, tomo I, pp. 243–244.

(3) G. FUBINI–E. ČECH, *Idem*, pp. 246 e 250.

(4) G. FUBINI–E. ČECH, *Idem*, pp. 252, 253, 247, 251.

N essendo una soluzione dell'equazione fondamentale [4]

$$N_{uv} + \frac{A}{B}\beta N_v + \frac{B}{A}\gamma N_u = 0. \tag{7}$$

In generale, la congruenza resta invariata [4], sia moltiplicando le A, B, per uno stesso fattore $\sigma = \sigma(u, v)$, sia le x per un fattore $\rho = \rho(u, v)$. Se la congruenza è W, A, B, sono ben determinate (a meno di una costante) dalle (4). Resta la seconda indeterminazione, nel quale caso si dimostra [4] che $\bar{x}$ resta moltiplicato per lo stesso fattore, N e (4) restano inalterate.

Da (5) e (6) risulta

$$\begin{cases} \bar{\beta}\bar{\gamma} = \beta\gamma + \gamma\dfrac{B}{A}\dfrac{N_u}{N} + \beta\dfrac{A}{B}\dfrac{N_v}{N} + \dfrac{N_u N_v}{N^2} \\ \bar{\theta}_{uv} = \theta_{uv} + \dfrac{N_{uv}}{N} - \dfrac{N_u N_v}{N^2}; \end{cases} \tag{8}$$

tenendo poi conto di (7) si ha

$$\bar{\beta}\bar{\gamma} + \bar{\theta}_{uv} = \beta\gamma + \theta_{uv}. \tag{9}$$

Questa è una relazione caratteristica per le congruenze di rette W. Infatti (9) è stata ottenuta nel caso di una congruenza W, e se si moltiplicano le x per ρ, le $\bar{x}$ restano moltiplicate per il medesimo fattore, dunque $N, \beta, \gamma, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ restano inalterate, mentre θ_{uv} e $\bar{\theta}_{uv}$ diventano rispettivamente [5] $\theta_{uv} + 2(\log\rho)_{uv}$; $\bar{\theta}_{uv} + 2(\log\rho)_{uv}$. Perciò (9) è un invariante delle congruenze W.

Interpretazione geometrica. Consideriamo la corrispondenza biunivoca tra i punti x e $\bar{x}$, delle due falde focali della congruenza.

Indichiamo, come al solito $\dfrac{x_{uv}}{a_{12}}$, $\dfrac{\bar{x}_{uv}}{\bar{a}_{12}}$ rispettivamente con X, $\bar{\mathrm{X}}$ e consideriamo le congruenze coniugate, (x, X), $(\bar{x}, \bar{\mathrm{X}})$ alle due falde focali nei punti corrispondenti x e $\bar{x}$. Siano $x + \mathrm{R}_i\,\mathrm{X}$ e $\bar{x} + \bar{\mathrm{R}}_i\,\bar{\mathrm{X}}$ $(i = 1, 2)$ i fuochi di queste due congruenze.

Abbiamo i seguenti risultati.

Se i punti focali $x + \mathrm{R}_i\,\mathrm{X}$ *della prima congruenza, sono coniugati rispetto ai punti* x, X, *allora i fuochi della seconda congruenza sono pure coniugati rispetto ai punti* $\bar{x}$, $\bar{\mathrm{X}}$ *ed in questo caso risulta*

$$\beta\gamma + \theta_{uv} = \bar{\beta}\bar{\gamma} + \bar{\theta}_{uv} = 0.$$

Se $\beta\gamma + \theta_{uv} \neq 0$ *allora i punti* x, X, $x - \mathrm{X}$, $x + \dfrac{a_{12}}{2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_1} + \dfrac{1}{\mathrm{R}_2}\right)\mathrm{X}$, *della prima congruenza ed i rispettivi punti della seconda congruenza, (al posto di* a_{12} *si pone* $\bar{a}_{12}$*) formano il medesimo birapporto.*

$$1 : \beta\gamma + \theta_{uv} = 1 : \bar{\beta}\bar{\gamma} + \bar{\theta}_{uv}.$$

(5) G. Fubini E. Čech, *Introduction à la Gèom. proj. diff. des surfaces.* Paris, p. 82.

Geometria Algebrica. — *Remarques sur la rationnalité des variétés*, Nota di B. d'ORGEVAL, presentata (*) dal Socio G. FANO.

Monsieur Castelnuovo (1) a jadis démontré que la rationnalité des surfaces s'exprimait par la relation:

$$p_a = P_2 = 0$$

d'où résulte la nullité de tous les autres genres.

La tentative d'étendre ce résultat aux variétés à trois dimensions a conduit à un échec; Monsieur Fano (2) a, en effet démontré l'existence de variétés dont tous les genres sont nuls, et qui cependant ne sont pas rationnelles. Il m'a semblé utile de faire quelques remarques sur ce résultat décevant, remarques qui conduisent à une démonstration de l'irrationnalité de la variété cubique générale différente de celle récemment obtenue par Monsieur Fano (3).

I. – Je commencerai par donner une interprétation de la relation de Castelnuovo pour la rationnalité d'une surface, en rapport avec le système anticanonique de la surface démontrant;

Théorème. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit rationnelle est qu'il existe un système linéaire effectif de courbes elliptiques formé des courbes anticanoniques effectives ou virtuelles augmentées éventuellement de courbes exceptionnelles.

Supposons notre surface rationnelle. Elle se représente sur le plan par un système de courbes possédant des points–base. Soit C_n une telle courbe, ses adjointes sont les C_{n-1}, passant aux points-base avec les multiplicités de C diminuées d'une unité. Il en résulte que le système anticanonique est formé des cubiques passant une fois par chaque point–base; s'il y a plus de 9 points-base, le système anticanonique est virtuel, mais en lui sommant les courbes exceptionnelles représentées par les points–base, nous obtenons bien un système effectif de courbes elliptiques.

Supposons, inversement que notre surface posséde un système de courbes elliptiques contenant les courbes anticanoniques augmenté éventuellement de courbes exceptionnelles. Montrons d'abord que $p_g = 0$. En effet, deux cas sont possibles: ou le système anticanonique est effectif et alors

(*) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero.* «Mem. d. Società Italiana delle Scienze detta dei XL», serie III, to. X, 1896.

(2) G. FANO, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli.* «Atti del Congresso internazionale dei Matematici». Bologna 1928, t. IV; dans cet article l'on trouvera de nombreuses références bibliographiques.

(3) G. FANO, *Sulla forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni.* «Rend. Acc. Naz. d. Lincei», serie VIII, I, p. 463, 1946; *Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve–sezioni canoniche.* «Acta d. Pont. Ac. Scientiarum», vol. IX, p. 163.

le système canonique ne peut exister, ou le système canonique est virtuel, il existe alors des courbes exceptionnelles que l'on ne peut éliminer ce qui entraîne encor la nullité du genre géométrique. Le bigenre P_2 est également nul, cadans le premier cas l'existence du système anticanonique a pour conséquence celle de son double donc l'inexistence du système bicanonique; dans le second cas l'élimination des courbes exceptionnelles serait possible si le bigenre était différent de zéro. Reste à voir que la surface est régulière. Elle ne peut être équivalente à une rêglée de genre supérieur à un, car une telle surface ne posséde pas de courbes elliptiques. Sur une rêglée elliptique, notre système devrait avoir la déficience un, alors qu'avec nos hypothèses le système des courbes elliptiques posséde un système adjoint formé de certaines courbes exceptionnelles dont la déficience est nulle. Donc nos hypothèses conduisent aux relations de Castelnuovo et notre surface est rationnelle.

Les raisons de la réussite apparaissent nettement sous cette forme; le système des courbes elliptiques équivaut à un système de cubiques. *La rationnalité des surfaces de genres nuls tient au fait que toutes les courbes elliptiques appartiennent à une seule classe, deux courbes ne se séparant birationnellement que par les valeurs du module.*

II. – Passons maintenant aux variétés à trois dimensions V^3. Qu'exprime alors la nullité des genres? Elle exprime que le système canonique ni aucun de ses multiples n'existe; il existe donc un système effectif ou virtuel (dans ce cas sommé à des surfaces exceptionnelles il donnera naissance à un système effectif), dont l'adjoint est d'ordre zéro, cet adjoint découpant le système canonique complet des surfaces du système. Mais ici, nous avons à faire à deux cas distincts:

1° Le système $|K|$ ne contient en dehors du système anticanonique que des surfaces exceptionnelles rationnelles; dans ce cas le système des surfaces anticanoniques (effectif ou virtuel) est formé de surfaces de genres I. Mais un tel système n'est pas forcément le transformé birationnel d'un système contenu dans le système anticanonique de l'espace ordinaire. En effet, l'on sait que les surfaces générales de genres I appartiennent à une infinité de classes, chacune caractérisée par le genre minimum d'une courbe générale d'un système linéaire que peut contenir la surface générale de la classe (4).

Le système anticanonique de l'espace ordinaire est formé des F_4 générales correspondant au genre 3. Si donc une variété posséde pour surfaces anticanoniques des surfaces générales F_{2p-2}, avec $p = 3$, la variété pourra ne pas être rationnelle. Une condition nécessaire de rationnalité sera donc que les F_{2p-2}, passant par les éléments exceptionnels soient équivalentes à un système de F_4, possédant des singularités correspondantes.

(4) Par exemple: B. D'ORGEVAL, *Sur les surfaces algébriques dont tous les genres sont I*, Thése, Paris 1945.

A ce cas appartiennent les variétés que Monsieur Fano a nommées semi rationnelles. Il faut d'ailleurs noter que l'équivallence des surfaces anticanoniques d'une variété à des F_4 ne suffit pas à établir la rationnalité, comme le montre l'exemple de la V_4 générale de E^4, qui ne posséde pas d'autres surfaces de genres I que des F_4, et leurs multiples.

2° Le système $|K|$ peut contenir des surfaces exceptionnelles équivallentes à des réglées irrationnelles. Dans ce cas le système anticanonique peut ne pas être de genres I, c'est le cas des variétés d'Enriques que Mr. Fano a nommées pseudo-rationnelles. Dans ce cas, l'irrationnalité de la variété suivra immédiatement du fait que le système anticanonique n'est pas de genres I.

III. – Revenons sur le cas des variétés semi-rationnelles dont le système anticanonique est formé de surfaces de genres I. Nous nous limiterons au cas où ce système est effectif, le cas d'un système virtuel pouvant être extrêmement compliqué.

Si une variété est rationnelle, elle peut se représenter sur l'espace ordinaire avec certaines singularités, plus précisément nous aurons des systèmes de surfaces passant par des courbes-base et des points-base isolés. Dans cette représentation, il existera une famille de F_4 passant simplement par les courbes-base et doublement aux points base correspondant aux surfaces anticanoniques de la variété passant par les éléments exceptionnels correspondants. Si donc une variété est rationnelle, on doit pouvoir choisir sur elle des éléments qui seront exceptionnels pour la représentation, leur choix obéissant à la loi suivante: le système des surfaces anticanoniques passant par ces éléments doit être équivalent à un système de F_4, de même dimension.

Considérons un exemple simple, celui de la variété rationnelle intersection de deux quadriques de E^5. Cette variété a pour système anticanonique, celui découpé par les quadriques de E^5, le système canonique étant coupé par les hypersurfaces d'ordre —2. Ces surfaces anticanoniques sont donc les F_8 à sections de genre 5. Le problème de la rationnalité se ramène donc à trouver une singularité d'un système linéaire de telles F_8, pour que ce système soit équivallent à un système de même dimension de F_4.

Sur les V_4 considérées, il existe toujours des droites. Considérons alors le système des F_8 contenant une droite donnée.

Ce système est découpé par les quadriques contenant cette droite. Il est donc ∞^{15}. Mais une F_8, contenant une droite équivaut à une F_4 dotée d'une cubique, comme on le voit en projetant F_8 à partir da la droite. Soit alors, une F_4 dotée d'une cubique sa section par une quadrique passant par la cubique contiendra en outre une quintique de genre 2. Si l'on considére alors toutes les F_4, passant par cette quintique, elles forment un système ∞^{15}, donc de même dimension que celui de la variété. Nous devons donc pouvoir représenter notre V_4 par des surfaces passant par une quintique de genre 2, la quadrique qu'elle contient doit être une surface fondamen-

tale image de la droite exceptionnelle de la V_4. Ce sont bien les caractéres de la représentation classique de notre variété, par les cubiques passant par une quintique de genre 2. Notons que le système anticanonique complet, équivallent à celui de toutes les F_8 de la V_4, est formé par la somme du système de nos F_4 particulières et de la quadrique fondamentale, c'est à dire le système ∞^{18} des surfaces du sixième ordre passant doublement par la quintique.

Si l'on veut démontrer une irrationnalité par ce procédé, il faut montrer l'impossibilité de choisir les singularités des surfaces anticanoniques de genres I, en sorte que le système de ces surfaces sur la variété et des F_4 équivallentes de l'espace ordinaire aient même dimension. Le problème se ramènera à l'impossibilité arithmétique de certaines relations en nombres entiers.

IV. – Cherchons à appliquer cette méthode pour donner une démonstration (qui n'est peut être pas exhaustive) de l'irrationnalité de la variété cubique générale. Sur cette variété le système anticanonique est effectif et est formé des sections par les quadriques. Il est donc nécessaire de dresser la liste des singularités que l'on peut imposer à des F_6 effectives en sorte que ces surfaces soient équivalentes à des F_4 dotées des singularités correspondantes. La singularité de ces F_4 devra appartenir à une figure exceptionnelle de la représentation spatiale présumée, ce qui permettra de déterminer la dimension du système. Pour rechercher les singularités correspondantes de la F_6 et de la F_4 nous utiliserons le fait que la possession d'une courbe rationnelle pour une surface de genres I équivaut à une projection d'une surface analogue à partir d'un point double n fois si la courbe est d'ordre $2n$; si l'ordre est impair en passant par les sections quadriques on transforme la surface en une équivallente à courbe rationnelle de degré pair.

La représentation spatiale de notre variété ne peut posséder un point-base correspondant à une surface de la V_3, car nos quadriques devraient la contenir; cette hypothèse conduit à la décomposition de la F_6. Alors la V_3 contient des plans; la chose est évidente si la décomposition contient plan ou quadrique; si la F_6 contient deux cubiques les quadriques contenant une de ces surfaces en contiennent des bitangentes à la V_3, dont l'intersection se réduit a la surface cubique et à trois plans, Les mêmes considérations montrent que la représentation ne peut avoir une courbe exceptionnelle irrationnelle correspondant à une surface irrégulière appartenant aux quadriques du système anticanonique.

Nous pouvons éliminer le cas où il existerait une seule F_4 passant par les courbes fondamentales; la surface rationnelle image de celle-ci couperait selon une courbe effective rationnelle la F_4 le reste de l'intersection formant la courbe multiple de la surface rationnelle. Notre F_4 serait une adjointe de cette surface et découperait sur une section plane ou un multiple la série canonique qui n'est pas d'ordre zero, d'où résulte que la dimension des F_4 est au moins ègale à 1.

Supposons donc que l'ensemble des courbes fondamentales appartient à plusieurs quadriques de E^4. On peut avoir les cas suivants:

une courbe d'ordre $n \leq 6$;

deux courbes d'ordre $m + n \leq 5$;

trois courbes d'ordre $m + n + p \leq 5$;

quatre courbes dont la somme des ordres sera 4.

A) une courbe;

a) une droite, la F_6 équivaut à une F_{26} de E^{14} avec point double qui n'est pas équivalente à une F_4;

b) une conique, la F_6 équivaut à une F_8 de E^5 non-équivalente à F_4;

c) une cubique, la F_6 équivaut à une F_{42} de E^{22} non équivalente à F_4;

d) une quartique, la F_6 équivaut à une F_{14} de E^8 non équivalente à la F_4;

e) une quintique, la F_6 équivaut à une F_{74} de E^{38} non équivalente à une F_4;

f) une sextique, la F_6 équivaut à une F_{24} de E^{13} non équivalente à F_4.

B) deux courbes:

a) une droite et une quartique, la F_6 équivaut à une F_{58} de E^{30} équivalente à une F_4;

b) une droite et une cubique, la F_6 équivaut à une F_{44} de E^{23} équivalente à une F_4 avec conique et octique;

c) une droite et une conique, la F_6 équivaut à une F_{34} de E^{18} équivalente à une F_4 avec un point double et une conique;

d) deux droites, la F_6 équivaut à une F_{28} de E^{15} non équivalente à la F_4;

e) une conique et une cubique, la F_6 équivaut à une F_{44} de E^{23} équivalente à une F_4 avec quartique et octique;

f) deux coniques, la F_6 équivaut à une F_{10} de E^6 non équivalente à F_4.

C) trois courbes:

a) deux droites et une cubique, la F_6 équivaut à une F_{46} de E^{24} équivalente à une F_4 avec octique quartique et conique;

b) deux droites et une conique, la F_6 équivaut à une F_{36} de E^{19} équivalente à une F_4 avec une octique et deux points doubles;

c) une droite et deux coniques, la F_6 équivaut à une F_{42} de E^{22} équivalente à une F_4 avec trois points doubles;

d) trois droites, la F_6 équivaut à une F_{30} de E^{16} équivalente à une F_4 avec une courbe du dixième ordre et deux coniques.

D) quatre courbes:

a) quatre droites, la F_6 équivaut à une F_{32} de E^{17} équivalente à une F_4 avec une sextique, une quartique, une conique et un point double.

Si maintenant on considére les systèmes de F_4 avec une courbe rationnelle d'ordre n, le reste de l'intersection par une surface d'ordre s est d'ordre $4s - n$ et de genre $2s^2 - ns$, on peut donc calculer la dimension des F_4 y

passant; il n'y a plus qu'à chercher s'il existe des nombres entiers s tels que la dimension obtenue soit égale à celle des F_6 de la variété cubique passant par la courbe fondamentale correspondante. Par exemple le cas $C)\,a)$ conduit au système

$$24n + 20m + 18p - 2(m^2 + n^2 + p^2) - 56 = 33$$
$$m + n + p \leq 3 \quad , \quad n > 1 \quad , \quad m > 2 .$$

Le calcul fait dans chaque cas montre l'impossibilité du choix des nombres cherchés. Les hypothèses faites sont donc contradictoires.

Il pourrait se faire aussi que l'on ait à faire à une courbe exceptionnelle irrationnelle de la représentation. Soit q son genre, son image sera une surface irrégulière de genre q. L'ensemble de cette surface et d'une F_4 doit être de genres 1, donc leur intersection sera de genre q c'est à dire que le quadruple des sections planes aurait même genre ou même un genre inférieur à celui de ses sections, ce qui est impossible.

Nous ne savons donc pas choisir les éléments de la variété cubique générale qui seraient exceptionnels dans une représentation spatiale, d'où résulte l'irrationnalité de cette variété.

Meccanica. — *Sul moto impulsivo di un sistema olonomo in presenza di vincoli unilaterali simultanei.* Nota di E. CAIANIELLO, presentata (*) dal Corrisp. A. SIGNORINI.

Il problema della determinazione, in un fenomeno d'urto, dell'atto di moto posteriore di un sistema olonomo a n gradi di libertà, a partire da quello anteriore – completamente risolto per vincoli bilaterali – presenta, nel caso che a limitare le possibili configurazioni intervengano vincoli unilaterali simultaneamente agenti, difficoltà non ancora sormontate in maniera soddisfacente.

Scopo infatti di una teoria del moto impulsivo è di determinare, attraverso una adeguata schematizzazione, i valori delle velocità lagrangiane posteriori all'urto, senza che sia necessario ascendere a una indagine dettagliata dei fenomeni, sempre complicati, che effettivamente avvengono durante le varie fasi dell'urto.

Coerentemente a tale esigenza, questo viene supposto istantaneo: le velocità sono allora funzioni discontinue, di cui si chiede di valutare i salti. Nel caso – del quale esclusivamente mi occupo – che i vincoli simultaneamente agenti, in numero di r, siano lisci, fissi e perfettamente elastici (1),

(*) Nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) Si ha invece la soluzione completa se i vincoli sono perfettamente anelastici. Cfr. in proposito: A. MAYER, Note sui « Ber. di K. Sachs. Wiss. », zu Leipzig, 1898–99; E. ALMANSI, *Sulla teoria degli impulsi*. « Rend. Acc. Lincei », vol. XXV, 1916; C. CATTANEO, *Una teoria generale del moto impulsivo in presenza di vincoli unilaterali*. « Atti Acc. It. », vol. XIV, 1943.

tale, problema non può tuttora ritenersi risolto, in quest'ordine di idee, nella sua generalità, per i motivi che seguono.

Occorre, per poter compiere una valutazione delle velocità posteriori senza passare attraverso la descrizione dell'intero fenomeno, possedere delle relazioni che sussistano per tutta la sua durata: tali sono l'integrale della energia e le relazioni, che notoriamente sussistono, esprimenti l'invarianza delle componenti delle velocità tangenti ai vincoli. Perchè queste velocità siano completamente determinate, occorre però conoscerne anche le componenti normali ai vincoli; non avendosi che una sola relazione – l'integrale dell'energia – per rispondere a tale esigenza, è manifesto che il problema sarà in generale risolubile per tal via solo se $r = 1$.

Il Cattaneo, nella Memoria citata in [1], osserva acutamente in proposito che, limitatamente al caso qui considerato ed in assenza di impulsi attivi, l'indeterminazione viene eliminata, come già nella teoria dei sistemi iperstatici, se si assegnano delle costanti caratterizzanti l'elasticità dei vincoli: questi vengono dunque pensati, ampliando lo schema consueto, suscettibili di deformazioni infinitesime.

A tal fine, egli considera il sistema rappresentato da un punto P di una V_n metrizzata cineticamente [2]: i vincoli sono in essa rappresentati da altrettante $V_{\mu-1}$, invalicabili ma (di poco) cedevoli, che possono riguardarsi come falde di un'unica ipersuperficie Σ, per la quale risultano in generale angolosi i punti corrispondenti alla coesistenza di più vincoli.

Con ciò il problema è ridotto a quello di determinare la velocità v^+ di P posteriore all'urto contro un punto O angoloso di Σ: questa egli ottiene in modulo, direzione e verso, facendo riflettere specularmente il vettore velocità anteriore v^- (una o più volte, fino a compatibilità) non sulla Σ, ivi angolosa, ma su una ipersuperficie « equipotenziale » ad essa omotetica.

Mi è occorso però di constatare che questo procedimento non è esente da obiezioni che ne infirmano la validità generale: il che proverò in fine di questa Nota con un esempio. Viene allora a mancare il criterio integrale permettente di evitare la considerazione delle varie fasi del fenomeno; lo studio di questo richiede inevitabilmente, per $r > 1$, la considerazione di un sistema di equazioni differenziali, di tipo invero semplice, che sarà possibile caso per caso integrare non appena note numericamente le costanti che in esse figurano.

Di fronte a tale stato di cose, mi sono chiesto se in ogni caso sia necessario arrivare alla scrittura di queste equazioni; o se invece esistono casi, oltre quello di $r = 1$, in cui sia possibile conseguire una determinazione diretta delle velocità posteriori, coerente alla natura della teoria impulsiva.

La risposta a tale quesito – cui questa Nota è dedicata – è affermativa, e discende da un esame della forma del potenziale elastico che si può assumere come caratterizzante le reazioni vincolari; precisamente, nella sola

(2) In cui cioè, notoriamente, si ha, indicando T l'energia cinetica:

$$ds^2 = 2T\,dt^2$$

ipotesi che, nella stessa V_n di cui sopra, le ipersuperfici vincolari si taglino ortogonalmente nel punto d'urto O, si ha, come mostrerò, oltre alla nota relazione

$$v_t^+ = v_t^- ,$$

l'altra

$$v_n^+ = -v_n^- ,$$

indicando v_t e v_n le componenti di v rispettivamente sulla varietà intersezione delle ipersuperfici vincolari, e su quella ad essa normale in O e complementare in V_n.

Ciò in quanto tale ortogonalità comporta una semplificazione nell'espressione del potenziale, che consente una separazione di variabili nella trattazione analitica della questione – in ultima analisi, il sussistere di tanti integrali dell'energia quanti sono i vincoli.

Se dunque tali ipotesi di ortogonalità sono verificate, risulta superflua anche la conoscenza delle costanti elastiche, e si ha un immediato criterio, puramente geometrico, per la determinazione dell'atto di moto posteriore.

La cosa ha interesse meccanico concreto, in quanto possono darsi a volontà esempi in cui quelle ipotesi sono verificate; in fine ne sarà esaminato qualcuno. Va poi notato che il risultato sussiste anche se l'elasticità dei vincoli non può ritenersi lineare (come nel caso di urti tra solidi, secondo la teoria di Hertz [3]).

Queste considerazioni sono esposte da principio, per semplicità, nel caso di $r = 2$; la generalizzazione si presenta, a suo luogo, ovvia.

1. Si consideri un sistema olonomo a n gradi di libertà, soggetto a due vincoli unilaterali lisci, fissi e indipendenti dal tempo

$$f_1(q^1, q^2, \cdots, q^n) \geqq 0 \tag{1}$$

$$f_2(q^1, q^2, \cdots, q^n) \geqq 0 , \tag{2}$$

escludendosi inoltre l'intervento di impulsi attivi.

Un tale sistema è rappresentabile notoriamente mediante un punto $P \equiv (q^1, q^2, \cdots, q^n)$ mobile in una V_μ metrizzata colla posizione $ds^2 = 2T\,dt^2$, in cui

$$T = \frac{1}{2} a_{hk}(P)\, \dot{q}^h \dot{q}^k$$

è l'energia cinetica. Le (1) e (2), prese col segno di eguaglianza, rappresentano due ipersuperfici $V_{\mu-1}$ di V_μ, che P non può valicare. È noto che, per la metrica scelta, P si muove come un punto di massa unitaria, avente velocità v di componenti contravarianti $\dot{q}^1, \dot{q}^2, \cdots, \dot{q}^\mu$ e modulo $v = \sqrt{2T}$. Le due ipersuperfici (1) e (2) sono falde di un'unica ipersuperficie Σ, comprensiva di entrambe, per la quale saranno in generale angolosi i punti appartenenti sia

(3) Cfr. Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*. Ch. VIII, 139 (Cambridge, 1927).

a (1) che a (2), che costituiscono evidentemente una $V_{\mu-2}$. Denotiamo con O il punto in cui P urta contro Σ: ci interessa studiare il caso che O appartenga alla $V_{\mu-2}$ su menzionata, che corrisponde all'urto contro entrambi i vincoli. Supponiamo che, all'urto, avvenga una penetrazione infinitesima di P nella zona da questi interdetta al moto; i vincoli – perfettamente elastici – ricacceranno P nella regione consentita dalle diseguaglianze reagendo con forze elastiche che, come detto, per maggiore generalità non riterremo lineari.

Vogliamo determinare la velocità v^+ con cui avviene il distacco di P da Σ, nota quella anteriore all'urto v^-, valendoci della schematizzazione fatta. Notevoli semplificazioni seguono dal supposto carattere infinitesimo della penetrazione: il moto nella zona proibita può essere pensato avvenire, anzichè nella V_n originaria, nella varietà enclidea $\bar{V}_n$ [4] ad essa tangente in O, restando costanti durante tutto il fenomeno d'urto i coefficienti

$$a_{hk}(P) = a_{hk}(O) = \bar{a}_{hk}$$

dell'espressione di T (affatto analogamente a quanto si fa in teoria delle piccole oscillazioni).

Essendo l'elemento lineare della $\bar{V}_\mu$ ora definita

$$\overline{ds}^2 = \bar{a}_{hk}\, dq^h\, dq^k$$

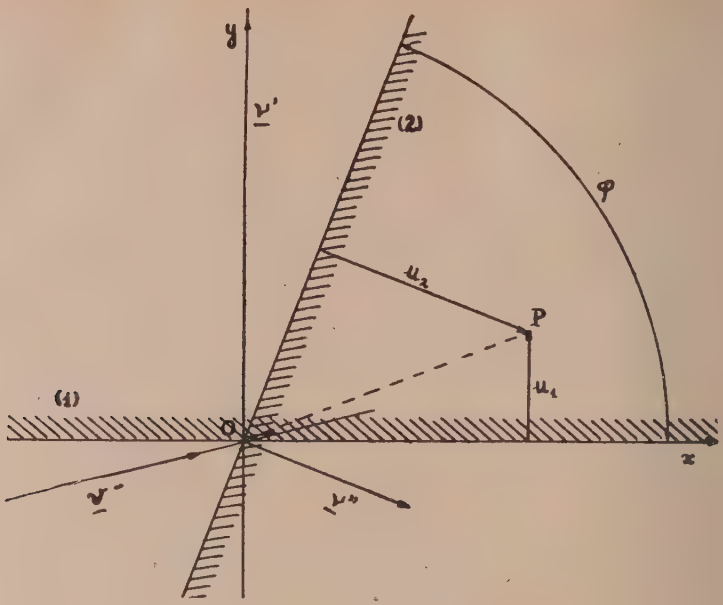
a coefficienti costanti, questa risulta riferita ad assi rettilinei obliqui, pei quali, come è ben noto, si ha

$$\bar{a}_{hk} = e_h^2 \cdot , \qquad \frac{\bar{a}_{hk}}{\sqrt{\bar{a}_{hh}\cdot \bar{a}_{kk}}} = \cos \vartheta_{hk} ,$$

se e_h denota l'unità di lunghezza secondo l'asse h, e ϑ_{hk} l'angolo tra gli assi h e k. Così pure, in luogo della $\bar{V}_{n-2}$ intersezione di (1) e (2), basta considerare la $\bar{V}_{n-2}$; ed è chiaro che i versori ν' e ν'' normali in O rispettivamente a (1) e (2) (orientati verso la parte proibita), individuano con O un iperpiano $\bar{V}_2$ che seca normalmente in O la V_{n-2}, ed è ad essa complementare in $\bar{V}_n$.

Ciò posto, conviene effettuare un cambiamento di coordinate che trasporti l'origine in O, e muti gli assi obliqui della $\bar{V}_n$ in assi cartesiani ortogonali (con unità di lunghezza comune ed eguale a 1). Si può, ciò facendo, sempre scegliere uno di questi assi con la direzione di ν' o di ν'' – sarà per noi l'asse y –, ed imporre che l'iperpiano $\bar{V}_2$ si muti in un iperpiano coordinato; diremo x l'altro asse che su questo viene a giacere. I rimanenti, che denoteremo $x_3, x_4, \cdots, x_n$, saranno ovviamente assi cartesiani di $\bar{V}_{n-2}$ nel nuovo riferimento. Le tracce sul piano xy degli iperpiani tangenti ai vincoli sono due rette, una delle quali è appunto l'asse x; l'angolo φ che esse formano preso nella zona proibita da ambo i vincoli, è evidentemente supplementare all'angolo dei versori ν' e ν'' (si sarà scelto l'asse y colla direzione di ν' o di ν'', in modo da far risultare φ – ovviamente $O < \varphi \leq \pi$ – partente dal semiasse $+x$ e contenuto nel semipiano $y > 0$).

(4) Qui e in casi analoghi, il soprasegno indicherà la varietà euclidea tangente in O a quella sotto segno.



Indichiamo adesso (vedi figura) con u_2 e u_1 ascisse prese, a partire da O, sugli assi di versori ν' e ν''; con $\delta(u)$ la step–function unitaria ($\delta(u) = 1$ per $u > 0$, $\delta(u) = 0$ per $u \leq 0$), e supponiamo che le reazioni elastiche vincolari siano caratterizzabili mediante un potenziale globale del tipo

$$U(u_1, u_2) = -k\delta(u_1)\, u_1^{\alpha_2} - h\delta(u_2)\, u_2^{\alpha_1} \tag{3}$$

($\alpha = 2$ per elasticità lineare; $\alpha = \frac{5}{2}$ nel caso di urto tra solidi elastici; ed h costanti positive, dipendenti eventualmente dalla scelta del punto O). Nelle nuove variabili si ha facilmente

$$U = -k\delta(y) y^{\alpha_2} - \frac{h}{(1+p^2)^{\alpha_1/2}}\, \delta\left(\frac{px - y}{\sqrt{1+p^2}}\right) \cdot (px - y)^{\alpha_1}, \tag{4}$$

avendo posto $p = tg\,\varphi$; le equazioni dei vincoli – in quanto sostituiti, come è lecito, dalle varietà ad essi tangenti in O – divengono rispettivamente

$$y \leq 0$$

$$px - y \leq 0$$

e risulta

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\sum_3^n \dot{x}_i^2 .$$

Note T ed U, sarebbe, in modo ben noto, immediato scrivere le equazioni differenziali reggenti il moto di P nella regione proibita. Ciò non viene

qui fatto, non interessando esse ai fini di questo lavoro; vale tuttavia la pena di segnalare che esse darebbero luogo:

a) alla relazione

$$v_t^+ = v_t^- \tag{5}$$

(già nota, deducibile anche dal principio dei lavori virtuali [5]), conseguenza dell'aver supposto lisci i vincoli:

b) ad un sistema di due equazioni in x e y, involgenti h e k, a coefficienti costanti a tratti causa la presenza delle δ, da integrare, una volta note le condizioni iniziali, con un ovvio criterio di continuità per x , y , $\dot{x}$, $\dot{y}$.

Si perverrebbe dunque, in ogni caso concreto, *ad un problema piano*; analogamente, *r vincoli simultanei darebbero luogo ad un problema in un* δ_r, *indipendente dal valore di n.*

Il procedimento conserva evidentemente valore anche se $r > n$; risultato, questo, degno di nota.

2. Rivolgiamoci adesso al caso che, come detto nell'introduzione, vogliamo in questo lavoro specificatamente considerare: al caso, cioè, che (1) e (2) siano in O ortogonali tra loro. Basta porre $\varphi = \frac{\pi}{2}$ nelle formule superiori: la (4) si riduce alla (3), che si scrive

$$U = -h\delta(x)\,x^{\alpha_1} - k\delta(y)\,y^{\alpha_2}, \tag{3'}$$

e i vincoli si riducono agli assi coordinati: $y \leqq 0$, $x \leqq 0$.

Si ha allora immediatamente che le variabili x e y sono separabili, e risultano sussistere due integrali dell'energia:

$$\dot{x}^2 + Qh\delta(x)\,x^{\alpha_1} = \text{cost.} = (\dot{x}^-)^2 \tag{6'}$$

$$\dot{y}^2 + Qk\delta(y)\,y^{\alpha_2} = \text{cost.} = (\dot{y}^-)^2\,; \tag{6''}$$

uno cioè per ogni componente di v_n.

Evidentemente allora, al distacco dall'asse y, per la (6'), si ha:

$$\dot{x}^+ = -\dot{x}^-$$

e al distacco dall'asse x, per la (6''):

$$\dot{y}^+ = -\dot{y}^-\,;$$

ossia, come si era annunciato

$$v_n^+ = -v_n^-\,. \tag{7}$$

Allo stesso risultato si perverrebbe evidentemente – sempre per vincoli mutuamente ortogonali in O – per r qualsiasi, purechè ora $\leqq n$.

3. La (5) e la (7) risolvono quindi il problema, nelle ipotesi poste, senza che sia necessario conoscere le costanti elastiche ed effettuare integrazioni.

(5) Cfr. la Memoria del CATTANEO citata in (1).

Perchè esse siano applicabili, occorre soltanto che siano verificate le condizioni di ortogonalità nel punto d'urto O. Nel caso di r vincoli simultanei

$$f_h(q^1, q^2, \cdots, q^n) \geqq 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots, r)$$

queste si scrivono

$$\nu_h \times \nu_k = 0, \qquad \text{per } h \neq k$$

ossia

$$a^{ij}\left[\frac{\partial f_h}{\partial q^i}\frac{\partial f_k}{\partial q^j}\right]_{P \equiv O} = 0 \quad (6). \tag{8}$$

Qualora esse siano soddisfatte, si ha

$$v^+ = v_t^- - v_n^- = v^- - Q v_n^-;$$

le componenti contravarianti $\dot{q}_+^i$ di v^+ sono allora date da:

$$\dot{q}_+^i = \dot{q}_-^i - Q \sum_1^r{}_h \left[\frac{a^{ik}\frac{\partial f_h}{\partial q^k}\frac{\partial f_h}{\partial q^j}}{a^{lm}\frac{\partial f_h}{\partial q^l}\frac{\partial f_h}{\partial q^m}}\dot{q}_-^j\right]_{P \equiv O} \quad (7). \tag{9}$$

4. Come semplici esempi di applicazione dei risultati trovati, valgano i seguenti.

A) Si considerino i sistemi S′ ed S″, costituiti rispettivamente (indicando x e y assi ortogonali in O):

il sistema S′; da due punti P_1 e P_2 di massa unitaria, vincolati a scorrere rispettivamente su x e y, collegati ad O da due fili macroscopicamente inestensibili e perfettamente elastici, *di costanti elastiche non necessariamente eguali* e lunghezze a e b. (Si tratta in effetti di due sistemi fisi-

(6) È da osservare che non si può sperare, se le (8) non sono soddisfatte, che possano divenirlo con altra scelta di coordinate; esse hanno infatti carattere invariantivo.

(7) Infatti, per l'ortogonalità dei vincoli:

$$v_n^- = \sum_1^r{}_h v^- \times \nu_h \cdot \nu_h;$$

ν_h, versore normale in O a f_h (orientato ora verso la parte concessa dai vincoli: ma si comprende che ciò è inessenziale) ha componenti covarianti e contravarianti date rispettivamente da:

$$\nu_{hi} = \left[\frac{\frac{\partial f_h}{\partial q^i}}{\sqrt{a^{ij}\frac{\partial f_h}{\partial q^i}\frac{\partial f_h}{\partial q^j}}}\right]_{P \equiv O} \quad \text{e} \quad \nu_h^i = \left[\frac{a^{ik}\frac{\partial f_h}{\partial q^k}}{\sqrt{a^{ij}\frac{\partial f_h}{\partial q^i}\frac{\partial f_h}{\partial q^j}}}\right]_{P \equiv O}$$

Allora

$$v^- \times \nu_h = \nu_{hj}\,\dot{q}_-^j \qquad \text{(perchè di varianza opposta)}$$

$$\dot{q}_{-n}^i = \sum_1^r{}_h \nu_{hj}\,\dot{q}_-^j \cdot \nu_h^i,$$

e seguono le (9).

camente indipendenti, che tuttavia qui conviene, a scopo dimostrativo, riguardare come un unico sistema olonomo);

il sistema S''; da un punto P di massa unitaria, mobile nel piano Oxy, collegato ai punti (a, O) e (O, b) da due fili di lunghezze rispettivamente a e b.

Le equazioni dei vincoli sono rispettivamente:

$$\text{per S'}) \begin{cases} |x-a| \leq 0 \\ |y-b| \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{per S''}) \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 - a^2 \leq 0 \\ x^2 + (y-b)^2 - b^2 \leq 0 \end{cases};$$

donde appare che la ipersuperficie Σ si riduce nel primo caso a due coppie di rette, e nel secondo a una coppia di circonferenze (di equazioni immediatamente deducibili da quelle dei vincoli: basta sopprimere il segno di diseguaglianza). In ogni caso, il punto $Q\ (a, b)$ risulta angoloso per Σ.

L'espressione di T è la stessa in ambo i casi:

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2;$$

S' ed S'' sono rappresentabili quindi entrambi mediante un punto P (coincidente, per S'', col punto concreto), mobile nel piano Oxy, di metrica ovviamente euclidea.

Allorchè P giunge in Q con velocità $v^- \equiv (\dot{x}^-, \dot{y}^-)$, si ha per entrambi i sistemi, in generale, un fenomeno impulsivo con intervento simultaneo dei due vincoli. Questi soddisfano evidentemente alla condizione di ortogonalità nel punto d'urto, richiesta per l'applicabilità delle considerazioni del § 2; poichè ora $v \equiv v_n$, si ha dunque:

$$v^+ = -v^- \qquad [\dot{x}^+ = -\dot{x}^- \ ; \ \dot{y}^+ = -\dot{y}^-].$$

Risultato questo semplicissimo: ovvio senz'altro nel primo caso, non conseguibile tuttavia nell'altro con quanto era stato finora stabilito da altri Autori.

È facile vedere sul primo esempio – appositamente scelto – che il criterio proposto dal Cattaneo per la determinazione dell'atto di moto posteriore può condurre a risultati non corretti. Si dovrebbe infatti, secondo esso, ricavare v^+ facendo riflettere specularmente v^- su di una linea equipotenziale (vedi la (3')), che risulta essere un quadrante di ellisse di centro Q, di semiassi di lunghezza diversa se diverse sono le costanti elastiche, raccordantesi a due semirette parallele agli assi coordinati: se l'ellisse non è un cerchio, si avrà in generale, così procedendo, un valore discordante da quello sopra trovato.

B) Quale ulteriore esempio, in cui si ha a che fare con un ds^2 non euclideo e con fenomeni di urto tra solidi, si consideri infine un *gong*, costituito da una piastra verticale e da una sfera omogenea di raggio R e massa M, sospesa per il suo centro (ciò a schematizzazione di artifici facilmente concepibili) ad un filo di lunghezza $l + R$, in modo che in quiete il filo risulti parallelo alla piastra, e la sfera a questa tangente. Si avrà urto contro ambo

i vincoli per quelle posizioni e velocità anteriori, per cui la sfera tocca la piastra, risultando contemporaneamente teso il filo.

Indichino q^1, q^2, q^3 le coordinate del centro della sfera, q^4, q^5, q^6 gli angoli di Eulero che una terna con questa solidale forma con gli assi dello spazio $Oq^1q^2q^3$; questi siano scelti in modo che il piano della piastra coincida col piano $O\,q^1q^3$ e il centro di essa con l'originale O. Il filo sia fissato per l'altro estremo al punto $A = (O, R, l + R)$. Con tali posizioni le equazioni dei vincoli sono:

$$f_1 = q^2 - R \geqq 0$$

$$f_2 = (q^1)^2 + (q^2 - R)^2 + (q^3 - l - R)^2 - (l + R)^2 \leqq 0 .$$

L'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2} M [(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + (\dot{q}^3)^2] +$$

$$+ \frac{1}{5} M R^2 [(\dot{q}^4)^2 + (\dot{q}^5)^2 + (\dot{q}^6)^2 + Q \cos q^4 \dot{q}^5 \dot{q}^6] .$$

Il punto rappresentativo del sistema si muove dunque in una V_6 di metrica:

$$ds^2 = M (dq^{1^2} + dq^{2^2} + dq^{3^2}) + \frac{2}{5} M R^2 (dq^{4^2} + dq^{5^2} + dq^{6^2} + Q \cos q^4 \, dq^5 \, dq^6) .$$

Una semplice verifica conduce a riconoscere che la (8) è soddisfatta da tutti i valori $\bar{q}^i$ tali che $F_1 = F_2 = 0$. Applicando allora le (9) si trova:

$$\dot{q}^1_+ = \left[1 - \frac{Q (\bar{q}^1)^2}{(l + R)^2}\right] \dot{q}^1 - \frac{Q \bar{q}^1 (\bar{q}^3 - l - R)}{(l + R)^2} \dot{q}^3_-$$

$$\dot{q}^2_+ = - \dot{q}^2_-$$

$$\dot{q}^3_+ = - \frac{Q \bar{q}^1 (Q \bar{q}^3 - l - R)}{(l + R)^2} \dot{q}^1_- + \left[1 - \frac{Q (Q \bar{q}^3 - l - R) (\bar{q}^3 - l - R)}{(l + R)^2}\right] \dot{q}^3_-$$

$$\dot{q}^4_+ = \dot{q}^4_- \quad ; \quad \dot{q}^5_+ = \dot{q}^5_- \quad ; \quad \dot{q}^6_+ = \dot{q}^6_-$$

(formule valide naturalmente nel caso che l'urto avvenga contro *entrambi* i vincoli; altrimenti la cosa è più semplice).

Ad esempio, se il punto d'urto è l'origine O (e quindi $\bar{q}^1 = \bar{q}^3 = 0$; $\bar{q}^2 = R$), si trova:

$$\dot{q}^1_+ = \dot{q}^1_- \quad ; \quad \dot{q}^2_+ = - \dot{q}^2_- \quad ; \quad \dot{q}^3_+ = - \dot{q}^3_- \, ; \text{ ecc.,}$$

relazioni confermanti appieno l'intuizione fisica del fatto.

Astronomia. — *Orbita preliminare e parallasse di ζ Aquari.* Nota di M. A. GIANNUZZI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. La ζ Aquari ($\alpha = 22^h\,26^m$, $\delta = -0°\,17'$; eq. 1950), registrata al n. 15971 del *New General Catalogue of Double Stars* di Aitken, è una binaria importante, la cui stella principale ha la grandezza visuale $m_1 = 4{,}4$, mentre la stella satellite, lievemente meno luminosa, ha la grandezza $m_2 = 4{,}6$. Ambedue le stelle sono di color bianco giallastro (indice di colore $c = 0{,}50$) e del tipo spettrale F 2 e cioè del tipo *presolare*. Poco conosciuta invece è la parallasse, giacchè le determinazioni trigonometriche e spettroscopiche hanno dato risultati assai discordanti tra loro. Infatti il *General Catalogue of Stellar Parallaxes* di Schlesinger dà come parallasse trigonometrica $p = 0'',016$ e come parallasse spettroscopica $p = 0'',042$ e cioè un valore quasi triplo del primo. Per queste ragioni, seguendo il consiglio del prof. G. Armellini, Direttore dell'Osservatorio di Roma, ho cercato di esaminare quale dei due valori di p presenti maggiore attendibilità, calcolando a tale scopo un'orbita preliminare del satellite ed applicando quindi la nota relazione di Eddington tra la massa e la grandezza assoluta.

2. A tale scopo, dalle osservazioni micrometriche eseguite da molti astronomi, fin dai tempi di Herschel, si ha il seguente specchietto, dove ρ e ϑ indicano l'angolo di posizione e la distanza della stella satellite dalla stella principale

Data	ϑ	ρ	Osservatori
1781,28	18°,4	4″,56	W. Herschel
1825,73	359 ,8	3 ,60	Struve
1842,39	350 ,3	3 ,67	Challis, ecc.
1887,50	328 ,9	3 ,51	Grandon
1890,08	324 ,6	3 ,15	Schiaparelli, ecc.
1991,02	320 ,3	3 ,22	Schiaparelli, ecc.
1906,83	316 ,5	3 ,21	Doberck, ecc.
1909,71	312 ,4	3 ,05	Doberck, Urania Obs. ecc.
1909,73	314 ,2	3 ,16	Guillaume
1912,95	309 ,6	2 ,98	Doberck, Phillips, ecc.
1916,09	307 ,2	2 ,91	Doberck, Rabe, ecc.
1920,06	305 ,9	2 ,90	Chandon, ecc.
1922,30	303 ,7	2 ,90	Labitzke, ecc.
1925,56	302 ,5	2 ,84	Doberck, Rabe, ecc.
1926,72	299 ,8	2 ,96	Baize
1937,83	288 ,5	2 ,87	Armellini
1946,91	280 ,5	2 ,83	Armellini

(*) Nella seduta del 10 aprile 1948.

3. Come appare da questa tabella (estratta in gran parte dall'Aitken) dalle prime osservazioni di Herschel alle ultime, eseguite dal prof. Armellini col grande rifrattore di 40 centimetri dell'Osservatorio di Monte Mario, il satellite ha descritto, *in senso retrogrado*, un arco di circa *cento gradi* intorno alla stella principale; arco sufficiente a determinare, con qualche attendibilità, un'orbita preliminare.

Notiamo che un calcolo preliminare di orbita era già stato eseguito da Strand (cfr. « Astronomical Journal »; vol. XLIX), il quale suppone anche l'esistenza di un terzo corpo invisibile alla distanza di 0″,08 da una delle due componenti. Ma Strand scarta praticamente le prime osservazioni di Herschel, dando loro un peso irrilevante (0,02), come pure non dispone delle ultime osservazioni, onde sostanzialmente il suo arco si riduce a soli 65°. Inoltre non si vede chiaramente con quali criteri egli assegni i pesi delle osservazioni, facendoli variare da 0,02 a 0,60 e cioè dando ad alcune osservazioni un peso trenta volte maggiore delle altre. Per mio conto, onde togliere ogni arbitrarietà, ho dato a tutte le osservazioni il medesimo peso, mentre non ho tenuto conto del terzo corpo ancora ipotetico.

A tal fine, ho anzitutto verificato le osservazioni, tracciando graficamente i diagrammi di ϑ e di ρ in funzione del tempo, preso come ascissa, ed apportando piccole correzioni in modo da rispettare la legge delle aree. Quindi, servendomi del metodo di Glasenapp (cfr. Armellini, *Astronomia Siderale*, vol. II) ho preso per origine l'astro principale e, per mezzo degli angoli di posizione e delle distanze, ho tracciato graficamente le diverse posizioni del satellite, prendendo come scala del disegno due centimetri per ogni secondo di arco. Ho ottenuto come equazione dell'orbita apparente

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 1$$

essendo l'asse x diretto secondo il cerchio orario ed avendosi

$$A=0{,}02514 \; ; \; B=-0{,}00167 \; ; \; C=0{,}01435 \; ; \; D=-0{,}03394 \; ; \; E=-0{,}05381.$$

Con questi valori, sono passata dall'orbita apparente all'orbita reale, servendomi del metodo analitico di Kowalsky (cfr. Armellini, op. cit., vol. II) e controllando anche i calcoli col metodo grafico di Zwiers. In tal modo ho ottenuto come elementi dell'orbita reale:

$$a = 4''{,}82 \; ; \; e = 0{,}46 \; ; \; i = \pm\, 144°{,}1 \; ; \; \Omega = 89° \; ; \; \omega = 208° \; ; \; P = 859 \text{ anni}$$

dove le lettere a, e, i, Ω, ω, P indicano il semiasse maggiore, l'eccentricità, l'inclinazione (che si può determinare a meno del segno), la posizione del nodo, l'angolo tra il nodo ed il periastro ed il periodo. Come epoca T del passaggio al periastro del satellite ho trovato l'anno 1978.

Confrontando con l'orbita di Strand, vediamo che essa coincide quasi con la mia per T, che è il 1977, e per Ω a cui Strand assegna il valore 88°,9. Si nota invece qualche differenza negli elementi e, i, ω per cui Strand assegna rispettivamente i valori: $e = 0{,}60$; $i = \pm\, 136°{,}6$; $\omega = 257°$; mentre la

differenza è rilevante per a e per P, per cui Strand dà i valori: $a = 3''{,}40$; P = 400 anni.

Volendo controllare la mia orbita, ho calcolato con questa la posizione del satellite per il 1781, 28; epoca delle prime osservazioni di Herschel. Ed ho trovato $\vartheta = 16°{,}1$ e $\rho = 4''{,}50$; onde le differenze con Herschel sono $\Delta\vartheta = 2°{,}3$ e $\Delta\rho = 0''{,}06$. Analogamente, per il 1946,91 (Armellini) si ha $\Delta\vartheta = 3°{,}4$ e $\Delta\rho = 0''{,}05$ e tutto ciò mostra che la mia orbita preliminare è sufficientemente buona.

4. ESAME DELLE PARALLASSI TRIGONOMETRICA E SPETTROSCOPICA. – Servendomi degli elementi orbitali ora determinati, passo ad esaminare le due parallassi trigonometrica e spettroscopica, cominciando dalla prima.

A tale scopo, indicando con M la grandezza visuale assoluta di un astro e con m la sua grandezza apparente, ricordo la nota formola

$$M = m + 5 + 5 \log p \tag{2}$$

onde, ponendo $p = 0''{,}016$ (valore della parallasse trigonometrica) ottengo per la grandezza visuale assoluta della stella principale $M_1 = 0{,}42$ e per quella della stella satellite $M^2 = 0{,}62$.

Poichè queste stelle hanno il tipo spettrale F 2 e quindi una temperatura effettiva di poco superiore a 6000, le loro grandezze bolometriche assolute sono pressochè eguali (cfr. Eddington, *The internal constitution of the stars*, p. 138) alle grandezze visuali assolute e cioè a 0,42 ed a 0,62. Indicando quindi con $1 - \beta$ il rapporto tra la pressione dell'energia raggiante e la pressione totale, si ha (op. cit., p. 137) per la stella principale $1 - \beta_1 = 0{,}23$ e per la stella satellite $1 - \beta_2 = 0{,}22$.

Ora, prendendo come unità la massa solare ed indicando con μ quella di una stella qualsiasi, si ha la nota formola data dalla teoria della costituzione stellare (cfr. Armellini, op. cit. vol. II, p. 100):

$$\log \mu = -0{,}057 - 1{,}07 \log (1 - \beta) - 0{,}28\, M. \tag{3}$$

Da questa formola ricaviamo per la massa della stella principale $\mu_1 = 3{,}2$ e per quella della stella satellite $\mu_2 = 2{,}8$ onde la massa totale del sistema $\mu_1 + \mu_2$ risulterebbe sei volte superiore alla massa del Sole.

Ma, essendo p la parallasse, la lunghezza del semiasse maggiore dell'orbita del satellite, misurata in unità astronomiche, è data dal rapporto $a : p$; onde, indicando con P il tempo di rivoluzione misurato in anni, abbiamo dalla teoria delle orbite

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{P^2} \left(\frac{a}{p} \right)^3 \tag{4}$$

nella quale, ponendo $a = 4''{,}82$; $p = 0''{,}016$ e P = 859, si ha $\mu_1 + \mu_2 = 37$; valore in piena discordanza con quello precedentemente calcolato (giacchè oltre sei volte maggiore di esso) e che ci mostra che la *parallasse trigonometrica non è attendibile.*

Ripetiamo invece gli stessi calcoli, usando la parallasse spettroscopica $p = 0''{,}042$. Avremo $M_1 = 2{,}5$; $M_2 = 2{,}7$; $1 - \beta_1 = 0{,}12$ ed $1 - \beta_2 = 0{,}11$. La (3) ci dà allora $\mu_1 = 1{,}7$; e $\mu_2 = 1{,}6$ donde $\mu_1 + \mu_2 = 3{,}3$, mentre la (4) da $\mu_1 + \mu_2 = 2{,}1$. Tale valore è dello stesso ordine di grandezza del primo, il che ci mostra che *la parallasse spettroscopica è certamente prossima al vero*. Adotteremo quindi 2,5, e 2,7 come grandezze visuali assolute dei due astri.

5. Temperatura effettiva, raggi e densità dei due astri. – Come abbiamo visto, i due astri hanno indice di colore 0,50 e tipo spettrale F 2, onde dalle tabelle astrofisiche la loro temperatura effettiva τ deve stimarsi di circa 6300 gradi.

D'altra parte, indicando con R il raggio di un astro (misurato prendendo per unità quello del Sole) e con M la sua grandezza visuale assoluta, si ha la formola di Russell (Cfr. Russell, *Astronomy*, vol. II, p. 732):

$$(5) \qquad M = \frac{29500}{\tau} - 5 \log R - 0{,}08 \cdot$$

Da questa deduciamo per i raggi delle due stelle $R = 2{,}6$ ed $R = 2{,}4$; vale a dire, essendo il raggio solare di 697.000 km, il raggio della stella principale sarà di circa 1.800.000 km. e quello della stella satellite di circa 1.680.000 km.

D'altra parte poichè la densità media è proporzionale alla massa ed inversamente proporzionale al cubo del raggio, si trova subito che le densità dei due astri sono eguali a 0,10 ed a 0,12, prendendo come unità la densità media del Sole. E cioè, essendo la densità media solare eguale ad 1,41, si ha per la densità media della stella principale 0,14 e per quella della stella satellite 0,17, avendo posto eguale all'unità quella dell'acqua.

Astronomia. — *Sulla variazione della latitudine dell'Osservatorio di Pino Torinese (I Sala meridiana) nel periodo 1943.8–1945.9*. Nota di A. Fresa, presentata (*) dal Corrisp. G. Cecchini.

1. Nel 1942, il prof. Cecchini, avendo messo in programma lo studio sistematico della variazione della latitudine locale, sottopose il piccolo Cerchio meridiano di Bamberg a modifiche tali da renderlo atto alle osservazioni di latitudine col metodo di Talcott (1).

Dal 4 gennaio al 30 giugno 1943 furono eseguite dallo scrivente, nella I Sala meridiana, osservazioni di latitudine, unicamente per saggiare la potenzialità dello strumento, alternate ad accurate osservazioni e misure per la

(*) Nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) G. Cecchini, *Il R. Osservatorio astronomico di Torino in Pino Torinese*. «Coelum» nn. 1–3 (1943).

determinazione delle costanti strumentali[2], che si protrassero per parecchio tempo.

Col settembre dello stesso anno furono iniziate, con lo stesso strumento, le osservazioni sistematiche di latitudine, e poichè lo scopo di tali ricerche consisteva non solo nel portare un contributo alla conoscenza delle cause delle variazioni locali della latitudine, ma anche nel saggiare l'esattezza della costante di aberrazione annua, ai due gruppi di coppie di stelle, da osservare intorno alla mezzanotte (sistema internazionale), furono aggiunti un gruppo precedente ed uno seguente, portando ad 8 le ore di osservazione continuative. Per poter realizzare questo programma, venne associata allo scrivente, con turno alternato, nella stessa notte la dott.ssa E. Tedeschini.

Contemporaneamente, nell'attigua II Sala meridiana, furono iniziate dal dott. N. Missana, per conto della Commissione Geodetica Italiana, e come continuazione del Servizio internazionale di Carloforte, analoghe osservazioni, limitatamente ai due gruppi centrali del programma. Queste osservazioni furono eseguite ad un telescopio zenitale (di Wanschaff) avuto in prestito dall'Osservatorio di Napoli[3].

Il programma di osservazioni contemporanee ai due strumenti fu concertato d'accordo tra il prof. Carnera (Direttore dell'Osservatorio astronomico di Napoli e dell'Ufficio Centrale del Servizio internazionale delle latitudini) ed il prof. Cecchini. Pertanto furono scelte dal *Boss General Catalogue* (*1950.0*) 96 coppie di stelle (riunite in 12 gruppi di 8 coppie ciascuno) e rispondenti a tutti i requisiti necessari per gruppi da collegarsi a *catena*.

Nella presente Nota riassumo i risultati della variazione di latitudine, ottenuti alla I Sala meridiana, basati sull'intero complesso di osservazioni, riservandomi lo studio ulteriore di tali osservazioni tenendo conto della loro estensione nel corso della intera notte.

Le osservazioni, iniziate il 6 settembre 1943, ebbero termine il 5 gennaio 1946, coprendo due cicli completi di Chandler. Ad entrambi gli osservatori si deve anche il lavoro di riduzione e di controllo di 4466 latitudini, di cui 2557 osservate dalla dott.ssa Tedeschini. Giova inoltre precisare che son dovute all'Ufficio Centrale di Napoli le posizioni medie di 5 gruppi e le costanti besseliane di 4 gruppi. La parte rimanente del programma fu concretata dal prof. Cecchini con la parziale collaborazione del personale dell'Osservatorio, mentre i calcoli delle rimanenti costanti besseliane e di tutte le posizioni apparenti, oltre alle riduzioni delle latitudini osservate, furono ripartiti fra i tre osservatori[3].

Ulteriori verifiche e la discussione completa delle osservazioni al Bamberg sono dovute allo scrivente, avendo la dott.ssa Tedeschini lasciato l'Osservatorio nell'autunno del 1946.

(2) A. FRESA, *Saggio di determinazione della latitudine della prima sala meridiana dell'Osservatorio di Torino (Pino Torinese) col metodo di Talcott*. «Contrib. Osserv. Torino», Nuova serie, n. 8 (1947).

(3) G. CECCHINI, *Relazione sull'attività dell'Osservatorio astronomico di Torino nel triennio 1942–1944*. Soc. Edit. Torinese (1945).

TABELLA I.

Riduzioni medie delle declinazioni delle singole coppie alle declinazioni medie dei rispettivi gruppi.

Gruppi Coppie	Δδ	Gruppi Coppie	Δδ	Gruppi Coppie	Δδ	Gruppi Coppie	Δδ	Gruppi Coppie	Δδ	Gruppi Coppie	Δδ
I		III		V		VII		IX		XI	
1	—0″.11	17	—0″.15	33	+ 0″.36	49	—0″.33	65	+ 0″.18	81	—0″.04
2	— .18	18	+ .34	34	+ .25	50	+ .06	66	— .24	82	+ .24
3	+ .09	19	— .08	35	— .59	51	— .06	67	+ .21	83	+ .16
4	— .05	20	— .02	36	.00	52	+ .30	68	— .30	84	+ .21
5	+ .32	21	— .29	37	— .14	53	+ .32	69	— .17	85	— .42
6	— .03	22	— .01	38	— .14	54	+ .21	70	— .29	86	+ .19
7	— .02	23	+ .04	39	— .08	55	— .18	71	— .60	87	— .38
8	— .09	24	+ .16	40	+ .23	56	+ .07	72	+ .11	88	— .19
II		IV		VI		VIII		X		XII	
9	+ .49	25	+ .11	41	+ .20	57	+ .82	73	— .32	89	— .08
10	+ .33	26	+ .09	42	— .24	58	— .09	74	+ .23	90	+ .35
11	— .51	27	— .28	43	+ .30	59	— .60	75	— .34	91	— .08
12	+ .54	28	+ .35	44	+ .65	60	+ .36	76	— .01	92	— .03
13	— .17	29	+ .05	45	+ .11	61	— .50	77	+ .07	93	+ .55
14	— .51	30	+ .07	46	— .34	62	+ .22	78	+ .20	94	— .10
15	+ .05	31	— .22	47	— .12	63	+ .02	79	— .03	95	— .06
16	— .03	32	— .09	48	+ .03	64	+ .11	80	— .17	96	+ .02

2. Nella elaborazione dei dati di osservazione, s'impose per prima la ricerca di una differenza sistematica fra i due osservatori, che è risultata praticamente nulla ($F - T = +0''.006 \pm 0''.012$): allo scopo furono confrontate 703 latitudini scelte fra gruppi completi e in serate attigue.

L'error medio di un'osservazione può stimarsi non lontano da $\pm 0''.3$.

Utilizzando il complesso di latitudini ho trovato quale correzione al passo del micrometro concluso nella ricerca precedente [2] ($R = 54''.371$) il valore $\Delta R = -0''.0054$, in base al quale ho rielaborato tutte le latitudini. Per compensare gli errori di declinazione delle coppie di stelle sono stati utilizzati solamente i gruppi osservati al completo, confrontando la media

delle latitudini date da ogni coppia con la media (pesata [4]) fornita dal gruppo a cui essa appartiene, per tutto il periodo di osservazione del gruppo; infine, pesando i valori ottenuti per i vari periodi, in accordo con le notti di osservazione, si sono avute le riduzioni medie di ogni coppia alla declinazione media del gruppo a cui appartiene, indicate con $\Delta\delta$ nella Tabella I.

Partendo dalle latitudini così modificate, e formate le medie per ciascun gruppo osservato, è stato applicato il metodo di riduzione a catena per determinare le correzioni alle declinazioni medie dei gruppi. L'error medio di chiusura per i due anni è risultato $-0''.092$. Ripartito sui 12 gruppi, ha permesso di concludere le correzioni alle declinazioni medie di ciascun gruppo, indicate con $\Delta\delta_0$ e riportate nella Tabella II.

Tabella II.

Riduzione dei singoli gruppi alla declinazione media dei 12 gruppi.

Gruppo	$\Delta\delta_0$	Gruppo	$\Delta\delta_0$	Gruppo	$\Delta\delta_0$	Gruppo	$\Delta\delta_0$
I	$-0''.136$	IV	$-0''.141$	VII	$-0''.006$	X	$+0''.071$
II	$+.029$	V	$-.048$	VIII	$-.026$	XI	$+.139$
III	$-.124$	VI	$+.132$	IX	$+.167$	XII	$-.056$

Tabella III.

Latitudini istantanee osservate.

Data	45° 2′	Nr. latit.	Data	45° 2′	Nr. latit.	Data	45° 2′	Nr. latit.
1943.731	20″.885	235	1944.581	21″.026	145	1945.281	20″.665	139
.808	20 .783	74	.637	21 .006	215	.392	20 .902	138
.887	20 .848	173	.730	20 .970	174	.466	20 .946	212
.992	20 .822	173	.812	20 .920	105	.549	21 .089	185
1944.043	20 .781	200	.874	20 .818	213	.646	21 .152	201
.137	20 .769	163	.970	20 .697	77	.717	21 .107	106
.228	20 .905	221	1945.046	20 .669	33	.789	21 .142	104
.319	20 .931	181	.147	20 .574	74	.892	20 .939	213
.397	20 .945	185	.200	20 .628	163	.988	20 .793	178
.471	21 .006	179						

(4) A ciascuna coppia ho attribuito un peso in relazione all'error medio delle declinazioni delle due stelle.

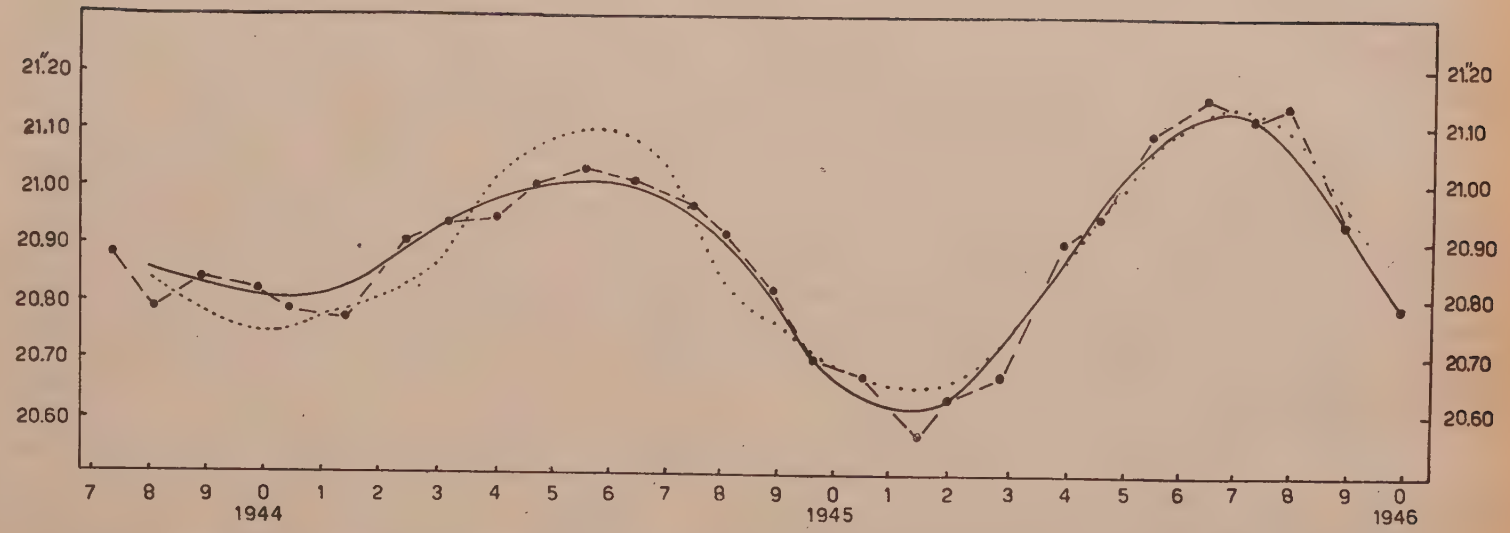


Fig. 1. – Curve rappresentative della variazione della latitudine dell'Osservatorio di Torino, in Pino Torinese (I Sala meridiana). I punti rapprerentano i valori della latitudine istantanea; la curva a tratto intero è la curva di variazione perequata; la curva punteggiata rappresenta la variazione calcolata in base ai risultati del Servizio Internazionale delle Latitudini.

Le riduzioni concluse nelle Tabelle I e II hanno permesso di concludere le latitudini *corrette*, di cui si son fatte le medie mensili per ciascun gruppo. Pesando sia i tempi di osservazione che le latitudini, in base al numero mensile di osservazioni per ogni gruppo, si ottengono le seguenti latitudini istantanee osservate (raggruppate nella Tabella III), per ciascuna combinazione di gruppi.

Perequando di 3 in 3 le latitudini istantanee osservate e tracciando la curva perequata, da questa (fig. 1) si ricavano, di decimo in decimo di anno, le corrispondenti latitudini perequate (φ_p), riportate nella Tab. IV, le quali vengono ridotte al polo medio mediante la relazione:

$$\varphi_o = \varphi_p - (x \cos\lambda + y \sin\lambda) = \varphi_p - \Delta\varphi$$

ove x, y sono le coordinate del polo concluse (alla data attuale) dall'Ufficio centrale delle latitudini [5], mentre $\lambda = -31^m\,6^s.52$ è la longitudine della I Sala meridiana. Facendo la media delle latitudini φ_o si ha la latitudine media relativa al periodo delle osservazioni e dal sistema delle declinazioni concluso [6]:

$$\Phi_o = 45^\circ\ 2'\ 20''.827.$$

Sommando questo valore ai $\Delta\varphi$ si hanno le latitudini calcolate (φ_c), e quindi le differenze $\varphi_p - \varphi_c$ conducono ai residui di rappresentazione O — C elencati nella Tabella IV. Quivi, affiancati ai residui, figurano le differenze di temperatura (perequate), ottenute dalle letture ai termometri posti sia allo strumento, sia alla finestra a Nord e a. quella a Sud della Sala meridiana.

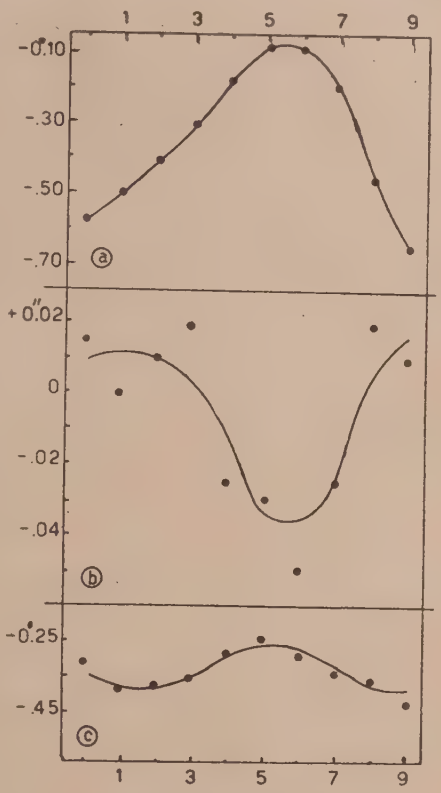


Fig. 2. – La curva intermedia *b*) rappresenta i residui di rappresentazione della latitudine osservata (variazione non polare della latitudine), medi per i due anni di osservazione. Le curve *a*) e *c*) rappresentano, rispettivamente, le corrispondenti variazioni medie delle differenze di temperatura N–S e (N–S)/2–Str., misurate a N, a S e allo Strumento.

Facendo le medie, sempre per decimi di anno, sia per i residui che per le differenze di temperatura, dal confronto dei rispettivi grafici (fig. 2) risulta

(5) Si ringrazia vivamente il prof. Carnera per aver cortesemente rese note, prima della loro pubblicazione, le coordinate x, y del polo, concluse all'Ufficio centrale.

(6) Il procedimento è giustificato dal fatto che i residui O — C di rappresentazione, che altro non sono che il *termine z locale*, hanno periodo annuo.

che la curva media dei residui (*b*) – i quali costituiscono il *termine z* o *di Kimura*, ovvero la variazione non polare della latitudine – presenta un legame particolarmente significativo con la curva delle differenze di temperatura tra Nord e Sud della Sala meridiana.

TABELLA IV.

Epoca	φ_p (perequata)	$\Delta\varphi$	φ_o $(\varphi_p - \Delta\varphi)$	φ_c $(\Phi_o + \Delta\varphi)$	residui $(\varphi_p - \varphi_c)$	differ. di temperatura N — S	differ. di temperatura $\frac{N+S}{2}$ — str.
1943.8	20″.86	+ 0″.01	20″.85	20″.84	+ 0″.02	—	—
.9	20 .83	— .05	.88	20 .78	+ .05	—	—
1944.0	20 .81	— .08	.89	20 .75	+ .06	— 0°.32	— 0°.13
.1	20 .82	— .05	.87	20 .78	+ .04	— .38	— .30
.2	20 .86	— .02	.88	20 .81	+ .05	— .37	— .35
.3	20 .92	+ .04	.88	20 .87	+ .05	— .30	— .35
.4	20 .98	+ .19	.79	21 .02	— .04	— .15	— .29
.5	21 .00	+ .26	.74	21. 09	— .09	— .07	— .26
.6	21 .00	+ .28	.72	21 .11	— .11	— .07	— .30
.7	20 .98	+ .20	.78	21 .03	— .05	— .17	— .30
.8	20 .92	+ .01	.91	20 .84	+ .08	— .53	— .32
.9	20 .80	— .06	.86	20 .77	+ .03	— .85	— .46
1945.0	20 .67	— .13	.80	20 .70	— .03	— .82	— .51
.1	20 .62	— .17	.79	20 .66	— .04	— .63	— .49
.2	20 .63	— .17	.80	20 .66	— .03	— .47	— .42
.3	20 .73	— .09	.82	20 .74	— .01	— .32	— .37
.4	20 .88	+ .06	.82	20 .89	— .01	— .18	— .27
.5	21 .02	+ .16	.86	20 .99	+ .03	— .12	— .24
.6	21 .11	+ .27	.84	21 .10	+ .01	— .11	— .28
.7	21 .13	+ .30	.83	21 .13	.00	— .19	— .36
.8	21 .06	+ .27	.79	21 .10	— .04	— .40	— .40
.9	20 .93	+ .14	.79	20 .97	— .04	— .46	— .41

Le nostre osservazioni confermano quanto già da molti altri osservatori è stato messo in luce, che cioè, fra le molteplici cause che dànno luogo

al termine z, la più importante è ritenuta quella dovuta all'effetto di rifrazione stagionale, per le diverse stratificazioni dell'aria tra l'estate e l'inverno.

Un confronto della curva dei residui con quella delle differenze di temperatura tra l'esterno e l'interno della Sala (c) dice poco, a causa dell'esigua escursione termica (che pur presenta un regolare andamento): ciò denota una buona aereazione della Sala stessa.

Che l'andamento dei residui (Tabella IV) presenti un carattere regolare a periodo pressochè annuo non può dirsi in verità; nel primo periodo di osservazione si nota un'accentuata fluttuazione che raggiunge un'escursione di circa 0".2, mentre nel secondo periodo è ridotta appena alla metà del valore precedente.

L'importante questione di una correlazione fra i residui di rappresentazione delle latitudini osservate e le variazioni di temperatura nei pressi dello strumento sarà esaminata più a fondo in altra Nota dal prof. Cecchini (7) quando saranno noti i risultati delle osservazioni eseguite alla II Sala meridiana, estese fino al gennaio del 1947.

Un vivo ringraziamento al prof. Cecchini per gli utili consigli e per il fermo atteggiamento verso il Comando tedesco, che ci permise di poter continuare l'importante serie di osservazioni durante l'occupazione militare che trasformò l'Osservatorio in un campo trincerato.

Geodesia. — *Determinazioni gravimetriche in Etiopia.* Nota di G. B. PACELLA, presentata (*) dal Corrisp. G. BOAGA.

Per iniziativa e con i mezzi dell'Istituto geografico militare italiano eseguimmo in Etiopia una vasta campagna gravimetrica costituita da 14 stazioni distribuite fra le latitudini 8° 54′ e 11° 30′ Nord e le longitudini 38° 45′ e 42° 48′ Est di Greenwich di quote molto elevate comprese fra 800 m. e 2900 m. I lavori si svolsero, per ragioni di economia, in connessione agli altri di indole astronomica e cartografica cui fummo addetti dal 1937 agli inizi del 1941.

Strumenti impiegati e modalità osservative: apparato gravifotografico Conyngham con tre pendoli di invar e coltelli di stellite; radio I.G.M.; cronografo Nardin; cronometro Mercer. Furono fatti oscillare in opposizione di fase i pendoli estremi lasciando libero e fermo il pendolo centrale. Furono adoperate pellicole Ferrania. Lo spoglio di queste fu eseguito col metodo di Meinesz. La sistemazione dell'apparato è quella riportata in: G. B. Pacella, *Costanti dei pendoli Conyngham. Determinazioni gravimetriche a Firenze I.G.M. ed a Monte Senario. Considerazioni sull'apparecchiatura gravifotografica terrestre.* Firenze, I.G.M., 1934.

(7) Un'accurata analisi su questo argomento fu fatta sulle osservazioni eseguite a Merate: confr. G. CECCHINI, *La variazione della latitudine dell'Osservatorio di Merate nel periodo 1928.9–1932.3.* « Pubbl. Osserv. Merate », n. 6 (1934).

(*) Nella seduta del 10 aprile 1948.

Le costanti dei pendoli sono 713×10^{-7} per la densità, e $4{,}3 \times 10^{-7}$ per la temperatura. Come stazione fondamentale di riferimento fu tenuta Firenze (Sede dell'I.G.M.) con $g_f = 980{,}501$ gal. I risultati delle osservazioni e dei calcoli sono raccolti negli specchi allegati; è da aggiungersi poi che il collegamento Firenze–Addis Abeba fu ripetuto successivamente con la mensola Mioni ed i quattro pendoli Schneider di bronzo 101, 102, 103, 104 ottenendo per la gravità ad Addis Abeba, un valore inferiore di 4 milligal rispetto a quello ottenuto con l'apparato Conyngham. La determinazione con la apparecchiatura Mioni–Schneider non figura negli specchi annessi.

Il *calcolo della precisione* è stato fatto secondo il metodo di Borras, ricorrendo alle equazioni:

$$\begin{cases} 2\,\mu^2 = \dfrac{[\delta\delta]}{[n] - r} = 138{,}9 \\ \dfrac{\mu^2}{2} + \chi^2 = \dfrac{[VV]}{[n] - r} = 552{,}5 \\ \dfrac{2\,\mu^2}{n} + 2\,\lambda^2 = M^2\,(S_2 - S_1) = 191{,}2 \end{cases}$$

dove:

n è il numero delle serie osservate e calcolate, ciascuna di due pendoli contemporanei;

r è il numero delle stazioni eseguite, distinte o no;

δ deriva dalle differenze d di natura di due pendoli o contemporanei qualsiasi di una stessa stazione; presi secondo un certo ordine: precisamente una δ è lo scostamento tra la media delle d di una stazione e una d di quella stazione;

V è la differenza tra la media del pendolo medio d'una stazione ed il singolo pendolo medio;

$S_2 - S_1 = D$ è la differenza fra la media dei due pendoli di una stazione; si traggono poi le differenze tra la D di ciascuna stazione e la media m di tutte le stazioni, indi i quadrati di questa differenza $(D - m)^2$ (v. specchio II).

μ è l'errore medio accidentale della durata d'oscillazione di un solo pendolo di una serie, errore che non muta nè col pendolo nè con la serie, nè con la stazione;

χ è l'errore medio del pendolo medio di una serie; è generato dalle fluttuazioni di cause varie (escluse le precedenti), con effetti identici sui due pendoli contemporanei, che praticamente si compensano in ogni stazione;

λ è l'errore medio di stabilità di ciascun pendolo; $S_2 - S_1$ varia da stazione a stazione per difetto di stabilità dei pendoli; l'errore λ connesso con tale instabilità si calcola appunto derivandolo dall'errore medio da cui è affetto $S_2 - S_1$, quando si consideri questa differenza variabile da stazione a stazione di un'unica entità.

I. – RIEPILOGO DELLE DETERMINAZIONI GRAVIMETRICHE D'ETIOPIA.

STAZIONI	φ λ	H	g_0-g g''_0-g_0	g (osservata)	g_0	g''_0	γ_0	$g_0-\gamma_0$	$g''_0-\gamma_0$
		m	gal.	gal.	gal.	gal.	gal.	mgal.	mgal.
Metahara . . .	8°.54′,0″ 39 .55′,3	948	+ .293 — .111	977.863	978.156	978.045	978.172	— 16	— 127
Addis Abeba .	9 .01 ,4 38 .45 ,2	2426	+ .749 — .284	.465	.214	977.930	.176	+ 38	— 246
Ponte Auasc .	9 .02 ,0 40 .11 ,0	833	+ .257 — .097	.897	.154	978.057	.176	— 22	— 119
Harrar	9 .18 ,6 42 .07 ,9	1854	+ .572 — .217	.633	.205	977.988	.184	+ 21	— 196
Giggiga . . .	9 .21 .2 42 .48 ,0	1633	+ .504 — .191	.714	.218	978.027	.185	+ 33	— 158
Dire Daua . .	9 .35 ,4 41 .51 ,6	1216	+ .375 — .142	.824	.199	978.057	.192	+ 7	— 135
Debra Derhan	9 .40 ,7 39 .31 ,6	2854	+ .881 — .334	.411	.292	977.958	.195	+ 97	— 237
Debra Sina . .	9 .51 ,0 39 .47 ,0	2716	+ .838 — .318	.423	.261	977.943	.199	+ 62	— 256
Giarrà	10 .31 ,0 39 .57 ,5	1456	+ .449 — .170	.757	.206	978.036	.221	— 15	— 185
Combolcià . .	11 .04 ,9 39 .44 ,5	1879	+ .580 — .220	.654	.234	978.014	.239	— 5	— 225
Dessiè	11 .06 ,4 39 .38 ,7	2703	+ .834 — .316	.472	.306	977.990	.240	+ 66	— 250
Batié	11 .11 ,3 40 .01 ,5	1676	+ .517 — .196	.760	.277	978.081	.243	+ 34	— 162
Cantiere 44 .	11 .14 ,9 40 .12 ,7	913	+ .282 — .107	.953	.235	978.128	.245	— 10	— 117
Uccialli Presidio	11 .30 ,2 39 .36 ,6	1879	+ .580 — .220	.637	.217	977.997	.254	— 37	— 257

Leggenda:

φ, latitudine; λ, longitudine; H, quota; g_0-g, riduzione di Faye; g''_0-g_0, riduzione di Bouguer; g, gravità osservata; g_0, gravità ridotta al livello del mare con la riduzione di Faye; g''_0, gravità ridotta al livello del mare con le riduzioni di Faye e di Bouguer; γ_0, gravità normale; $g^0-\gamma_0$, anomalia di Faye; $g''_0-\gamma_0$, anomalia di Bouguer.

Risolvendo il sistema precedente di ottengono i risultati:

$$\mu^2 = 69{,}45 \quad ; \quad \chi^2 = 517{,}77 \quad ; \quad \lambda^2 = 86{,}50.$$

Per Δ, errore medio dipendente dalle letture ai termometri ed ai barometri, si è assunto il valore $\pm$ 2.

Si avverte che il [V V] della stazione di Dessié non ha concorso alla formazione delle somme essendo il contributo relativo assai forte: il risultato di Dessié è perciò da ritenersi meno preciso di quelli ottenuti nelle altre stazioni.

II. – Calcolo delle precisioni.

Stazioni	n	$[\delta\delta]$	[VV]	$D=S_2-S_1$	$D-m$	$(D-m)^2$	M_s-s_f
Firenze (1937). .	9	180	0611	— 11	12	144	—
Metahara. . . .	5	1227	3074	— 7	16	256	$\pm$ 15·10−7
Ponte Auasc . .	8	691	3973	— 15	8	64	13
Addis Abeba (1937) . . .	10	220	0807	— 28	5	25	10
Debra Behran. .	9	1504	9439	— 17	6	36	13
Debra Sina . .	5	2244	4239	— 10	13	169	15
Giarrà	6	509	9628	— 25	2	4	14
Combolcià . . .	8	5250	2872	— 33	10	100	13
Batié.	7	735	0576	— 17	6	36	13
Cantiere 44 . .	8	339	14752	— 23	0	0	13
Uccialli Pres. .	8	870	5244	— 28	5	25	13
Addis Abeba (1938)	8	035	0594	— 44	21	441	10
Giggica.	8	300	0563	— 54	31	961	13
Harrar	8	193	0308	— 34	11	121	13
Dire Daua . . .	7	369	1771	— 22	1	1	13
Firenze (1939). .	8	057	0115	+ 3	26	676	—
$\Sigma =$	122	14723	58566	— 365		3059	

Sono stati calcolati poi gli errori medi della durata di una oscillazione (M_s) mediante la formula:

$$M_s^2 = \frac{\mu^2}{2n} + \frac{\chi^2}{n} + \frac{\lambda^2}{2}$$

per i valori di n che interessano. Per le stazioni di Firenze e di Addis Abeba si è posto $\frac{\lambda^2}{4}$ in luogo di $\frac{\lambda^2}{2}$ perchè ripetute due volte. Con i valori M_s e con quello della stazione fondamentale M_{s_f} si sono ricavati gli

errori medi M_{s-s_f} delle differenze delle durate di oscillazione fra le singole stazioni e la stazione fondamentale mediante la

$$M_{s-s_f} = \pm \sqrt{M_s^2 + M_{s_f}^2 + \Delta^2}.$$

Per vari valori di n si traggono i seguenti risultati:

n	M_S^2	$M_S^2 + M_{S_f}^2 + \Delta^2$	M_{S-S_f}
5	153,7	202	$\pm$ 15 $\times$ 10^{-7} sec
6	135,3	193	14
7	122,1	180	13
8	112,2	170	13
9	104,6	162	13
10	98,4	156	12
17	54,1	—	—
18	52,3	110	10

da cui gli errori medi M_{S-S_f} dello Specchio II.

Da questo specchio risulta che l'errore medio M_{S-S_f} relativo ad una stazione generica è $\pm$ 13 $\times$ 10^{-7} sec., perciò applicando la nota formula $M_{g'-g} = \frac{2g}{S} M_{S-S_f}$ si ha per l'errore medio di una differenza di gravità $\pm$ 5 milligal.

La *gravità normale* γ_0 è stata calcolata con la formula internazionale 1930 e per le riduzioni al mare di Faye e di Bouguer sono state calcolate le differenze:

$$g_0 - g = + \frac{2g}{R} H \quad ; \quad g_0'' - g_0 = - \frac{3}{2} \frac{\delta}{\delta_m} \frac{g}{R} H$$

con R raggio della sfera locale, H quota della stazione, δ densità media superficiale δ_m densità media terrestre, assumendo sempre

$$\delta = 2{,}8 \quad \text{e} \quad \delta_m = 5{,}52.$$

In un terreno come l'acrocoro abissino s'imporrebbe invero una maggior cura nell'applicazione della riduzione di Bouguer (e di quella topografica non considerata) e ciò per il valore da attribuirsi a δ; ma su questo argomento ritorneremo in altro momento. Per ora, limitandoci a confrontare con l'altitudine H l'anomalia di Bouguer $g_0'' - \gamma_0$ (v. specchio I), possiamo notare che risultano confermate le ben note teorie isostatiche.

In Giarrà, Combolcià, Dessiè, Cantiere 44, Uccialli Presidio la latitudine e la longitudine furono ottenute con osservazioni speditive all'astrolabio Claude e Driencourt, e la quota col termobarometro. Per le altre stazioni ci servimmo di valori preesistenti.

Furono impiegati i segnali radio delle stazioni Bordeaux, Rugby e Nauen, e altresì applicate le correzioni del B. de l'H.

Fisica (Ottica). — *Sulla luce diffratta da innumerevoli aperture distribuite a caso su un diaframma opaco.* Nota di G. Toraldo di Francia, presentata (*) dal Socio G. Abetti.

§ 1. – Non sembra che sia stata ancora esaurita la questione della diffrazione da parte di innumerevoli aperture, distribuite a caso su un diaframma opaco (1). Eppure non si tratta soltanto di un elegante problema matematico, bensì di una questione di reale interesse fisico. Essa si presenta, per esempio, nella diffusione della luce, nell'irradiazione oculare, negli aloni atmosferici, negli strumenti ottici imperfetti (e praticamente in tutti gli strumenti ottici reali), nella diffrazione dei raggi X, in alcuni campi dell'acustica.

Non sempre sono stati distinti con la necessaria chiarezza i vari elementi che entrano in questa delicata ricerca. Per questo uno degli scopi del presente lavoro è quello di inquadrare nettamente il problema attraverso il suo sviluppo storico. Ciò fatto verrà dedotta con metodo matematico rigoroso una formula generale, che servirà di base per successivi studi applicativi.

§ 2. – Conviene distinguere due forme differenti nelle quali può presentarsi il problema.

La prima forma è quella in cui, a causa di una continua e rapida variazione della distribuzione delle aperture, oppure a causa dell'estensione della sorgente luminosa, si deve fare una media fra molte distribuzioni casuali diverse. Se le posizioni delle aperture sono statisticamente indipendenti fra loro, non si ha in questo caso nulla di notevole, in quanto che l'intensità diffratta in una data direzione da N aperture eguali ed egualmente orientate è eguale a N volte l'intensità diffratta nella stessa direzione da una sola apertura. La figura di diffrazione totale è, per così dire, la somma delle figure di diffrazione delle singole aperture.

Ma il problema diviene interessante quando le distribuzioni non siano più completamente casuali, come, per esempio, quando non si ammetta la possibilità di sovrapposizione di più aperture o, comunque, si stabilisca una interdipendenza statistica fra le posizioni di esse. Si ha allora una situazione intermedia fra l'ordine completo (reticolo) e il disordine completo. Questo caso ha grande importanza soprattutto per il suo analogo tridimensionale della diffrazione dei raggi X da parte dei corpi amorfi condensati (gas compressi, liquidi, vetri). Infatti le posizioni delle molecole in questi corpi sono

(*) Nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) Nel seguito, per comodità di discorso, ci riferiremo soltanto a questo enunciato del problema. Ma esso, per il principio di Babinet, è perfettamente equivalente a quello della diffrazione da parte di innumerevoli particelle opache, distribuite a caso su una superficie trasparente.

statisticamente interdipendenti. La figura di diffrazione è allora costituita da alcuni anelli larghi e sfumati. Le formule fondamentali per la trattazione del fenomeno furono date da Zernike e Prins [2] e da Debye e Menke [3]. Ma, data la difficoltà teorica di assegnare la legge di distribuzione statistica, il Prins [4] e Reesinck e De Vries [5] si sono valsi, per uno studio qualitativo, proprio del modello bidimensionale, costituito da semi opachi cosparsi su una lamina di vetro o da aperture circolari praticate in un diaframma opaco. Ma, anche senza eseguire esperienze speciali, si può osservare l'interessante fenomeno, semplicemente fissando una sorgente luminosa intensa su fondo scuro. Le particelle diffrangenti, statisticamente interdipendenti, sono le cellule dell'epitelio corneale. Qualunque individuo normale può vedere due anelli (aloni) anche senza trovarsi nelle speciali condizioni fisiopatologiche segnalate da Melmore [6].

§ 3. – La seconda forma del problema è quella in cui la distribuzione delle aperture è fissa e la sorgente è sufficientemente piccola.

In questo caso l'intensità diffratta da N aperture eguali ed egualmente orientate, distribuite a caso, non è necessariamente eguale a N volte l'intensità diffratta da una singola apertura. Si hanno invece delle fluttuazioni notevoli attorno a questo valore medio, dipendenti dalla direzione, ossia dal punto considerato nella figura di diffrazione. Queste fluttuazioni, notate sperimentalmente da Exner [7], furono interpretate teoricamente da Lord Rayleigh [8], nel caso che le vibrazioni da comporre fossero tutte eguali ed avessero le fasi distribuite a caso fra $-\infty$ e $+\infty$. Il Laue [9] estese la trattazione al caso di aperture di forma ed orientamento qualsiasi.

Ma qui le cose si complicarono. Era già stato notato da Exner che le fluttuazioni d'illuminamento nella figura di diffrazione avevano un orientamento prevalentemente radiale. Egli credette di spiegare il fenomeno attribuendolo alla mancanza di monocromaticità della luce impiegata. Laue dimostrò facilmente l'infondatezza di questa opinione, mentre mise in evidenza che la derivata dell'illuminamento nella figura di diffrazione ha in media un valore più elevato in senso tangenziale che in senso radiale. Senonchè si accorse in seguito che nemmeno questa spiegazione era accettabile, perchè l'ordine di grandezza del fenomeno reale era ben maggiore di quello previsto dal calcolo. Anche il Lorentz [10] confermò per via teorica che la figura doveva avere struttura granulare e non fibrosa in senso radiale. Ora, poichè le nume-

(2) F. ZERNIKE e J. A. PRINS, « Zft. Phys. », *41*, p. 184 (1927).
(3) P. DEBYE e H. MENKE, « Phys. Zft. », *31*, p. 797 (1930).
(4) J. A. PRINS, « Naturwiss. », *19*, p. 435 (1931).
(5) J. J. M. REESINCK e D. A. DE VRIES, « Physica », *7*, p. 603 (1940).
(6) S. MELMORE, « Nature », *127*, p. 15 (1931).
(7) K. EXNER, « Wied. Ann. », *9*, p. 239 (1880).
(8) Lord RAYLEIGH, « Phil. Mag. », *10*, p. 73 (1880).
(9) M. LAUE, « Sitz. Berl. Ak. Wiss. », p. 1144 (1914).
(10) H.A. LORENTZ, « Collect. Pap. », *4*, p. 125 (1918).

rose esperienze eseguite erano lì per confermare il contrario, il Laue [11] si credette costretto ad ammettere addirittura che per quell'ordine di fenomeni non fosse più valida l'ottica classica. Dopo un altro tentativo di spiegazione qualitativa, fatto da de Haas [12] sembra che la misteriosa questione non sia stata ulteriormente approfondita.

Ora a me pare che la spiegazione sia abbastanza ovvia. Dal momento che la teoria e l'esperienza non vanno d'accordo, vuol dire che l'esperienza non corrisponde alle condizioni ideali, presupposte nella teoria. La teoria di Laue esige la completa indipendenza statistica delle posizioni delle varie aperture. Evidentemente *questa indipendenza non si verifica nell'esperienza reale*. Basta pensare che un'apertura non può sovrapporsi all'altra e che lo stesso fatto ha luogo nel caso dei semi di licopodio. E del resto le esperienze già citate di Prins e di Reesinck e De Vries dimostrano proprio che anche nel caso bidimensionale non si può mai evitare un effettivo ordinamento statistico. Allora una spiegazione qualitativa e intuitiva del fenomeno si può dare pensando la distribuzione scomponibile in tanti piccoli reticoli orientati a caso, ciascuno dei quali dà luogo a due dimensioni radiali privilegiate nella figura di diffrazione.

§ 4. – Torniamo ora al caso di una completa indipendenza statistica. Essa ha luogo quando le interdistanze fra le aperture sono molto grandi rispetto alle loro dimensioni e corrisponde alla diffrazione dei raggi X da parte di un gas rarefatto. Nella teoria di Lord Rayleigh, di Laue e di Lorentz si trova che l'intensità fluttua attorno a un valore medio, equivalente alla somma delle intensità diffratte dalle singole aperture nella direzione considerata. Ma si osservi che nella direzione di propagazione della luce incidente tutte le vibrazioni diffratte sono in fase e sommano le loro *ampiezze*, anzichè le loro *intensità*. L'intensità media viene quindi moltiplicata per N^2, anzichè per N. Inoltre in tale direzione non v'è fluttuazione possibile. Dovrà allora esistere una legge di passaggio fra il caso della diffrazione lontana dalla direzione d'incidenza e quello della diffrazione vicina. Per studiare come avviene questo passaggio sono stato condotto a considerare la composizione di innumerevoli vibrazioni, le cui fasi sono distribuite a caso fra due limiti finiti [13]. Successivamente ho avuto occasione di ampliare e precisare la trattazione, a proposito dei piccoli difetti di lavorazione degli specchi per riflettori astronomici [14].

Darò ora la formula valevole nel caso generale, ricavandola col metodo matematico rigoroso, già applicato da Laue.

§ 5. – Siano N le aperture diffrangenti, distribuite a caso in una zona S (di dimensioni necessariamente finite) di una superficie piana. Supporremo

(11) M. Laue, « Ber. Deut. Phys. Ges. », *314*, p. 19 (1917).
(12) De Haas, « Ann. der Phys. », *57*, p. 568 (1918).
(13) G. Toraldo di Francia, « Rend. Acc. Naz. Linc. », *2*, p. 186 (1947).
(14) G. Toraldo di Francia, « Rend. Acc. Naz. Linc. », *3*, p. 568 (1947).

le aperture tutte eguali ed egualmente orientate. Ciò non limita molto la generalità, perchè il caso di aperture di forma e dimensioni qualsiasi coincide con quello di una distribuzione casuale di aperture puntiformi. Piuttosto ammetteremo che a ciascuna apertura possa corrispondere un diverso cammino ottico, secondo una certa distribuzione di probabilità. (Si pensi, per esempio, al caso in cui S è costituita semplicemente da un vetro smerigliato).

Prendiamo per riferimento una terna di assi cartesiani ortogonali di cui z sia normale ad S. Se α_0, β_0 sono i primi due coseni direttori della normale all'onda piana incidente, l'ampiezza complessa diffratta nella direzione α, β dall'apertura che ha su S le coordinate x, y, avrà l'espressione

$$A = \Phi(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \exp[i(U + \varphi)] \tag{1}$$

nella quale è

$$U = \frac{2\pi}{\lambda}[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y]$$

mentre Φ rappresenta un fattore dipendente dalla forma delle aperture e dalla direzione e φ una costante di fase, che tiene conto della differenza di cammino ottico fra le varie aperture.

Questa ampiezza complessa può essere rappresentata graficamente mediante un vettore in un piano. Per avere l'effetto complessivo delle N aperture bisognerà fate la somma di tutti i vettori corrispondenti. Ci si può valere per questo di una legge asintotica del calcolo delle probabilità, ormai dimostrata sotto condizioni molto generali [15]. Essa nel nostro caso, in cui si ha a che fare con N vettori, aventi tutti la stessa distribuzione di probabilità, dice che, se si indicano con $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ i valori medi delle due componenti X, Y di ciascun vettore e con A, B, C rispettivamente i valori medi di $(X - \bar{X})^2$, di $(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ e di $(Y - \bar{Y})^2$, la probabilità che il vettore risultante abbia le componenti comprese negl'intervalli $(X, X + dX)$ e $(Y, Y + dY)$ è data da

$$w(X, Y)\,dX\,dY = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi N\sqrt{AC - B^2}} \exp\left[-\frac{C(X - N\bar{X})^2 - 2B(X - N\bar{X})(Y - N\bar{Y}) + A(Y - N\bar{Y})^2}{2N(AC - B^2)}\right] dX\,dY .$$

(15) Per la storia e le generalizzazioni di questo problema, che i tedeschi chiamano *Irrfahrtproblem* e gl'inglesi *random walk problem*, si veda per esempio A. Khintchine, *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, « Erg. d. Math. », Berlino (1933). Il caso di un numero finito N di vettori fu proposto per la prima volta da K. Pearson [«Nature», *72*, p. 294 (1905)] ed è completamente risolto per le fasi distribuite a caso fra $-\infty$ e $+\infty$. Per i più recenti sviluppi si veda F. Horner, « Phil. Mag. », *37*, p. 145 (1946) e R. D. Lord, « Phil Mag. », *39*, p. 66 (1948). Si trova che, già quando N è dell'ordine della decina, la distribuzione della probabilità è sensibilmente identica a quella valevole per N grandissimo. Dunque anche nel nostro caso ci riterremo autorizzati ad ammettere che la finitezza di N nei casi reali non porti alcuna differenza rispetto alla legge asintotica.

In questa formula A e C sono, per definizione, essenzialmente positivi, mentre $AC - B^2$ è positivo a causa della diseguaglianza di Schwarz. Pertanto la forma quadratica che compare a numeratore nell'esponenziale è definita positiva. Ne consegue che i valori più probabili per X e Y sono $N\bar{X}$ e $N\bar{Y}$. La probabilità è costante su delle ellissi, che hanno il centro in $(N\bar{X}, N\bar{Y})$ e tende monotonamente a zero, via via che ci si allontana da questo punto.

Nel nostro caso, se si pone

$$(3) \qquad F(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) = \frac{1}{S}\int_S \cos U \, dx\, dy \;,$$

$$G(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) = \frac{1}{S}\int_S \sin U \, dx\, dy \,,$$

e si indicano con un soprassegno i valori medi, si ha per la (1)

$$\bar{X} = \Phi\,(F\,\overline{\cos\varphi} - G\,\overline{\sin\varphi}) \quad , \quad \bar{Y} = \Phi\,(F\,\overline{\sin\varphi} + G\,\overline{\cos\varphi})$$

Ma, pur di scegliere un'opportuna origine per i cammini ottici, potremo sempre porre $\overline{\sin\varphi} = 0$, per cui in definitiva

$$(4) \qquad \begin{cases} \bar{X} = \Phi(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)\, F(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)\, \overline{\cos\varphi} \\ \bar{Y} = \Phi(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)\, G(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)\, \overline{\cos\varphi} \end{cases}$$

Ora le (3) mostrano che F e G (a parte un fattore costante inessenziale) sono le componenti della vibrazione diffratta dalla superficie S, considerata come apertura tutta libera in un diaframma opaco. Ne consegue, per le (4), che i valori più probabili dell'ampiezza complessa diffratta formano una figura che è, per così dire, il prodotto della figura di diffrazione di S per la figura di diffrazione di una singola delle N aperture. Il fattore $\overline{\cos\varphi}$ poi corrisponde a un'attenuazione dell'intensità di questa figura, attenuazione che aumenta all'aumentare della dispersione delle fasi. Si pensi, per esempio, che S sia costituita da un vetro smerigliato, posto sulla pupilla di uno strumento ottico. Se la smerigliatura è estremamente fine, avremo praticamente Φ costante e $\overline{\cos\varphi} = 1$; la figura di diffrazione del diaframma sarà netta. Ma, all'aumentare della profondità della smerigliatura $\overline{\cos\varphi}$ tenderà a zero e la figura di diffrazione del diaframma tenderà sempre più a scomparire rispetto alle fluttuazioni casuali (luce diffusa).

Il Laue aveva creduto di poter trascurare (a causa delle loro rapide fluttuazioni) i due integrali, che noi abbiamo chiamato F e G, ed aveva così mancato di coglierne il vero significato.

§ 6. – Quanto alle fluttuazioni dell'ampiezza attorno al valore medio, esse risultano dalla (2), nella quale i coefficienti A , B , C hanno, nel nostro caso, i valori seguenti, che si calcolano facilmente in base alla loro definizione

$$
(5)\quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}\Phi^2\{1 + F[2(\alpha-\alpha_0), 2(\beta-\beta_0)]\,\overline{\cos 2\varphi} - \\ \qquad - 2F^2(\alpha-\alpha_0, \beta-\beta_0)\,\overline{\cos\varphi}^2\} \\ B = \dfrac{1}{2}\Phi^2\{G[2(\alpha-\alpha_0), 2(\beta-\beta_0)]\,\overline{\cos 2\varphi} - \\ \qquad - 2F(\alpha-\alpha_0, \beta-\beta_0)\,G(\alpha-\alpha_0, \beta-\beta_0)\,\overline{\cos\varphi}^2\} \\ C = \dfrac{1}{2}\Phi^2\{1 - F[2(\alpha-\alpha_0), 2(\beta-\beta_0)]\,\overline{\cos 2\varphi} - \\ \qquad - 2G^2(\alpha-\alpha_0, \beta-\beta_0)\,\overline{\cos\varphi}^2\}. \end{cases}
$$

Si constata subito che, nel caso che non vi sia dispersione di cammino ottico ($\overline{\cos 2\varphi} = \overline{\cos\varphi} = 1$), questi coefficienti coincidono con quelli ricavati per via meno rigorosa nel secondo dei miei lavori citati. Nella diffrazione lontana poi F e G sono molto piccoli e, se si pongono eguali a zero, si ottengono dalle (5) i coefficienti della legge di Lord Rayleigh e di Laue

$$
w = \frac{1}{\pi N\Phi^2}\exp\left[-\frac{X^2+Y^2}{N\Phi^2}\right].
$$

Identico risultato si ottiene quando, a causa di una forte dispersione di cammino ottico, è $\overline{\cos 2\varphi} = \overline{\cos\varphi} = 0$

Se invece non v'è dispersione di cammino ottico e ci si avvicina alla direzione di propagazione della luce incidente ($\alpha \to \alpha_0$, $\beta \to \beta_0$), F tende alla unità e G a zero. Pertanto A, B, C, tendono a zero. Ne risulta, come si vede dalla (2), che la dispersione dei valori dell'ampiezza attorno al valore medio $N\Phi$, tende anch'essa a zero. È questa la legge cercata per il passaggio dalla diffrazione lontana a quella nella direzione della luce incidente.

Fisica. — *Su di un « nuovo metodo per misurare la velocità della luce »*. Nota di L. A. Radicati e A. Gamba, presentata (*) dal Socio E. Perucca.

Ci riferiamo a tre Note recenti del prof. A. Amerio (1), nelle quali questo Autore propone un dispositivo per la determinazione della velocità della luce, dal quale potrebbe ottenersi un « experimentum crucis » del primo ordine rispetto a u/c, sulla teoria della relatività (u velocità della sorgente, c velocità della luce).

Ci proponiamo di mostrare che l'esperienza del prof. Amerio è sostanzialmente identica alla classica esperienza di Fizeau.

(*) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) Cfr. A. Amerio, « Rendiconti Lincei », ser. 8ª, vol. II, p. 238 e 736 (1947); ser. 8ª, vol. IV, p. 155 (1948).

Infatti, la cellula di Kerr in A [2] è un interruttore periodico del fascio di luce, e può quindi essere concettualmente sostituito dalla ruota dentata di Fizeau.

La seconda cellula di Kerr in B ha questa proprietà; lascia passare la luce della sorgente S_2 da B verso A soltanto quando le onde radio giunte da A arrivano in fase massima. Ma siccome con la fase massima delle onde radio giunge in B anche la luce partita da A, possiamo dire che la luce di S_2 passa attraverso B (verso A) soltanto quando in B giunge la luce proveniente da A.

E allora tanto vale immaginare che sia proprio la stessa luce che da A giunge in B la quale, invece di aprire la cellula di Kerr K_2 ad altra luce, ritorni essa stessa riflessa da uno specchio da immaginarsi in K_2. La seconda cellula di Kerr più la sorgente S_2 sono allora perfettamente equivalenti allo specchio della esperienza di Fizeau; e l'onda radio ha la stessa funzione del raggio di andata in tale esperienza.

Resta così dimostrato che l'intero dispositivo di Amerio non si differenzia per nulla, concettualmente, da quello di Fizeau, e l'accorgimento di tentare di eliminare il raggio di andata dell'esperienza di Fizeau, risulta illusorio per l'introduzione di un'onda radio che ne è l'esatto corrispondente.

Si può pertanto concludere che dall'esperienza di Amerio non si può trarre conseguenze diverse da quelle ormai ben note dedotte dall'esperienza di Fizeau; in particolare non si potrà compiere con questo dispositivo nessuna esperienza del primo ordine sulla teoria della relatività.

Il procedimento suggerito da Amerio sarebbe valido se fosse lecito ritenere nota la velocità di propagazione delle onde radio da A verso B, e quindi la loro lunghezza d'onda, necessaria per legittimare la dimostrazione di Amerio, e ciò con una esperienza preliminare che non richiedesse anche il ritorno dell'onda radio (o luminosa) da B ad A.

Petrografia. – *Studi geologico-petrografici sulla regione compresa fra Ponte di Legno, Passo del Tonale e Passo di Gavia in Alta Val Camonica.* – I. *Scisti del Tonale* [*]. Nota di G. Schiavinato, presentata [**] dal Socio A. Bianchi.

Introduzione. – La regione da me rilevata nelle campagne estive 1946 e 1947 sul versante meridionale del massiccio dell'Ortles, è quella compresa nella tavoletta « Ponte di Legno » al 25.000. Essa è limitata a sud dall'alta Val Camonica nel tratto da Temù al Passo del Tonale e si estende

(2) Ci riferiamo alla fig. 1 della prima Nota dell'Amerio, « Rendiconti Lincei », ser. 8ª, vol. II, p. 238 (1947).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Padova e compreso nel programma del Centro studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche diretto dal prof. A. Bianchi.

(**) Nella seduta del 9 giugno 1948.

a nord oltre il Passo di Ercavallo ed il gruppo dei Monticelli verso il valico di Gavia. Ad oriente è dominata dalla cresta che da Cima Bleis, per il M. Tonale, si spinge alla Punta di Albiolo ed alla Punta di Ercavallo (m.3068); ad occidente dal gruppo del M. Coleazzo (m. 3008) ed a settentrione dalle cime di Caione (m. 3135) e delle Graole. Questi gruppi montuosi sono separati dalla Valle delle Messi e dalla Valle di Viso che confluiscono ad Y nella Valle di Pezzo estrema dipendenza dell'alta Val Camonica.

Sulla regione, che presenta nell'insieme un carattere piuttosto impervio e notevoli difficoltà logistiche, si hanno solo sommari e parziali studi prevalentemente geologico-tettonici (Hammer, Cornelius-Furlani) e locali indagini geologico-petrografiche (A. Bianchi-Gb. Dal Piaz [1]). Soltanto per una ristrettissima zona orientale delimitata dal vecchio confine austriaco esiste un rilevamento non troppo dettagliato (scala 1 : 75.000) di Hammer. Alcune zone da me percorse erano da considerarsi praticamente sconosciute da un punto di vista geologico-petrografico.

Fatta eccezione per un piccolo lembo di Verrucano e di Trias inferiore incuneato lungo la linea di dislocazione tardo-alpina del Tonale, scoperto e descritto da Gb. Dal Piaz [2], le rocce affioranti nel territorio considerato sono tutte riferibili al Cristallino antico dell'unità geologica delle Austridi superiori. Si può dire che tutte le più tipiche formazioni scistoso-cristalline di questa unità siano qui rappresentate: dagli scisti della Nota « serie del Tonale » costituiti da micascisti, paragneiss biotitici a due miche ecc. ricchissimi di intercalazioni di marmi, calcefiri, anfiboliti ed iniettati da sottili vene aplitico-pegmatitiche o da ortogneiss pegmatitici di notevole potenza ai paragneiss e micascisti ricchi di minerali caratteristici (granato, staurolite ecc.), ai micascisti gneissici e sericitici con fitte intercalazioni di quarzite, alle filladi quarzifere accompagnate da masse cospicue di ortogneiss di vario tipo.

La vicinanza di una importantissima zona di dislocazione (la linea del Tonale o linea insubrica) che segna approssimativamente il limite meridionale della regione rilevata, e la presenza di altre minori linee di disturbo tettonico da me osservate nella regione stessa, rappresentano dei motivi di notevole interesse geologico che, inquadrati in un campo caratterizzato dalla varietà petrografica alla quale ho accennato, offrono dei suggestivi argomenti di indagine allo studioso di problemi alpini e suggeriscono l'opportunità di un rilevamento di dettaglio accompagnato da rigorose indagini chimiche ed ottiche di laboratorio; premesse indispensabili quest'ultime sia per stabilire la vera natura dei singoli tipi petrografici, sia per chiarirne i rapporti reciproci, sia infine per fornire una più precisa base ai problemi di tettonica.

Questa Nota vuol quindi offrire un resoconto preliminare del lavoro di campagna e delle prime osservazioni effettuate in laboratorio sull'abbon-

(1) A. Bianchi-Gb. Dal Piaz, « Boll. Uff. Geol. Ital. », LXV, 1940.
(2) Gb. Dal Piaz, « Atti R. Acc. di Sc. Lett. ed Arti di Padova », 1939.

dante materiale raccolto, ad illustrazione del mio rilevamento geologico al 25.000. Tale rilevamento completa nel settore nord-occidentale il foglio « Adamello » della carta geologica delle Tre Venezie, ormai prossimo alla pubblicazione.

Le Rocce. – *Scisti del Tonale.* — La formazione metamorfica nota nella letteratura petrografica e geologica alpina sotto il nome di « serie del Tonale », e caratterizzata dalla ricchezza di intercalazioni di marmi, di rocce eruttive basiche più o meno rimaneggiate e di pegmatiti, affiora per estese aree fra l'alta Val Camonica ed il Passo di Gavia. Dalla conca di Ponte di Legno essa si estende in direzione NE a costituire la parte più elevata della cresta che da Cima le Sorti, Cima Bleis, M. Tonale, Cima Casaiole, raggiunge la quota più elevata nella Punta di Albiolo (m. 2980) donde degrada in direzione N – NW verso la Boccetta di Montozzo. La sua continuità anche sotto il rivestimento morenico dei versanti nord-orientali della catena suddetta, fino alla carrozzabile del Passo del Tonale, è rilevabile in corrispondenza delle due profonde incisioni del Rio Vallassa e del Vallone di Lares.

Limitati bruscamente verso settentrione da una zona di schiacciamento e di scorrimento che decorre parallelamente alla Valle di Viso, sul versante meridionale di questa, gli scisti della serie del Tonale ricompaiono nella parte più elevata del gruppo del Coleazzo estendendosi poi verso oriente oltre la Valle delle Messi soprattutto sul versante nord occidentale del M. Caione e sulla cresta a sud di questo verso la Cima delle Graole.

I tipi petrografici più diffusi in questa formazione metamorfica sono i micascisti o i paragneiss biotitici o a due miche frequentemente granatiferi e contenenti quantità molto variabili di sillimanite (secondo alcuni questa può considerarsi un minerale-guida per i parascisti della serie del Tonale). Essi presentano per lo più un'alta cristallinità ma non mancano termini di passaggio alle filladi quarzifere. Nel complesso ho trovato una buona corrispondenza con le caratteristiche generali fornite da Cornelius-Furlani [3] per i tipi medi di questa serie di rocce metamorfiche che si estende verso occidente, a nord della linea di dislocazione insubrica, fino al Ticino; oltre che con gli studi di C. Andreatta [4] per la regione di Peio ad oriente della zona cui si riferisce il mio rilevamento. Mi limito perciò a ricordare quelle mie osservazioni che riguardano soprattutto motivi di particolare interesse locale o comunque non considerati dai suddetti autori.

Qualcosa va detto innanzitutto a proprosito degli « scisti iniettati » che ho osservato con una certa frequenza sia nel gruppo M. Tonale-Cima Bleis, sia nel gruppo del Coleazzo, in vicinanza o in continuazione delle zone caratterizzate da più potenti intercalazioni pegmatitiche. Il materiale iniettato

(3) H. P. Cornelius e M. Furlani-Cornelius, *Die insubrische Linie vom Tessin bis zum Tonalepass.* « Denkschr. d. Akad. d. Wissensch. in Wien », Math-naturw. Kl., *102* Bd., 1930, pp. 207-301.

(4) C. Andreatta, *I giacimenti ferriferi della regione Boai-Comasine in Val di Peio (Trentino).* « La ricerca scient. », X, n. 6, 1939.

consiste talora in sottili regolari vene letto a letto, tal'altra in grosse ghiandole di spessore variabile separate da limitati strati micacei degli acisti originari. La struttura in tal caso varia da punto a punto. In genere la mica biotitica prevale nettamente su quella muscovitica che può ridursi fino a scomparire. Non di rado queste rocce presentano delle caratteristiche macroscopiche, strutturali e di composizione mineralogica che richiamano i metascisti a carattere kinzigitico.

Particolare interesse offrono gli scisti iniettati della vetta del M. Tonale e di Cima Bleis che, trovandosi in zona compresa fra due linee di disturbo tettonico presentano evidenti fenomeni di deformazioni postcristalline. La struttura è lepidoblastica fino a granoblastica. Le lamine di biotite a contorno molto irregolare, sono più o meno profondamente riassorbite con segregazione di una finissima granulazione di ossidi di ferro. Il quarzo è in due generazioni ben distinte: una costituita da grossi elementi con estinzione marcatamente ondulata e talvolta con due distinti sistemi di fratture intersecantisi a losanga; la seconda da minuti cristallini privi di deformazione distribuiti nelle fratture o ai bordi dei cristalli maggiori. Anche i feldispati che sono in quantità variabili in rapporto alla intensità della iniezione, si presentano più o meno deformati e fratturati con sericitizzazione lungo le superfici interne di scorrimento o ai bordi. Si tratta per lo più di termini plagioclastici ricchi di sodio (indici $<$ al quarzo, birifrazione positiva) privi o quasi di zonatura e con le consuete geminazioni «albite» o «periclino».

La sillimanite è sempre presente ma in quantità estremamente variabile; molto ricchi ne sono i paragneiss iniettati a sud di Cima Bleis i quali sono caratterizzati pure da una certa abbondanza di granato. Quest'ultimo minerale si presenta in elementi ben sviluppati e più o meno allungati in modo caratteristico secondo i piani di scistosità con regolari e fitte fessurazioni approssimativamente normali a detti piani.

Facies perfettamente analoghe alle precedenti ma assolutamente prive di deformazioni postcristalline furono raccolte da A. Bianchi e Gb. Dal Piaz ad oriente di Ponte di Legno e da me lungo il vallone di Lares poco a nord della carrozzabile del Passo del Tonale, cioè in località molto prossime alla linea di dislocazione del Tonale. È necessario perciò ammettere che le deformazioni sopra descritte siano imputabili a disturbi tettonici locali o più verosimilmente agli scorrimenti avvenuti lungo la «linea di Peio» che decorre immediatamente a nord delle cime di M. Tonale e di Cima Bleis come meglio sarà chiarito in seguito.

Caratteristica è la ricchezza di *pegmatiti* in tutte le formazioni appartenenti alla serie del Tonale della zona da me percorsa. L'opinione espressa da vari autori che l'attuale facies dei micascisti di questa serie sia dovuta all'intensa iniezione pegmatitica mi sembra trovi conferma anche nelle mie osservazioni; non di rado infatti ho notato graduali diminuzioni della grana cristallina con transizioni verso facies di micascisti minuti o addirittura filladici quando ci si allontani dalle zone più ricche di intercalazioni pegma-

titiche come ad esempio sul versante occidentale di M. Caione e di M. delle Graole. Va rilevato però che tipici fenomeni di contatto non si osservano nemmeno in corrispondenza delle iniezioni di maggiore potenza e ciò sta a provare che le intrusioni stesse siano da ritenere anteriori alla fase metamorfica che ha conferito l'attuale impronta prevalente alle rocce delle serie del Tonale.

Non molto variabile è la composizione delle pegmatiti; si tratta sempre di termini acidi benchè siano piuttosto rari i tipi decisamente aplitici. Fra questi ricordo quello immediatamente a nord di Canè, bianchissimo, con rare laminette di mica appena riconoscibili ad occhio nudo, e pochi altri analoghi osservati nel gruppo M. Tonale–Cima Bleis e sulle pendici occidentali del M. Coleazzo. Molto più comuni le pegmatiti ricche di mica nelle quali le lamine di muscovite possono raggiungere ragguardevoli dimensioni (fino ad un decimetro e più) specialmente alla salbanda. La biotite per lo più manca oppure è quantitativamente subordinata. Solo di rado, come a nord di baite Caione, lungo la carrozzabile del Gavia e in Val Canè a nord di Cortebona, essa può raggiungere le dimensioni delle lamine di muscovite. In quest'ultima località una grossa pegmatite ha dato vita, durante l'ultimo conflitto ad una piccola industria estrattiva che riusciva a trarre delle lamine di mica passibili di applicazioni industriali.

Non molto comuni sono le pegmatiti granatifere di cui ho notato qualche esempio sul versante meridionale del Coleazzo, sopra la valle di Stol. Minerale caratteristico ed assai più diffuso nelle pegmatiti è invece una tormalina nera che manifesta per lo più un netto idiomorfismo e che può raggiungere delle dimensioni molto ragguardevoli. All'imbocco di Rio Vallassa, a nord della carrozzabile del Tonale, come pure nella media Val Canè ed in vari punti del gruppo del Coleazzo ho osservato delle facies pegmatitiche con elementi di tormalina nera a contorno irregolare della grossezza di un pugno; essi presentano numerose fratture visibili anche macroscopicamente e riempite da vene quarzose. Ho notato talvolta dei veri sciami di frammenti angolosi di tormalina nera cementati da una massa bianchissima di quarzo e di feldispato ed aventi l'aspetto di piccole breccie eruttive; tutto ciò senza che la pegmatite abbia macroscopicamente un aspetto milonitico o cataclastico come se gli elementi di tormalina fossero degli inclusi enallogeni nella pegmatite stessa.

Marcatamente milonitiche sono invece le pegmatiti alla Bocchetta di Valle Massa ed alla Forcellina di Montozzo. Nell'ultima località si notano sia facies normali a due miche e tormalina nera nelle quali anche questo minerale appare appiattito e laminato nei piani di scorrimento, sia facies aplitiche nelle quali la mica muscovitica, riconoscibile solo al microscopio, appare deformata e contorta in sottili letti fra i quali si trovano grossi cristalli feldispatici con pronunciati fenomeni di scorrimento e cataclasi accompagnati da due distinte generazioni di quarzo: una a grana media con elementi ad estinzione ondulata, ed una a grana finissima che si annida nelle fratture degli elementi maggiori risanandole completamente (struttura blastomilonitica).

Pegmatiti milonitiche con caratteri analoghi ho incontrato inoltre a nord di Cima Caione in una zona di scorrimento in corrispondenza della quale si passa bruscamente dai paragneiss alle filladi quarzifere.

Come avviene in tutti gli scisti della serie del Tonale, anche in quelli affioranti nella zona da me percorsa le iniezioni pegnatitiche sono in genere concordanti rispetto ai piani di scistosità. Sicuri esempi di discordanza potei osservare fra M. Tonale e M. Cadì come pure presso la vetta del Coleazzo dove anzi una grossa pegmatite subverticale taglia sotto un angolo di 35–40° sia gli scisti come una anfibolite a tessitura orientata che pendono verso sud.

I *marmi* sono molto ben rappresentati nella nostra zona sia sotto forma di sottili intercalazioni negli scisti, sia in masse molto cospicue. Fra queste particolarmente notevole quella che, in buona parte ricoperta dal morenico, affiora ad oriente di Ponte di Legno sul versante meridionale di Cima le Sorti costituendo poi in gran parte i bianchi roccioni di M. Seròdine, e di Cima di Cadì dove assume il massimo sviluppo. La potenza complessiva degli strati che si elevano sopra il morenico per oltre 300 m., supera in qualche punto il chilometro. Per quanto è possibile dedurre dallo schizzo allegato alla già citata Memoria dei coniugi Cornelius–Furlani, la massa di marmi in questione è la più potente fra quante affiorano dal Ticino al Passo del Tonale, fra gli scisti immediatamente a nord della linea di dislocazione insubrica. La facies è un po' variabile ma prevalgono i tipi bianchi, giallastri o grigi a media cristallinità.

Meno estese ma assai numerose sono le intercalazioni di marmi nel gruppo del Coleazzo. Esse sono particolarmente frequenti sui costoni orientali che degradano verso la Valle delle Messi, ma si spingono fin quasi sulla vetta del M. Coleazzo per proseguire in direzione sud–occidentale con una candida cresta che contrasta vivamente con le rocce scistose scure e si spinge oltre la Val Canè sulle pendici orientali del M. Mattaciul. La facies prevalente è qui costituita da un marmo saccaroide purissimo a grana talora eccezionalmente grossa, entro il quale si alternano strati giallastri o brunicci ed in qualche punto straterelli di selce bianca, grigia e violacea che assumono qua e là un aspetto di minuti conglomerati. Si notano anche piani di scorrimento mentre mancano per lo più le fini ed intense ripiegature che costituiscono una frequente caratteristica delle intercalazioni marmoree di minore potenza. Molto espressivo a questo riguardo è un grosso blocco a lato della carrozzabile del Gavia dopo il primo tornante sopra Santa Apollonia, nel quale marmo ed anfibolite sono in fitta alternanza ed ambedue manifestano marcate ripiegature e contorsioni. A nord est di Cima delle Graole in una intima associazione di marmi chiari e grigi si osservano dei fenomeni di pieghe di taglio messe in particolare risalto dalla diversa resistenza agli agenti atmosferici dei due tipi di materiale.

L'azione metamorfica di contatto esercitata sui marmi dai magmi basici ed acidi che hanno dato origine alle anfiboliti ed agli ortogneiss pegmatitici che spesso si accompagnano ai marmi stessi, non è stata per lo più molto

intensa nella nostra zona. Soltanto eccezionalmente ha dato luogo a manifestazioni vistose come a nord di Cima Casaiole, in prossimità del Passo dei Contrabbandieri dove il marmo fa passaggio, attraverso vari termini di calcefiro, a pirosseniti quasi pure o a rocce costituite quasi esclusivamente da granato di color rosa carnicino. Ad azioni metamorfiche di natura pneumatolitica va probabilmente attribuita anche la genesi di laminette di flogopite che si osservano con maggior frequenza in certi marmi candidi a grana grossa, come quelli osservati lungo il vallone di Lares ad est di Ponte di Legno.

Non meno caratteristiche per gli scisti della serie del Tonale sono le intercalazioni di *anfibolite* che rappresentano, secondo l'opinione generalmente accolta, il prodotto del metamorfismo di antiche iniezioni basiche. Esse sono invero poco note e perciò fra gli altri temi da studio sul materiale raccolto, mi prefiggo anche quello di approfondire, con indagini chimiche ed ottiche la conoscenza di queste interessanti rocce che affiorano in notevole copia e con una rilevante gamma di tipi, fra l'alta Val Camonica ed il Passo di Gavia. Trattasi in prevalenza di anfiboliti plagioclasiche talvolta biotitiche e granatifere con quantità maggiore o minore di quarzo, ma non mancano le facies prive di elementi sialici costituite esclusivamente da orneblenda verde.

Alle segnalazioni ed alle brevi descrizioni di carattere preliminare di A. Bianchi e Gb. Dal Piaz relative ad alcune di queste anfiboliti della zona Ponte di Legno–M. Tonale, posso aggiungere soltanto che esse presentano talora deformazioni postcristalline di epizona con fratturazioni e scorrimenti risanati da una minuta generazione epidotica. Tipi perfettamente corrispondenti ho potuto osservare nella zona Cima Caione–M. delle Graole e nel gruppo del Coleazzo dove ho trovato qualche bella facies a grana molto grossa nella quale all'anfibolo ed al granato prevalenti si associano un pirosseno con i caratteri del diallagio e prodotti secondari di natura talcosa.

L'interpretazione di Cornelius–Furlani rivolta a spiegare alcune alternanze litologiche estremamente complesse negli scisti del Tonale come una conseguenza di intensi ripiegamenti (vedi ad esempio op. cit., prof. 1°, tav. 1ª) mi sembra accettabile almeno limitatamente alle associazioni scisti–marmi anfiboliti. Quantunque sulle pareti rocciose tali pieghe non siano per lo più visibili, ho rinvenuto nel detrito, presso Bocchetta Bleis, una lastra di anfibolite dello spessore di circa 20 cm. ripiegata ad angolo molto acuto e costituente senza dubbio una cerniera. Anche le osservazioni microscopiche parlano a favore di deformazioni plastiche nelle anfiboliti. Sui costoni che dal Coleazzo degradano verso il Gras degli Spì ho notato qualche tipo di anfibolite gneissica con fini ripiegature che in sezione sottile si rivelano di natura paracristallina. Sia i cristalli di anfibolo infatti, come quelli di feldispato (microclino e plagioclasi acidi) e di quarzo seguono l'andamento della piega senza presentare deformazioni secondarie (torsioni, flessioni, estinzioni ondulate). Azioni clastiche di epizona sono rilevabili però anche in queste

rocce per la presenza di qualche frattura con scorrimento solo in parte risanata da prodotti secondari.

Deformazioni postcristalline assai più marcate su una struttura caratterizzata da fenomeni di deformazione paracristallina ho riscontrato pure in una anfibolite compatta a nord di Cima delle Graole.

Come fenomeno particolare ricordo infine una abbondante e vistosa produzione di thulite nella già citata associazione marmo-anfibolite presso S. Apollonia.

Benchè ci sia la tendenza, da parte di studiosi degli scisti della serie del Tonale ad attribuire una origine magnatogena alle anfiboliti appartenenti alla serie stessa, l'ipotesi di una origine sedimentogena almeno per alcune di esse, mi sembra non possa essere completamente trascurata. Circostanze favorevoli a questo riguardo possono considerarsi: *a*) la perfetta concordanza con gli scisti (che potrebbe però essere anche dovuta ad una intensa fase metamorfica successiva all'iniezione basica); *b*) il fatto che le intercalazioni anfiboliche mantengono spesso uno spessore costante per notevoli estensioni e si alternano ritmicamente e regolarmente con gli scisti (ciò, come ho accennato, potrebbe essere dovuto ad intenso ripiegamento con cerniere ad angolo acuto); *c*) l'intima associazione, talora osservata, con i marmi assieme ai quali le anfiboliti risultano trasformate in condizioni paracristalline; *d*) la tessitura quasi sempre molto orientata e rilevabile a volte anche macroscopicamente per una fitta alternanza di straterelli chiari e scuri di diversa composizione mineralogica.

La soluzione del problema, se pure sarà possibile, si presenta molto complessa e delicata e richiederà oltre a numerose indagini di laboratorio anche nuove osservazioni sul terreno nella zona già rilevata e possibilmente nelle regioni vicine nelle quali si trova la continuazione delle formazioni metamorfiche di cui mi stò occupando.

Geologia. — *Sulla stratigrafia dell'antica cava di Saccopastore presso Roma* (*). Nota I di ALDO G. SEGRE, presentata (**) dal Corrisp. S. SERGI.

Nel 1929 il prof. S. Sergi illustrò il primo fortunato rinvenimento in Italia di un cranio di *Paleantropo* (1) in località Saccopastore [14] [15]. A distanza di 6 anni, nel medesimo luogo, fu scoperto dall'Abbé Breuil e dal prof. A. C. Blanc un secondo cranio di *Paleantropo* (2) [4] [6] [7]. Per questi importanti reperti, il terreno nel quale giacevano, viene ad assumere parti-

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Antropologia e di Geochimica della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) Comunemente designato come Neandertal, Saccopastore I.

(2) Saccopastore II.

colare interesse nel quadro della geologia quaternaria romana; tale interesse è accresciuto dalla prossimità dei classici giacimenti fossiliferi di Sedia del Diavolo, dei Prati Fiscali e della collina di M.te delle Gioje. *Saccopastore* è il nome del terreno alluvionale compreso in un meandro, sulla sinistra dell'Aniene, a O. della via Nomentana. Ivi si sollevava per qualche m. dall'uniforme piano la lieve ondulazione di una modesta collinetta allungata parallelamente al fiume, quotata 23 m. sulle vecchie carte [3] e 21 nelle più recenti [4]. Nel suo fianco nordorientale era in esercizio una cava di ghiaia, in massima efficienza (fig. 1) quando venne alla luce il primo cranio [14] [15]. Dopo pochi mesi la cava venne abbandonata ed i livelli inferiori invasi dalle acque subalvee dell'Aniene, furono sommersi da uno stagno che si formò nel cavo antistante. Per effetto degli agenti esogeni che agiscono con particolare rapidità in questi terreni sabbioso–ghiaiosi, i lineamenti della fronte

Fig. 1. – Saccopastore: fronte di cava nel 1929 (fot. S. Sergi).

S_1, S_2, posiz. dei crani. Ms, pendici NW della collina di Monte Sacro, Pf. rilievo di Prato Fiscale. A, corso dell'Aniene. E, aree interessate dallo scavo 23 aprile–12 maggio 1936.

di cava andavano cancellandosi di anno in anno, allorchè fu scoperto nel 1935 il secondo cranio [6]. L'anno seguente si organizzarono scavi metodici [5] limitati ai livelli superiori al secondo cranio. Negli anni successivi, nell'immediata prossimità di questo luogo furono innalzati alcuni grandi edifizi [6], onde oggi, della collina e della cava di Saccopastore altro non resta che il ricordo.

Subito dopo il primo rinvenimento, il prof. Sergi recatosi ripetutamente sul luogo prelevò dalla sezione da lui fotografata e misurata con cura, una serie colonnare di campioni strato per strato, descritti sommariamente

(3) Istit. Top. Milit., carta dei dintorni di Roma 1 : 25.000, in 9 fogli (1875).

(4) I. G. M. I., foglio 150–IV NO., Roma Nord, ed. 1936.

(5) Dall'Ist. It. di Paleont. Umana e dall'Ist. di Antropol. dell'Università di Roma con la cooperazione del labor. di Geochimica, e d. Ist. di Botanica d. Università di Pisa [4].

(6) Per interessamento dei proff. Sergi e Blanc e della Sovrintendenza alle Antichità, il sito esatto del ritrovamento dei fossili umani è rimasto fuori dall'area fabbricata, però è stato ricoperto con scarichi e vi sorgerà sopra un giardinetto.

in una breve Nota [16]. Il p. R. Köppel prima [11], poi il De Angelis [9] ed il Lipparini [12], ma specialmente l'ab. Breuil ed A. C. Blanc fornirono ulteriori particolari sulla geologia di Saccopastore in base agli ultimi scavi [6] [7]. Questi elementi correlati con quelli della zona di confluenza dell'Aniene col Tevere e di altre località del Lazio [1] [2] hanno permesso di stabilire con maggiore approssimazione la posizione cronologica dei Paleantropi nelle vicende del Pleistocene [2] [3] [4] [7]. Tale cronologia è confortata inoltre dagli interessanti reperti paleontologici, paleobotanici e paletnologici forniti dallo scavo [2] [19].

Avendomi il prof. Sergi, che ringrazio sentitamente, affidato l'esame dei campioni da lui raccolti 19 anni or sono, esporrò brevemente alcuni risultati del loro studio petrografico accompagnandoli con un cenno sulla successione stratigrafica locale, in base a sopraluoghi effettuati (fig. 2).

Qui si riferiscono i risultati dell'esame petrografico della frazione superiore al diametro medio di mm. 2,5 riservando per una Nota successiva la relazione analitica delle sabbie e dei limi.

CAMPIONE I = 1. – *Provenienza*: dal banco basale di ghiaie grossolane a stratif. embricata con plaghe conglomerate e intercal. lentiformi di sabbie e limi.

Fraz. > 2,5 mm., 41, 4 %; < 2,5 mm., 58, 6 %. Elem. alloctoni: sedim. 98,4 %, Piroclastici 1,38 %; elem. autoctoni 0,41 %. *Ciottoli* più cospicui prevalent. calcarei, diam. max. 30–60 mm., medio 15–20; appiattiti discoidi o cuneiformi, arrotondati e a facce depresse, liscie: calc. grigio chiari a venature spatiche. Alcuni presentano numerose butterature sulle facce. Ciottolini ovoidi o appiatt., più arrotond. dei preced., diam, 5–2,5 mm. di calc. giallastri o biancastri a frattura scheggiosa; scarsi calc. minutamente oolitici; calc. rosati ed altri giallo chiari. Ciottolini traslucidi calcitici bianco giallastri; quelli grigi marnosi a superficie porosa presentano croste di MnO_2. I ciottoli silicei, più piccoli, omogenei e opachi sono grigio scuri, verdastri o biancastri, sferoidali; scarse scheggette silicee di aspetto fresco, costate, giallo miele. *Pirocl.*: masserelle tondeggianti di pomice grigio-chiara, ciottolini leucotefritici compatti con leuciti alterate; scoriette rossastre più scarse; frammenti di grossi prismi cariati, alcuni completi di facce terminali, di augite nera e verde. Scarsi granuli di leucite alterata. *Autoct.*: concr. calc. spongiose. *Paleont.*: Elephas antiquus di forma arcaica; Dicerorhinus mercki. Tutto I = 1 fu riconosciuto ossifero dal Sergi.

CAMPIONE 2. – *Prov.*: dal vistoso livello ferrugginoso-manganesifero al limit. super. delle ghiaie I = 1. Con ciottoli alquanto più grossi dei sottostanti, con patine di ossidi incrostanti e talora costituenti puddinghe a cem. limonitico, concentrate in apofisi a pennello (v. fig. 3). *Fraz.* > 2,5 mm., 90,6 %; < 2,5 mm. 9,4 %. Elem. alloct.: sedim. 98,34 %, piroclast. 1,66 %. *Ghiaia* prevalent. calc., alquanto arrotond., a ciottoli ovoidali, baculiformi o amigdaloidi (diam. medio 5–22 mm.), alcuni butterati fortemente arrossati con macchie e patine ocracee e manganesifere. Gli elem. marnosi talora completamente rivestiti da involucri di MnO_2. *Piroclast.*: scarsi ciottolini di

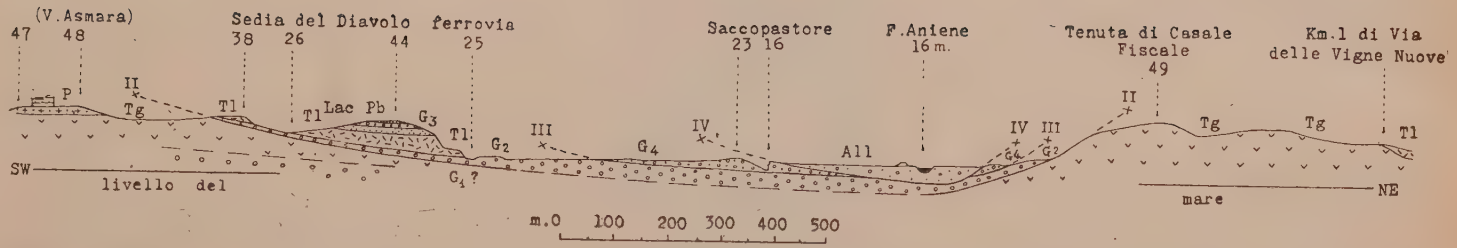


Fig. 2. – Profilo della bassa valle dell'Aniene attraverso Sedia del Diavolo e Saccopastore (Scala doppia per le altitudini; è mantenuto il profilo topogr. del terreno verso il 1900, prima delle nuove costruz.).

I–II: Terrazzo alto, più antico (di quota media + 40 m.), di M. Antenne–V. la Savoia–V. la Chigi–V. la Blanc (= Maremmano: trasgressione Calabriana (?), interglac. Günz/Mindel (??). G_1 = ghiaie basali. Tg = tufi grigi granulari. P = pozzolane grigiorossastre. II: Regress. post–Calabriana (?), incis. Mindeliense (?).

II–III: Terrazzo medio (di + 30 + 40 m.), di Sedia del Diavolo–Monte delle Gioje, prodotto dall'interferenza di periodi di intensa attiv. erutt. dei vulc. Sabatino e Albano (ammassamento di tufi alla confluenza Tevere–Aniene) che ha causato modificazioni positive del pelo idrico fluviale (episodi lacustri) cui forse non è stata estranea una trasgress. marina [Siciliana o Tirreniana I (?)]. G_2 = potenti letti di ghiaie e sabbie sottostanti al tufo lionato, con livelli arrossati da Fe_2O_3 e MnO_2, con Eleph. antiquus (base del giacim. di Saccopastore ?) e amigdala Chelleana (rinvenuta nelle ghiaie di Ponte Milvio [5]). Tl = tufo litoide «lionato». Lac = serie fluviolacustre, soprastante al Tl di Sedia del Diavolo e Monte delle Gioje, con limi, marne e croste travertinose superiormente. G_3 = Ghiaie e ghiaiette, in parte di colmamento, superiori al Lac. di Sedia del Diavolo e di Pietralata, con ind. musteriana, Hippop., Eleph. ant., corrispondenti probab. alle alluvioni fossilifere di riempimento nella grotta del M. delle Gioje: più antiche di quelle di Saccopastore (?).

III: Regress. marina pre–Tirreniana (?) o Tirren. I–Tirren. II, incis. Rissiana (?).

III–IV: Terrazzo basso (di + 20 + 25 m.), di Saccopastore–Prati Fiscali (trasgr. Tirreniana, interglac. Riss/Würm). G_4 = Serie fluviolacustre di Saccopastore e Prati Fiscali, con ghiaie e lenti sabbiosoargillose intercal. nella parte super., con: Homo neandert. var. Aniensis, ind. muster. evoluta, Eleph. ant., Dicerorhinus mercki, Hippop., Bos prim., Cervus, Equus hydrunt., etc. Pb = tufi a pomici bianche (sincrone di Saccopastore ?). IV: Regress. post-Tirreniana II, incis. Würmiana. All = ghiaie e limi di alluvionamento olocenico dell'Aniene (regress. Fiandriana, postglaciale).

tufo grigio e viola, leucitici; scoriette porose rosa; granuli sporadici di leucite caolinizzata. *Paleont.*: frammenti ossei di micromammiferi.

CAMPIONE H = 3. – *Prov.*: da un complesso alternato di lenti sabbiose e argille marnose giallo-brune che si riducono di spessore a destra della sez.ne. *Fraz.* > 2,5 mm., 6,31 %; < 2,5 mm., 93,69 %. Elem. alloct.: sedim. 71,7 %, piroclast. 26,1 %; elem. autocton. 2,2 %. *Ghiaie* calc. più abbond., diam. medio 5 mm.: ciottolini grigi, bianchi e giallastri con qualche scheggetta di calc. rosato e giallo. Ciottolini silicei arrotond., ma con spigoli conservati e scheggette grige e biancastre. *Pirocl.*: abbond. ciott. di tufo giallo con abbond. prismetti di augite nera, e leucite alter.; ciott. sferoidali di basalto poroso, grigio chiaro e leucitite; pomici grige fortem. consumate; scoriette rosa-violacee o nerastre più rare, leggere e porose; pomici gialle arrotond. e granuli basaltici compatti e scuri. *Autoct.*: scarse concrezioni travertinose tubercolate, con interclusi granuli augitici. *Paleont.*: Elephas ant. Falc., Dicerorhinus mercki Jäg., Hippop. major. Falc., Bos primig. Boj., Dama dama L.

CAMPIONE 4 = G. – *Prov.*: dalla zona marginale di una lente di ghiaie grossolane sabbionose, con patine giallo ocracee. *Fraz.* > 2,5 mm., 71,3 %; < 2,5 mm., 28,7 %. Elem. alloct.: sedim. 82,2 %, piroclast. 17,8 % *Ciottoli* calc. prevalenti, bianchi e grigio giallastri per lo più piatti e sferoidali (dimens. dei maggiori, es.: 32 × 23 × 8 mm., diam. medio 10–20 mm.). Molti presentano incrost. manganes. nere. Rari frammenti angolosi di calcite trasparente e altri più minuti di calc. rosato, giallo o nerastro. I ciottoli silicei sono un po' più grossi; scarse scheggette silicee rosa e gialle. *Pirocl.*: abbondanti masserelle tondeggianti tufacee giallo-ocracee, pozzolanacee con augite e leucite (diam. 27–3 mm.); ciottolini basaltici vacuolari, alterati (diam. med. 5 mm.); scarse scoriette rosa e viola-rosate; framm. augit. e granuli leucitici. *Paleont.*: come al n. 3 = H.

CAMPIONE 5 = G. – *Prov.*: da lente ghiaiosa a elementi disposti irregolari m. *Fraz.* > 2,5 mm., 95,68 %; < 2,5 mm., 4,32 %. Elem. alloct.: sedim. 97,95 %, pirocl. 1,15 %; elem. autoct. 0,9 %. *Ciottoli* calc. poco più numerosi dei silicei, diam. medio 32–10 mm., con scarse patine ocracee; a forma di uovo o elissoidici, con depressioni spesso butterate; calc. a vene spatiche, calc. marnosi grigi, brecciole calcaree. Ciott. silicei con spigoli poco arrotondati (diametro 40–3 mm.). *Pirocl.*: scarsi ciottolini di basalto leucit. alter. grigio, leggero, con sfaldatura concentrica e rare masserelle scoriacee rosa-violastre. *Autoct.*: limo giallo cementato da $CaCO_3$ in nuclei friabili, con tracce brune di piante indeterm. *Paleont.*: Eleph. ant., Diceror. mercki, Hippop. major, Bos primig., Cervus elaphus, Dama, Homo neandertalensis var. aniensis = S. I (Sergi); ossa scheggiate intenzion., frustoli e filliti indeterm. nel limo.

CAMPIONE 6 = FA. – *Prov.*: da grossa ed estesa lente di limo non stratif. con inferior. noduli, superiorm. sottili croste limonitiche. *Fraz.* > 2,3 mm. 1,2 %; < 2,5 mm. 98,8 %. *Limo* sabbioso giallo con grumi e masserelle friabili debolmente cement. da $CaCO_3$ e limonite. *Paleont.*: molluschi terrestri [4] [10]

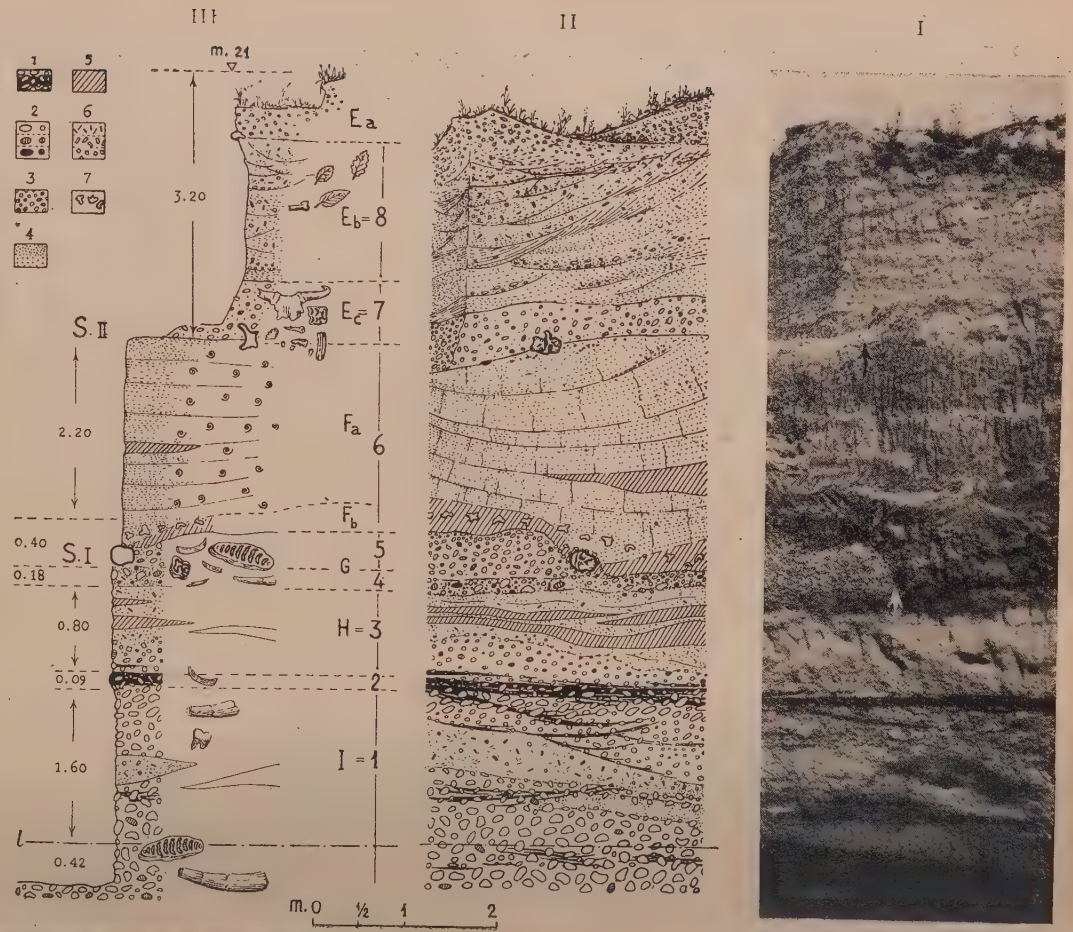


Fig. 3. – Cava di Saccopastore: sezione particolare del giacimento a Homo.

I: Dettaglio locale della fronte di cava per tutta la sua altezza di m. 9 (fot. S. Sergi 1929).

II: Id. con interpretazione stratigrafica in base agli elem. desunti dagli Aa., dalla lett. cit., e dall'esame dei materiali raccolti.

III: Profilo normale al piano di sez. delle figg. I–II, con riferimenti paleontologici: a sinistra gli spessori parziali in m. dei singoli livelli–strati. S. I, S. II, posiz. dei crani; l, livello delle acque di cava nel 1929. A destra: le lettere si riferiscono alle notaz. stratigraf. del Blanc, le cifre ai corrispondenti campioni prelevati dal Sergi. Segni petrogr.: 1, livelli ghiaiosi fortemente ossidati, con veli limonitici e patine manganesifere. 2, Elementi calcarei; elem. silicei; ciottoli di natura eruttiva (tufacei, pomicei, scoriacei, ecc.). 3, Ghiaiette miste; 4, sabbie. 5, Limi argillomarnosi. 6, Minerali prevalenti: augite nera, a. verde, leucite alterata. 7, Noduli tipo poupées. *NB.*: le filliti del liv. Eb=8 e alcuni elem. paleontol. di Ec = 7 si riferiscono allo scavo 1936 (v. fig. 1).

in tutto lo spessore della lente; industria musteriana nella parte alta al contatto con le ghiaiette sup.

CAMPIONE 7 = EC. – *Prov.*: da strato di ghiaiette abbond. sabbiose con stratif. incerta. *Fraz.* > 2,5 mm. 42,7 %; < 2,5 mm. 57,3 %. Elem. alloct.: sedim. 71 %, pirocl. 27,2 %; elem. autoct. 1,7 %. *Ciottoli* calc. più numerosi dei silicei, scarsi con diam. med. intorno a 15 mm., molti con diam. 10–5 mm. Bianchi o giallognoli a vene spatiche, grigi, scarso calc. rosato, brecciati; discoidali o a uovo depresso. Quelli marnosi e porosi presentano punteggiature e croste rossastre. Alcuni fortemente cariati e traforati, molti butterati. Calcite bianca in scarsi granuli allungati. Frammenti poco consumati grigio marnosi e giallastri. Numerose scheggette silicee policrome (rosse, grige, gialle, bianche, rosa). *Pirocl.*: abbond. granuli consumati di tufo con tutte le gradazioni da giallo a grigio, leggero, con augite e leucite alterate, diam. med. 10–4 mm.; pomici grige e scoriette irregolari grigio–nerastre rotolate, porose con abbond. leucite alter. e augite. Granuli grigi leucotefritici alterati; frequenti scoriette porose con parziali tracce di trasporto, rosa–violacee, grigio–viola chiare, con punteggiature leucit.; abbondantissimi granuli di leucite caolinizzata; più scarsi framm. di augite nera cariata, alcuni con patina e lustratura; scagliette biotitiche. *Autoct.* concrez. tubercolate di $CaCo_3$ attorno a frustoli veget.; concrez. irregolari bianco–giallastre; agglomerati di granuli sabbiosi con cemento calcareo–siliceo. *Paleont.*: Diceror. mercki, Hippop. major, Bos primig., Cervus elaph., Equus caball., E. hydruntinus [5 *a*], Homo neand. var. aniensis = S. II (Blanc, Sergi), ossa scheggiate intenzionalm., industria musteriana.

CAMPIONE 8 = EB. – *Prov.*: da intercalazioni di limi e sabbie comprese tra le ghiaie precedenti e le ghiaiette sabbiose superiori. *Fraz.* > 2,5 mm., 80,6 %; < 2,5 mm. 19,4 %. Elem. alloct.: sedim. 0,41 %, pirocl. 0,1 %. Scarsissimi ciottolini arrotond. calc. e silicei, diam. med. 5–3 mm. *Pirocl.*: scarse mass. sferoidali di tufo grigio, terrose, alterate esternam. con patine di ossidi e tracce di trasporto con successivo prolungato soggiorno in ambiente umido Il rimanente è costituito da grumi e masse irregol. (diam. med. 30–20 mm.), compatte giallo chiare calcarifere. Sono formate da steli veget. e filliti indeterminati che in origine rappresentavano l'armatura interna del bolo di limo i cui granuli venivano successivamente cementati da $CaCO_3$ e i veget. ridotti a tracce brune. *Paleont.*: framm. di conch. di molluschi d'acqua dolce, Filliti: Corylus avell., Quercus, Populus, Carpinus, Ostrya carpinif. [19] in alto liv. diatomeiferi.

Gli esami compiuti [13] permettono di formulare alcune considerazioni generali. Procedendo verso l'alto dagli strati inferiori, si nota una progressiva, sebbene non costante, diminuzione percentuale degli elementi ghiaiosi rispetto alla quantità del cemento sabbioso; gli elem. calcarei costantem. più numerosi dei silicei e più arrotond. di questi; quelli marnosi sono in quantità molto minore perchè poco resistenti al trasporto, e di forma discoidale. I livelli 2 e 5 sono quasi esclusivamente formati da ciottolame il cui cemento sabbioso è quantitivamente insignificante. Questi liv. coinci-

dono con un aumento nelle dimensioni degli elem. ghiaiosi e con una forte incrostazione di ossidi ferrosi e di Mn, più frequente nel complesso sottostante al livello 6. Il materiale piroclastico subisce notevoli variazioni nei rapporti di frequenza (fig. 4): più abbond. nei liv. infer.. raggiunge un massimo di frequenza delle diverse varietà petrografiche in 3 = H, per ridursi al minimo in corrispondenza del 6 = Fa. Un altro massimo è raggiunto nel 7 = Ec, sopra al secondo liv. a Homo S. II; 3 = H e 7 = Ec sono ricchi di concrezioni tartarose che hanno rivestito granuli minerali e frustoli vegetali. Tutti gli elem. piroclastici mostrano di avere subito un trasporto e sono quindi di seconda giacitura o anche terza: per le condizioni locali assai variabili secondo i punti, si sono più o meno profondamente alterati. Cio-

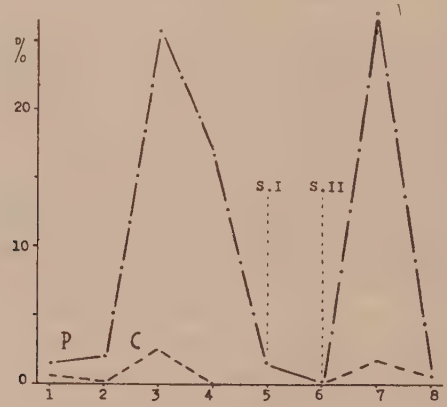


Fig. 4. – Frequenza dei materiali piroclastici (P) e delle concrezioni autoctone (C) di $CaCO_3$ nella frazione macroscopica dei campioni (1–8) di Saccopastore.

S. I, S. II, posizione relativa dei Paleantropi.

nonostante si distinguono bene tufi gialli leucitici, tufi viola e grigi, frammenti leucotefritici, di provenienza settentrionale (vulc. Sabatino) e scorie rosate, frammenti leucititici, basaltici e pozzolanacei–terrosi di provenienza dal vulc. Albano. Nel 7 = Ec i tufi gialli presentano struttura vacuolare per asportazione delle leuciti alterate. La presenza di concrezioni calcarifero–tartarose si osserva particolarmente nei livelli dove abbondano materiali vulcanici (fig. 4); coincidenza dovuta ad un maggiore potere solvente delle acque circolanti nelle ghiaie, e quindi incrostante là dove piccole cavità interstiziali, lasciate da vegetali o da altri corpi, hanno favorito la precipitazione. Si presentano allora, nel primo caso, fenomeni di butteratura dei ciottoli (per soluz. del $CaCO_3$ al contatto con i minerali delle sabbie cementanti), di carie e perforazione dei ciottoli, che così vengono distrutti. Quando si operi la dissoluzione dei carbonati, dopo la deposizione di patine silicee esternamente ai ciottoli, non sono rari nidi di ghiaia svuotata all'interno, simile a gusci d'uovo. Altrove si mostrano piccoli depositi stalagmitici localizzati, o sotto forma di deboli e ridotte croste. Questi fenomeni di circolazione

interna son legati alle condizioni climatiche esterne, combinate con fattori idrici e chimico-mineralogici dei banchi stessi. Allo stato attuale delle ricerche è pertanto ancora prudente andar cauti in eventuali giudizi paleoclimatici basati su questo elemento. Il complesso E presenta una facies caratteristica a episodi limno-palustri e di riva fluviale, ben diversa dalle formazioni sottostanti, a facies eminentemente fluviale. Ulteriori precisazioni saranno esposte nella Nota successiva.

NOTA BIBLIOGRAFICA.

[1] BLANC. A. C. – *Saccopastore II e i terrazzi del Tevere* (« Atti e Mem. Ist. Paleont. Umana », I, fasc. 1-3, 1935).

[2] BLANC A. C. – *I reperti musteriani di Saccopastore e la posizione cronologica del giacimento alla luce dei recenti trovamenti* (« Atti Congr. Studi Romani », 1937).

[3] BLANC A. C. – *La correlazione geocronologica tra i Paleantropi di Saccopastore e del Circeo e la loro posizione in una curva dell'elevazione dell'uomo* (« Boll. Soc. Geol. », Portugal, I, n. 2, 1942).

[4] BLANC A. C. – *Notizie sui trovamenti e sul giacimento di Saccopastore e sulla sua posizione nel Pleistocene laziale* (in : « Paleontographia Italica », XLII, vol. I, Pisa 1945-48).

[5] BLANC G. A. – *Amigdala chelleana delle ghiaie quaternarie del Tevere presso Ponte Milvio, Roma* (« Riv. Antropol. », XXX, 1935).

[5 *a*] BLANC G. A. - *Sulla presenza di « Equus hydruntinus Regal. » nelle ghiaie quaternarie dell'Aniene.* (« Rend. R. Acc. Lincei », XXIII, 827, 1936).

[6] BREUIL H., BLANC A. C. – *Il nuovo cranio di « Homo neandertaliensis » e la stratigrafia del giacimento di Saccopastore* (« Boll. Soc. Geol. It. », LV, n. 3; 1935 e « Rend. R. Acc. Lincei », XXI, II sem., n. 3, 4, 1935).

[7] BREUIL H., BLANC A. C. – *Le nouveau crane néandertalien de Saccopastore* (« L'Anthropologie », XLVI, n. 1-2, Paris 1936).

[8] CACCIAMALI G. B. – *L'uomo di Saccopastore e di Castenedolo* (« Boll. Soc. Geol. It. », XLIX, n. 1, 1930).

[9] DE ANGELIS D'OSSAT G. – *Sul valore cronologico del cranio umano fossile scoperto presso Roma* (ibid, XLIX, 1930).

[10] KENNARD A. S. – *Determinazione della malacofauna di Saccopastore* (in BREUIL e BLANC, opp. cit. nn. [4] e [7]).

[11] KÖPPEL R. – *Stratigrafia e analisi della tenuta di Saccopastore e della regione circostante in riguardo alla posizione del cranio neandertaliano scoperto nel maggio 1929* (« Riv. Antropol. », XXX, 1935).

[12] LIPPARINI T. – *I terrazzi fluviali e marini nella valle inferiore del Tevere* (« Giornale di Geologia », ser. II, IX bis, Bologna 1935).

[13] SEGRE A. G. – *Esame petrografico delle alluvioni di Saccopastore* (« Riv. Antropol. ») XXXVI, 1948).

[14] SERGI S. – *La scoperta di un cranio del tipo di Neandertal presso Roma* (« Riv. Antropol. », XXVIII, 1928-29).

[15] SERGI S. – *Il primo cranio del tipo di Neandertal scoperto in Italia nel suolo di Roma* (« Boll. Soc. Geol. It. », XLIX, 1930 e « Atti S. I. P. S. », XIX, 1930).

[16] SERGI S. – *Sulla stratigrafia di Saccopastore, appendice alla nota del prof. Köppel* (« Riv. Antropol. », XXX, 1935).

[17] SERGI S. – *Il cranio del II Paleantropo di Saccopastore* (« Paleont. Italica », XLII, 1945-48) e *Il II Paleantr. di Saccopastore* (« Riv. Antropol. », XXXVI, 1948).

[18] SERGI S. – *I paleantropi italiani* (« Medicina e Biologia », II, 1943).

[19] TONGIORGI E. – *La flora fossile di Saccopastore, suo significato nella storia della vegetazione nella regione laziale* (« Riv. Antropol. », XXXII, 1938-39).

Fisiologia. — *La curva di assorbimento per il CO_2 del sangue di « Triton cristatus »*. Nota di V. Capraro, presentata (*) dal Corrisp. R. Margaria.

In alcune specie di Anfibi, sia Anuri (*Rana catesbiana* (1)) che Urodeli (*Amphiuma tridactyla* (2)), e in alcuni Rettili (*Chelydra serpentina* (3)), è stato osservato che anche quando il sangue è messo in equilibrio con miscele molto povere di CO_2, la sua capacità per il CO_2 si conserva elevata, a differenza di quanto accade per il sangue di Mammiferi. Ciò è stato spiegato da Scott (loc. cit.) con l'ipotesi che la liberazione del CO_2 dai bicarbonati non può avvenire che in maniera parziale per il minore contenuto di emoglobina; dimodochè rimane sempre nel sangue una certa quantità di basi legate all'acido carbonico.

In questo lavoro sono state eseguite determinazioni di capacità per il CO_2 del sangue in toto, del plasma vero e del plasma di *Triton cristatus*, a varie pressioni di CO_2 in equilibrio.

Gli animali sono stati catturati nei mesi di febbraio-aprile e il sangue è stato prelevato pochi giorni dopo la cattura, per decapitazione ed apertura dei grossi vasi e del cuore, raccogliendolo in una soluzione di ossalato di potasio neutro all'1 %, in modo che il rapporto finale tra sangue e soluzione era di di 0,77/0,23.

Il sangue così diluito e reso incoagulabile, nella quantità di 2–4 cc, veniva messo ad equilibrarsi, per il tempo di 1/2 ora e alla temperatura di 20 °C ± 1, in un tonometro della capacità di circa 400 cc, con aria miscelata a CO_2 in varie concentrazioni, o con aria lavata con NaOH 1N; in quest'ultimo caso tale aria, dopo 15 minuti veniva cambiata con altra nuova e egualmente lavata con NaOH 1N, in modo da assicurare una pressione trascurabile di CO_2 nella atmosfera gassosa in equilibrio con il sangue.

L'analisi del contenuto in CO_2 totale del sangue veniva fatta con l'apparecchio manometrico di Van Slyke, e l'analisi delle miscele gassose era fatta con l'apparecchio di Haldane-Margaria.

Sono state fatte anche determinazioni della capacità per il CO_2, a varie tensioni di CO_2, del plasma separato dal sangue in equilibrio con aria atmosferica.

I valori di CO_2 totale così ottenuti sono stati corretti tenendo conto della diluizione.

Per confronto si è determinata anche la curva di assorbimento per il CO_2 del sangue venoso di cane (45–50 cc di CO_2 totale %), impoverito, al di

(*) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) H. Wastl e A. Seliskar, « J. of Physiol. », *60*, 264 (1925).

(2) W. J. Scott, « Biol. Bull. », *61*, 211 (1931).

(3) A. C. Redfield e F. C. Southworth, « J. of gen. Physiol. », *9*, 387 (1926).

fuori del contatto dell'aria, di emoglobina fino ad un contenuto circa eguale a quello del *Triton* (7 g % con l'emometro di Sahli), e poi messo in equilibrio con aria miscelata di CO_2 o con aria lavata con NaOH 1N.

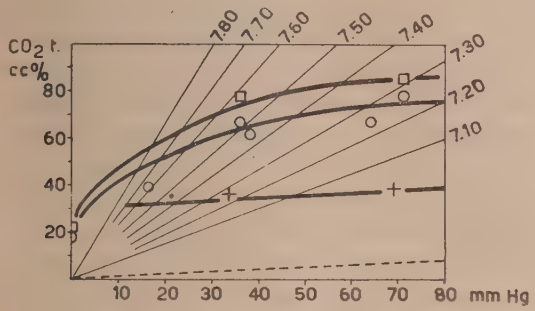


Fig. 1. – Curva di assorbimento per il CO_2 del sangue in toto (○), del plasma vero (□) e del plasma (+) di *Triton cristatus*, a 20 °C. La linea tratteggiata sta ad indicare il CO_2 sciolto fisicamente, sempre a 20 °C.

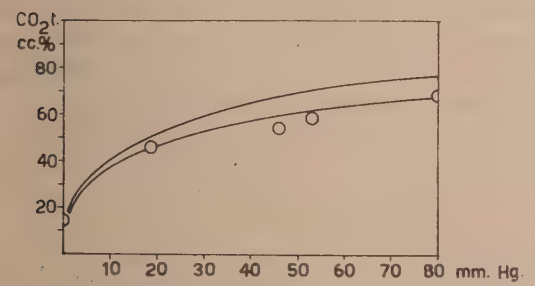


Fig. 2. – Sopra curva di assorbimento per il CO_2 del sangue in toto di *Triton*; sotto la curva di assorbimento del sangue di cane impoverito di emoglobina.

I risultati che scaturiscono dai dati raccolti (cfr. grafici) sono i seguenti:

1° Anche nel *Triton cristatus* l'emoglobina non può spostare tutto il CO_2 presente nel sangue, e anche a tensioni minime di CO_2 rimane sempre una quantità notevole di CO_2 nel sangue (in media 18 cc %). Inoltre anche quì la riserva alcalina è elevata (65 cc % a 20 °C).

2° Il plasma tende a comportarsi come una semplice soluzione di bicarbonati per cui l'aumento della capacità per il CO_2, che si ha aumentando la tensione di CO_2 in equilibrio, è da riportare quasi solo all'aumento del CO_2 sciolto fisicamente secondo la legge di Henry.

3° Il sangue di cane impoverito di emoglobina, a 0 mm Hg di pressione di CO_2 e a 20 °C, ha una capacità per il CO_2 dello stesso ordine di grandezza di quella del *Triton* nelle stesse condizioni (15,5 cc % in media), e con

l'aumentare della tensione di CO_2 in equilibrio, presenta una curva di assorbimento per il CO_2 simile a quella del sangue di *Triton*, ciò che fa pensare ad un eguale comportamento delle due emoglobine nel meccanismo della fissazione del CO_2.

4° Il sangue misto di *Triton*, raccolto sotto olio di vasellina, ha un contenuto di CO_2 di 52 cc % in media, a cui corrisponde, a 20 °C, un pH del plasma di 7,70, ed una tensione di CO_2 in equilibrio di 20–25 mm Hg.

In conclusione, il comportamento particolare del sangue di *Triton*, per quanto riguarda l'assorbimento del CO_2, è, dunque, simile a quello di altre specie di Anfibi, già studiate, ed è dovuto con ogni verosimiglianza alla minore concentrazione di emoglobina in confronto con quella dei Mammiferi. Ciò viene confermato dal fatto che si può riprodurre la curva di assorbimento del sangue di *Triton* anche con sangue di Mammifero in cui sia stata ad arte tolta una parte dell'emoglobina conservando al plasma la ricchezza di bicarbonati che ha normalmente in vivo. In questo sistema semiartificiale, anche a tensioni di CO_2 trascurabili, rimane una elevata capacità di CO_2, e la riserva alcalina resta eguale a quella del sangue normale di cane.

La grande capacità del sangue di queste specie per il CO_2, verosimilmente, non ha alcuna importanza respiratoria ed ha invece forse un significato nella regolazione del pH. Come nella *Rana catesbiana*, anche nel *Triton* il pH del sangue in vivo è più alcalino che nei comuni Mammiferi e nell'Uomo e tale alcalinità è da attribuirsi alla maggiore riserva alcalina di questi animali. Inoltre per la stessa ragione e per la forma della curva di assorbimento il sangue del *Triton* ha un elevato potere tampone. Difatti se si adotta la formula di Barcroft e Coll. (cit. da Wastl e Seliskar loc. cit.)

$$\text{vol. } CO_2 = b\,[H^+]\,10^8 + c$$

in cui la costante «c» ci esprime la capacità assoluta del sangue per il CO_2, e la costante «b» ci esprime il potere tampone del sistema; e si calcola, in base ai dati raccolti, il valore di «c» e di «b» per il sangue di *Triton*, si ottiene: $c = 26$ e $b = 11{,}5$; mentre le stesse costanti per il sangue umano hanno il valore rispettivamente di 16,6 e di 8,4. Da ciò risulta che il sangue di *Triton* ha un valore maggiore di «b» e quindi un maggiore potere tampone del sangue umano; esso inoltre ha un valore superiore di «c» e quindi una capacità per il CO_2 maggiore del sangue umano come appare chiaramente anche dal confronto delle curve di assorbimento.

Queste diversità potrebbero avere un significato utile nella vita dell'animale, ad esempio per superare il pericolo di acidosi a cui può andare incontro durante la permanenza sott'acqua.

Biologia. — *Meccanismo d'azione e trasformazioni nell'organismo dell'aminotiazolo* (*). Nota di R. Santi e A. Porro, presentata (**) dal Corrisp. E. Meneghetti.

Le ricerche volte a indagare il meccanismo d'azione dei farmaci dotati di attività antitiroidea hanno conseguito brillanti successi e hanno permesso di determinare con esattezza la vera sede d'azione di questi composti nel quadro complicato del metabolismo dello iodio. Mediante l'uso dello iodio radioattivo è stato possibile stabilire che essi interferiscono in qualche stadio essenziale dei processi ossidativi dello ioduro inorganico, di modo che lo iodio non può più essere incorporato negli ormoni tiroidei.

Finora l'attenzione degli autori che si sono occupati di questi problemi si è rivolta prevalentemente al modo di comportarsi dello iodio, trascurando alquanto lo studio delle trasformazioni che questi composti antitiroidei subiscono nell'organismo, trasformazioni che pure sono di fondamentale importanza per una chiara comprensione della loro azione. Se è vero che questi composti ingranano nei processi ossido-riduttivi, è molto probabile che al momento di agire essi stessi subiscano delle trasformazioni di struttura.

Si può dire che in questo campo sono state fatte solo delle indagini indirette, perchè, quando si sono voluti stabilire i rapporti tra struttura chimica e azione farmacologica, non sono state indagate le trasformazioni che i singoli farmaci subiscono nell'organismo, ma sono state impiegate sostanze nuove che differivano per piccole o grandi modificazioni di struttura.

Noi invece, in queste ricerche, abbiamo voluto raccogliere informazioni sul meccanismo d'azione dell'aminotiazolo, studiando il suo comportamento nell'organismo e tentando di stabilire il posto che gli compete tra questi composti. Come vedremo, non sono ancora ben chiari i rapporti, che legano tra di loro questi farmaci, tanto è vero che, in attesa di una classificazione farmacologica basata sul vero meccanismo d'azione, bisogna adottare come criterio distintivo la struttura chimica di ogni singolo componente. Così, con il Meneghetti i farmaci principali dotati di attività antitiroidea si possono dividere fondamentalmente in tre gruppi : i tioureici, o meglio, i tiolici, gli aminotiazolici e gli aminobenzenici.

L'evidente eterogenea composizione di questi gruppi, che non consente di stabilire subito un chiaro rapporto tra struttura chimica e attività antitiroidea, è in strano contrasto con la notevole somiglianza di azione da essi posseduta, che depone invece per un modo di agire fondamentalmente simile per tutti. I lavori di Taurog, Chaikoff e Franklin (1) sono riusciti, nel caso

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Farmacologia dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) A. Taurog, I. L. Chaikoff e A. L. Franklin, « J. Biol. Chem. », *161*, 537 (1945).

dei composti aminobenzenici, a chiarire molti punti oscuri, perchè hanno indicato con precisione quali siano i gruppi portatori dell'attività farmacologica.

Questi Autori hanno indagato « in vitro » la capacità posseduta da quaranta diversi composti di inibire la trasformazione, prodotta da fettine di tiroide, dello ioduro inorganico radioattivo, I^{131}, in tiroxina e diiodotirosina.

Come abbiamo già accennato manca però uno studio organico delle trasformazioni che tutti questi composti subiscono nell'organismo, mentre è molto verosimile che alcune di queste modificazioni strutturali stiano alla base dell'attività farmacologica e rendano attivo un composto prima inerte.

Per quanto riguarda il 2–aminotiazolo, il Meneghetti [2], nella sua relazione al congresso di Medicina del 1947, faceva rilevare che questo farmaco, pur avendo sulla tiroide un'azione analoga a quella dei farmaci tiolici, non possiede, come questi, un'azione antiossidasica e inoltre la sua molecola non presenta forme di tautomeria enolica che, a quanto pare, stanno alla base dell'attività antitiroidea. Il Meneghetti avanzava l'ipotesi che l'azione dell'aminotiazolo potesse dipendere dalla liberazione nell'organismo di tiourea per apertura dell'anello eterociclico.

In un lavoro chimico il Travagli [3] aveva dimostrato che questa scissione non solo era possibile, ma anzi era relativamente facile a provocarsi sperimentalmente.

I metodi di dosaggio della tiourea non sono soddisfacenti, specialmente nei liquidi biologici, perchè non sono specifici e non dànno risultati costanti o esattamente raffrontabili.

Il metodo più usato, quello di Grote [4], si basa su prodotti ignoti di ossidazione del nitroprussiato che con il gruppo C — SH dànno un colore rosso porpora e con il gruppo C = S e E = S (dove E è un elemento non metallico) dànno un colore verde e blu intenso. Si ottengono pertanto reazioni positive anche con il tiouracile (blu–verdastro), il pentotal, l'acido tiobarbiturico, il tiocianato sodico, il tiosolfato sodico. La tiourea sviluppa un intenso e puro color blu. La molecola intatta dell'aminotiazolo dà una reazione negativa.

Chesley [5] ha tentato di migliorare questa reazione, ma, a nostro avviso, è consigliabile attenersi al procedimento originale di Grote.

Il metodo proposto da König di trasformare la tiourea in solfocianuro e titolare questo con percloruro di ferro, metodo di recente ripreso da Campbell, Landgrebe e Morgan [6] e da De Ritis e Zacco [7], non è abbastanza sensibile per gli scopi che ci siamo proposti.

(2) E. Meneghetti, « La Med. Internaz. », *55*, 245 (1947).
(3) G. Travagli, « Boll. Sc. Fac. Chim. Ind. Bologna », *9*, 161 (1941).
(4) J. W. Grote, « J. Biol. Chem. », *93*, 25 (1931).
(5) L. C. Chesley, « J. Biol. Chem. », *152*, 571 (1944).
(6) D. Campbell, F. W. Landgrebe e T. N. Morgan, « Lancet », 1944, I, 630.
(7) F. De Ritis e M. Zacco, « Arch. Scienze Med. », *85*, 255 (1948).

Buoni risultati abbiamo ottenuto con il metodo di Sato [8] leggermente modificato per renderlo di più rapida attuazione. Le orine devono essere diluite (1 : 4); le provette, dopo acidificazione con acido acetico e aggiunta di ferrocianuro, vengono tenute per 5′ a 70° in bagno-maria. In tal modo la reazione per manifestarsi non richiede più quel lungo periodo di tempo (24-48 ore) che è necessario lasciar trascorrere a temperatura ambiente per ottenere la massima intensità della colorazione blu.

Soluzioni 1:500 di aminotiazolo, sulfamidotiazolo, acido p. aminobenzoico, urea sviluppano tonalità di colore verde chiaro; il tiouracile dà un colore giallo-verdastro, il solfocianuro di potassio dà un precipitato nerastro.

Con questo metodo è possibile titolare fino a 50 γ di tiourea.

Con tutti i metodi da noi usati (Sato, Chesley e Grote), abbiamo constatato che gli animali a cui si era somministrato dell'aminotiazolo, eliminavano tiourea con le orine. La quantità di tiourea ritrovata, varia alquanto a seconda della via di somministrazione e a seconda delle dosi usate. Questo dato è in accordo con quelli di Danowski [9], il quale ha visto che la durata di permanenza in circolo della tiourea non supera i tre giorni.

Via di somministrazione	Peso del coniglio	Aminotiazolo g/Kg.	TIOUREA ELIMINATA							Percentuale di aminotiazolo somministrato che si scinde in tiourea
			dopo 8 h mg.	dopo 12 h mg.	dopo 24 h mg.	dopo 32 h mg.	dopo 48 h mg.	dopo 55 h mg.	TOTALE mg.	
gastrica	2200	0,90	1,3	3,1	5,2	—	—	—	—	—
»	2100	2,00	muore							
sottocutanea	2200	0,08	1,9	2,7	8,6	—	—	—	13,2	9,6
»	1900	0,20	3,2	6,1	—	—	—	—	9,3	2,4
»	2200	0,20	2,1	3,7	7,4	—	—	—	13,2	9,6
»	1300	0,32	2,5	5,5	10,3	15,5	3,2	—	37,0	12,3
»	1650	0,40	16,0	18,0	18,0	24,4	18,0	4,8	99,2	20,8
»	1900	0,50	3,2	6,1	—	—	—	—	—	—

La percentuale massima di aminotiazolo che si scinde liberando tiourea rappresenta, dunque, il 20 % di quella somministrata. La rimanente quantità non va incontro a un medesimo destino.

Secondo i risultati di Bovet, Bablet e Fournel [10], solo il 10 % di aminotiazolo non modificato viene eliminato con le orine; il resto, che si può

(8) T. SATO, « Biochem. Zeit », *23*, 45 (1909).
(9) T. S. DANOWSKI, « J. Biol. Chem. », *152*, 201 (1943).
(10) D. BOVET, J. BABLET e J. FOURNEL, « Ann. Inst. Pasteur », *72*, 105 (1946).

valutare all'incirca al 70 %, subisce altre trasformazioni, tra cui verosimilmente la più cospicua è quella che determina la comparsa della colorazione rossa delle orine che si nota dopo la somministrazione di questo farmaco e che talora è così intensa da ostacolare le reazioni colorate della tiourea.

Il metabolismo dell'aminotiazolo da parte dell'organismo è quindi piuttosto complicato perchè una frazione non si modifica, un'altra si scinde liberando tiourea e una terza subisce altre trasformazioni ancora non definite, formando anche un composto rosso. Resta ora da stabilire a quale di queste frazioni si debba ascrivere l'attività farmacologica. Senza dubbio la tiourea che si libera nell'organismo esplicherà la sua ben nota azione sulla tiroide, ma, per poter affermare che essa è responsabile di *tutta* l'attività antitiroidea dell'aminotiazolo, bisognerebbe ammettere che in questo caso venga a trovarsi in forma molto più attiva di quella solita, altrimenti non si saprebbe come spiegare il notevole divario esistente tra le alte dosi di tiourea che si devono impiegare in terapia e le piccole quantità che si liberano nella scissione dell'aminotiazolo. Questa ipotesi non è in contrasto con le nostre attuali conoscenze, perchè un analogo comportamento si verifica per tanti altri farmaci che si liberano nell'organismo allo stato « nascente ». Se poi questa liberazione avvenisse prevalentemente in organi o tessuti particolarmente sensibili all'azione del farmaco, potrebbero bastare anche piccole dosi a determinare azioni intense.

Nella speranza di riuscire a valutare meglio l'importanza di questa scissione, abbiamo voluto vagliare se questa seducente ipotesi della liberazione di tiourea potesse essere estesa anche ad altri composti ad azione antitiroidea, che possiedono lo zolfo nella loro molecola. Abbiamo però potuto constatare, ben inteso per le dosi impiegate ed entro i limiti di sensibilità dei metodi di dosaggio, che nessuna delle sostanze esaminate libera tiourea nell'organismo, neppure quelle, come i tiobarbiturici, per cui poteva sembrare più agevole la scissione in questa direzione.

Sostanza somministrata	Coniglio gr.	via di somministrazione	Dose g/Kg.	Ricerca negativa della tiourea dopo ore	
Pentotal	1700	gastrica	1,50	1	
	1850	sottocutanea	0,05	1	20
	1200	»	0,08	1	
	1900	»	0,5*	4	24
Tiouracile	2000	»	0,5	24	48
Solfocianato K	1650	»	0,35	5	24
Solfocianato ammonio **	1600	»	0,35	5	24

* Iniezione di g. 0,125 Kg. ogni ora per 4 ore.

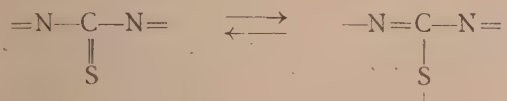
** Abbiamo provato questo composto perchè la tiourea si può ottenere riscaldando il solfocianato di ammonio.

Un'attenta indagine bibliografica ci ha fornito la conferma che anche altri Autori hanno osservato lo stesso comportamento usando queste sostanze o sostanze di struttura molto simile ad esse (ac. dietilbarbiturico, Gad [11], tiouracile, Williams e Kay [12]). È evidente, pertanto, che la trasformazione in tiourea non rappresenta un fattore essenziale nell'azione antitiroidea e che, d'altra parte, anche se si fosse verificata per tutte le sostanze esaminate, non avrebbe potuto servire a giustificare l'attività dei composti aminobenzenici che non possiedono zolfo nella loro molecola.

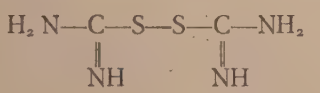
La spiegazione dell'attività sulla tiroide deve quindi essere cercata anche in altra direzione. Il fatto più sicuramente assodato è che questi farmaci ingranano in qualche modo nei processi ossido-riduttivi. La nostra attenzione in queste molecole dovrà quindi essere rivolta prevalentemente ai gruppi chimici che possono reagire in questo modo.

Molti composti tiolici (alliltiourea, naftiltiourea, tiourea, tiouracile) possiedono uno spiccato potere riducente, che stiamo facendo oggetto di misura, perchè ci sembra che esista uno stretto rapporto tra questa proprietà e l'attività farmacologica. Anche Gyorgy e coll. [13] e Taurog e coll. [14] hanno posto in relazione la capacità ad ossidarsi di questi composti con la loro attività gozzigena.

Data la mancanza dei dati concernenti le proprietà fisiche e chimiche di queste sostanze e soprattutto dei loro potenziali di ossido-riduzione che pure sono di fondamentale importanza per interpretare la loro azione, varrà la pena di estendere le indagini in questo senso, per esempio con misure polarografiche del potenziale anodico, in quanto non possono dare onde al catodo, perchè non sono riducibili. I farmaci tiolici possiedono tutti un identico raggruppamento con possibilità di emolizzazione:



Si può ammettere che, per tutti questi farmaci, si formi un sistema ossido-riduttore simile a quello cistina-cisteina, analogamente a quanto si sa avvenire per la tiourea: benchè questa sostanza sia nota in una sola forma, può reagire tautomericamente nel senso più sopra indicato, come si può dimostrare con l'ossidazione con permanganato, reazione in cui si formano dei solfuri del tipo



(11) J. Gad, « Arch. f. exp. Path. u. Pharmakol. », *199*, 449 (1942).
(12) R. H. Williams e G. A. Kay, « J. Clin. Endocrinol. », *4*, 385 (1944).
(13) P. Gyòrgy, F. T. Stiller e M. B. Williamson, « Scienze, » *98*, 518, (1943).
(14) A. Taurog, J. L. Chaikoff e A. L. Franklin, « J. Biol. Chem. », *161*, 537 (1945).

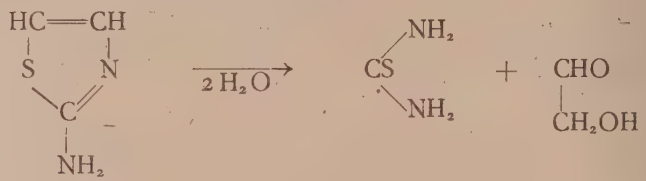
Invece nei farmaci aminobenzenici il gruppo che può interferire con i processi ossido–riduttivi è quello aminico aromatico, perchè più facilmente può andare soggetto a trasformazioni.

Una teoria sul meccanismo d'azione dei sulfamidici che, benchè criticata (Bratton, White e Marshall [15] e Williams R. T. [16]), è ancora degna della massima considerazione, è quella di Mayer e Oechslin [17] completata dalle osservazioni di Locke, Main e Mellon [18]. Questi autori sostengono che il vero agente chemioterapico è rappresentato da un prodotto di ossidazione dei sulfamidici e più precisamente del gruppo aminico, che nell'organismo va soggetto a una progressiva ossidazione:

$$-NH_2 \rightarrow -NH\,OH \rightarrow -NO \rightarrow -NO_2\,.$$

Le belle ricerche di Taurog, Chaikoff e Franklin, già citate, hanno dimostrato che, in composti di struttura simile a quella dei sulfamidici, l'attività antitiroidea dipende dal gruppo aminico libero, in quanto il blocco di questo gruppo provoca perdite dell'attività inibitoria sulla tiroide e che esiste uno stretto rapporto tra la capacità ad ossidarsi e l'attività farmacologica di questi composti. Forse è così possibile riunire sotto lo stesso meccanismo d'azione attività antitiroidea e attività chemioterapica. È molto verosimile che anche il gruppo aminico dell'aminotiazolo possa andare incontro facilmente a trasformazioni analoghe a quelle appena citate.

Già la scissione dell'aminotiazolo in tiourea e in aldeide glicolica, dimostrata possibile « in vitro » dal Travagli:



depone per l'esistenza di una tautomeria aminica–iminica

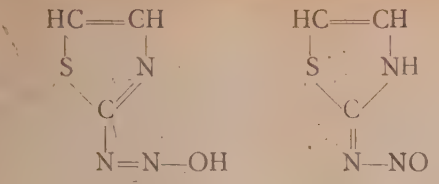
in quanto solo la forma iminica giustifica questa demolizione dell'anello eterociclico. Tale facilità di attacco del gruppo aminico è denunciato anche dalla formazione di diazo–derivati, trattando l'aminotiazolo con ac. nitroso:

(15) A. C. Bratton, H. J. White e E. K. Marshall, « Proc. Soc. exp. Biol. a. Med. », *42*, 847 (1939).

(16) R. T. Williams, « Biochem. J. », *40*, 219 (1946); *Ibidem*, *41*, 1 (1947).

(17) R. L. Mayer e C. Oechslin, « Bull. Accad. de méd. », *117*, 727 (1937).

(18) A. Locke, E. R. Main e R. R. Mellon, « Science », *88*, 620 (1938).



Questi composti, che sono colorati e non coloranti, in seguito all'unione con i fenoli formano sostanze azoiche colorate e coloranti.

È interessante far rilevare che per titolare l'aminotiazolo si usa lo stesso metodo proposto per i sulfamidici [19]; inoltre nella letteratura è descritto il colorante del tiazolo che si forma con la resorcina che si noti, è di colore rosso [20].

Dopo la somministrazione dell'aminotiazolo, le orine si colorano intensamente in rosso, colorazione che non dipende dal sangue. Abbiamo voluto prendere brevemente in considerazione anche questo composto colorato, che, con tutta probabilità si origina da una trasformazione dell'aminotiazolo. Il metodo più semplice per concentrarlo, dato che non si può estrarre con i comuni solventi (non essendo solubile in etere, cloroformio, alcool etilico, alcool isobutilico, etere di petrolio) è di tirare a secco le orine sul bagno-maria e trattare il residuo con alcool metilico, che rappresenta un buon solvente di questo composto.

Ancora non è stato possibile purificarlo sufficientemente in modo da poterne fare il riconoscimento chimico. Si tratta di una sostanza colorata e colorante, che tinge in rosso bruno indelebilmente la lana. È probabile che si origini da un diazoderivato dell'aminotiazolo.

Data la notevole tendenza a reagire, è molto verosimile che il gruppo aminico dell'aminotiazolo si comporti nell'organismo in modo simile a quello dei sulfamidici e sia pertanto da ritenere responsabile, almeno in parte, dell'attività antitiroidea dell'aminotiazolo.

L'aminotiazolo verrebbe così a costituire un anello di congiunzione tra i farmaci tiolici e quelli aminobenzenici, partecipando contemporaneamente al modo di agire sia degli uni che degli altri. D'altra parte questo meccanismo d'azione fondamentalmente è lo stesso nei due casi considerati, consistendo in una interferenza nei processi ossidativi dello iodio inorganico: sono solo diversi i gruppi chimici impegnati in questa reazione, R—SH in un caso e R—NH_2 nell'altro.

Per quanto riguarda l'aminotiazolo, decidere dell'importanza che si deve riconoscere all'uno o all'altro dei due fattori che determinano l'azione antitiroidea, richiede un'ulteriore accurata analisi quantitativa dell'azione farmacologica e delle trasformazioni che questo farmaco subisce nell'organismo.

(19) D. Bovet, J. Bablet e J. Fournel, «Ann. Inst. Pasteur», *72*, 105 (1946).
(20) Traumann, «Ann. Chem.», *249*, 35 (1888).

Biologia. — *A proposito dell'azione dei «Penicillium» e dei prodotti del loro metabolismo sull'accrescimento cellulare in tessuti normali e patologici* (*). Nota di G. GOIDANICH, L. CAMICI e I. GOIDANICH, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Una delle prime domande che si devono essere poste i pionieri della sperimentazione sull'attività degli antibiotici nella lotta contro le malattie infettive, è stata senza dubbio quella che ricercava se non vi fosse da parte di queste sostanze una qualche influenza anche sui complessi istologici dell'organismo superiore che sono il normale substrato di moltiplicazione dei germi patogeni.

Partiti cioè dalla constatazione «in vitro» che certi microrganismi subivano, per un fenomeno ancora discusso se di stasi o di lisi, un arresto nello accrescimento quando il loro ambiente di sviluppo fosse alterato per la presenza di sostanze secrete dal micelio dei *Penicillium*, era quasi istintivo domandarsi e preoccuparsi se analogo disturbo avvenisse anche al livello degli elementi cellulari dei metazoi e dei metafiti, tanto più quando questi ultimi si trovino in uno stato di debilitazione o di anormale differenziazione in conseguenza di uno stato patologico dipendentemente dal fatto infettivo.

Con i successi dell'applicazione pratica della terapia antibiotica, nel corso della quale si osservava oltre che la regressione delle colonie microbiche anche la rigenerazione dei centri lesionati, tale preoccupazione fu accantonata. Non in forma definitiva però: perchè era sempre discutibile se il felice esito finale fosse sufficiente indicazione che le neoformazioni di natura riparativa seguissero le vie della normalità fisiologica.

La questione si fece più pressante, anche da un punto di vista pratico, allorchè si trattò di decidere della opportunità o meno di usare gli estratti grezzi delle culture di *Penicillium*, per i quali a volte si negava a volte si riconosceva e si esaltava una efficacia terapeutica superiore anche a quella dei prodotti purificati. Affermazioni e dinieghi che, per il vero, erano sempre confortati da apparentemente ineccepibili dati sperimentali.

Evidentemente le cause di tali discordanze interpretative risiedono nella diversità del materiale adoperato, non comparabile nella sua composizione e – conseguentemente – negli effetti che è in grado di produrre in fenomeni biologici delicatissimi come sono quelli dell'accrescimento cellulare.

Cause che d'altronde è inutile cercare di eliminare se prima non si dispone di un mezzo di saggio abbastanza sicuro, un teste, come sarebbe un tessuto capace di rispondere elettivamente allo stimolo conseguente alla presenza delle sostanze in esame, o – se non elettivamente – di rispondervi

(*) Ricerche eseguite nella Stazione di Patologia vegetale di Roma e nell'Istituto Ortopedico Rizzoli dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 15 maggio 1948.

con quella prontezza sufficiente a distinguervi gli effetti di altri fattori di stimolazione concomitanti o secondari. L'ideale è quindi rappresentato da un tessuto in stato di quiescenza, la cui inerzia biologica non venga sollecitata dalle operazioni necessarie per la messa a contatto con il materiale di prova o, altrimenti, nel quale le sollecitazioni a queste conseguenti non siano di entità tale da renderne immediatamente, o quasi, irriconoscibile la fisionomia.

A noi è parso che simili caratteristiche siano presentate in alto grado dal parenchima amilaceo del tubero di patata. In esso, se viene praticata una ferita, si ha una meristemizzazione degli strati di cellule sottostanti a quelle lesionate che conduce, tramite un combinato processo di ipertrofia ed iperplasia, alla differenziazione di un periderma secondario di cicatrizzazione che isola perfettamente – per il suo carattere di continuità e di impermeabilità, – le parti del parenchima normale da quelle traumatizzate alla superficie del taglio.

Nell'insieme si tratta di una serie di trasformazioni anatomico-fisiologiche che avvengono con regolare, relativamente lenta, progressione; e, questo è ancor più importante, possono essere seguite, applicando una tecnica istologica che abbiamo adottata in altre ricerche [1], quasi ora per ora nel loro evolversi.

In tali condizioni è abbastanza facile poter giudicare se una sostanza od un fattore eccezionale eserciti un'influenza sull'andamento del processo, in ultima analisi sull'accrescimento e moltiplicazione cellulare, seguendo le eventuali deviazioni che insorgono rispetto al decorso standard fissato in un dato stato fisiologico ed ambientale.

Il metodo sperimentale seguìto è stato il seguente:

i liquidi in esame vengono aggiunti, operando sempre in condizioni sterili, a un terreno di agar puro al 4 %, nella percentuale di 1 cc. × 3 cc.[3], in modo da mantenere una sufficiente gelatinizzazione anche dopo la mescolanza. L'agar si riduce quindi in sottili striscioline di 3–4 mm. di larghezza, che si depongono su una superficie di taglio, anch'essa sterile, di tubero di patata di recente maturazione e quindi ben vitale.

La deposizione avveniva, per ragioni che verranno discusse in seguito, o immediatamente dopo aver praticata la ferita, o a distanza di 24 ore.

Sono stati così sperimentati: una soluzione di Penicillina a 50.000 U. O., offertaci gentilmente dal prof. Del Vecchio; un « filtrato crudo » di *Penicillium notatum* ottenuto da noi in laboratorio [2]; un analogo filtrato di pro-

(1) Cfr. G. GOIDANICH, L. CAMICI, *Ipotesi su un caso di metacromasia.* « Ann. di Sperimentazione Agraria », 1948 (in corso di stampa).

(2) Il *Penicillium notatum* è un trapianto del ceppo n° 1249 fornitoci gentilmente dal professor V. Puntoni, direttore dell'Istituto di Igiene dell'Università di Roma. Il filtrato si otteneva nel modo seguente: il *P. notatum* veniva seminato contemporaneamente su due substrati liquidi: uno a base minerale (glucosio: 5 gr.; NH_4CL: 0,5 gr.; K_2HPO_4: 0.5 gr.; $MgSO_4$: 0.7 gr.; $FeCL_3$ (sol. 1 %): 10 gocce; estratto di malto: 5 gr.; H_2O distillata: 1000 cc.); l'altro peptonizzato (peptone Witte: 10 gr.; glucosio: 20 gr.; K_2HPO_4: 0,5 gr.; $MgSO_4$: 0,5 gr.; $FeCl_3$ (sol. 1 %): 10 cc.; H_2O distill.: 1000 cc.).

duzione commerciale [3]; un « filtrato crudo » di un *Penicillium sp.* sviluppatosi spontaneamente su tuberi di patata non sterilizzati.

Nel corso delle esperienze il materiale è stato mantenuto in termostato a 25° C. L'andamento del processo di cicatrizzazione, seguìto col metodo della colorazione del violetto di genziana ammoniacale da noi già descritto [4], è il seguente:

nel controllo, già 24 ore dopo l'inizio dell'esperimento, si osserva la formazione di una parete continua di gommisuberificazione – segnalata dal fissaggio della tinta blu del violetto di genziana – formatasi tra il primo strato delle cellule lesionate dal taglio e gli elementi sottostanti.

Dopo 10–12 giorni – quando il processo riparativo è nella sua fase finale – si osserva: lo strato delle cellule superficiali uccise dal trauma e infarcite di amido; un secondo strato di cellule strutturalmente immodificate con le

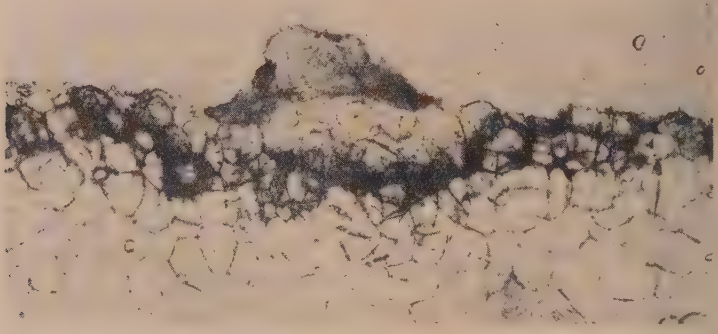


Fig. 1. – Andamento della linea peridermica in corrispondenza di un cubetto di agar-estratto commerciale di *P. notatum* (Micocillina), deposto su semitubero appena tagliato. Osservato 48 ore dopo.

pareti gommisuberificate e il contenuto privo di amido – solubilizzatosi per la richiesta esercitata dai processi riparativi –; un terzo strato in cui, per un combinato processo di iperplasia ed ipertrofia, le cellule hanno dato luogo agli elementi (in serie di 8–10) del meristema secondario. In quasi tutta la lunghezza delle pareti di tali elementi si è spinto il processo di gommisuberificazione. Ad esso segue il parenchima amilaceo normale.

In presenza dei diversi filtrati di *Penicillium*, di preparazione commerciale o di laboratorio, le osservazioni compiute 24 ore dopo l'inizio delle esperienze non rivelano nulla di diverso dal controllo.

Dopo un periodo di accrescimento di 6 giorni, 12 giorni, 30 giorni, i liquidi culturali delle rispettive colonie di *Penicillium* venivano sterilizzati a freddo per filtro Zeiss, in modo che si ottenevano in tutto 6 tipi di filtrato crudo differenti per durata di sfruttamento da parte del fungo, e di composizione base originale.

(3) «Micocillina» della Casa Ilfa di Ferrara che ce ne ha cortesemente fornito un quantitativo sufficiente per le esperienze.

(4) Cfr. *Ipotesi su un caso di metacromasia*, loc. cit.

Quando il processo riparativo è nella sua fase finale, si osserva, in corrispondenza dei liquidi, un ispessimento della zona delle cellule gommisuberificate, inserite tra gli elementi superficiali uccisi dal trauma e gli elementi iniziali del meristema secondario. Tali cellule infatti comprendono 2-3, fino a 4 strati successivi, e, di conseguenza, il periderma sottostante risulta approfondito. Gli elementi meristemizzati appaiono normali come nel controllo.

Se si usano i filtrati crudi di laboratorio l'effetto è uguale per entrambi i ceppi di *Penicillium*, ma è sensibile solo col filtrato di colonie giovani di 6 giorni, mentre si attenua o è nullo coi liquidi sfruttati per un periodo di tempo superiore.

L'uso dell'estratto commerciale produce un approfondimento anche maggiore del periderma secondario: infatti, in corrispondenza del liquido, oltre all'ispessimento delle cellule gommisuberificate si osservano – inseriti

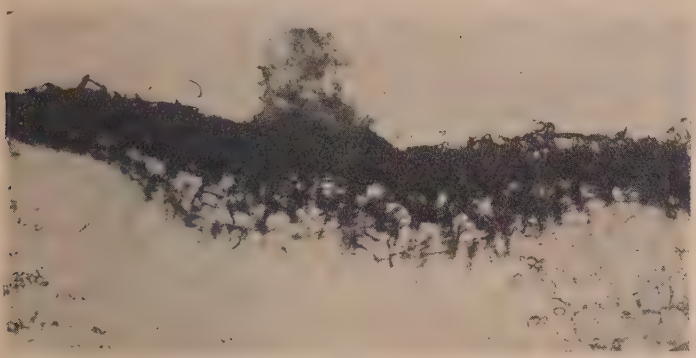


Fig. 2. – Andamento della linea peridermica in corrispondenza di un cubetto di agar-conidi incubati di *P. notatum*, deposto su semitubero appena tagliato. Osservato dopo 72 ore.

tra queste e le superficiali uccise dal trauma – alcuni strati (fino a 7-8) di cellule inerti; in esse non compaiono i processi vitali che nelle altre vengono segnalati dalla scomparsa dell'amido e dalla fissazione del violetto di genziana sulle pareti.

In tutte queste esperienze l'azione dei filtrati è molto attenuata se si fanno agire, invece che su ferita fresca, su ferita di 24 ore.

L'applicazione della Penicillina, usata in concentrazioni diverse, non ha mai prodotto un abbassamento della linea peridermica, ma solo una certa appena percettibile ipertrofia delle cellule gommisuberificate.

Contemporaneamente è stato compiuto un gruppo di esperienze nelle quali al posto dei filtrati, l'agar (5) era aggiunto a una sospensione di conidi dei due ceppi di *Penicillium*. In una serie l'agar era deposta sulla ferita fresca

(5) Per la preparazione di questo agar ci si è serviti della stessa formula del liquido nutritizio mineralizzato usato per ottenere i filtrati di *Penicillium*.

dopo aver subito 48 ore di incubazione a 25° C (in modo che i conidi fossero già germinati); in un'altra invece, era deposta senza il periodo di incubazione.

I risultati sono stati uguali per entrambi i ceppi di *Penicillium*.

In presenza di agar–conidi non incubati, l'andamento del processo riparativo è normale o si osserva solo un leggero approfondimento della linea peridermica.

In presenza di agar–conidi incubati per 48 ore, si hanno risultati analoghi a quelli ottenuti con l'applicazione degli estratti: ispessimento della zona delle cellule gommisuberificate e approfondimento del meristema secondario.

Quando il micelio fungino è molto sviluppato nell'agar, si osserva – come nella esperienza con la micocillina – la perdita di vitalità di alcuni strati di

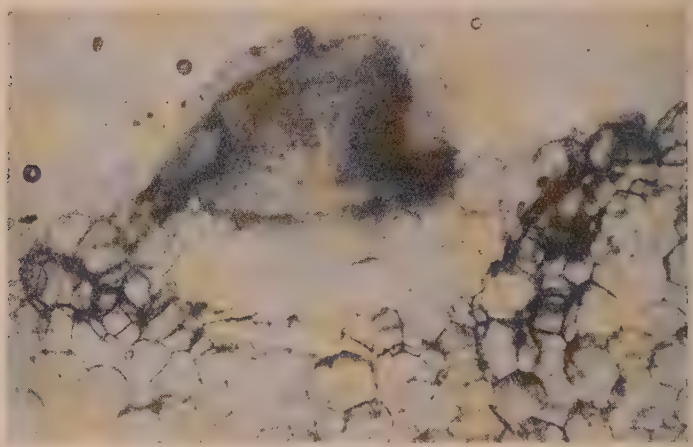


Fig. 3. – Andamento della linea peridermica in corrispondenza di un cubetto di agar-filtrato crudo di *P. notatum*, deposto su semitubero appena tagliato. Osservato 24 ore dopo.

cellule inseriti tra quello superficiale traumatizzato e quello delle cellule in via di gommisuberificazione.

L'effetto si attenua quando l'agar–conidi è deposta su ferita di 24 ore.

Nel complesso si vede che l'azione dei filtrati di *Penicillium notatum*, di laboratorio e commerciali, è analoga a quella dei corrispondenti miceli. Essa si esercita più che altro mediante un'attivazione delle funzioni biochimiche dei primi strati delle cellule sottostanti al trauma, cui è connessa una migliore evoluzione dei processi di meristemizzazione che portano alla risoluzione definitiva del fatto traumatico. Soltanto quando la concentrazione dei metaboliti raggiunge un alto grado di intensità può verificarsi una perdita di vitalità nei primi strati cellulari; ma ciò, si è già detto, non influisce in senso negativo, sugli esiti finali del processo riparativo.

D'altro canto le esperienze con le soluzioni di Penicillina pura indicano che questa sostanza – nelle concentrazioni da noi adoperate – direttamente

non interviene od interviene solo in minima parte nei processi di rigenerazione cellulare. Le variazioni che insorgono nell'andamento della linea peridermica sono perciò imputabili ad altri prodotti del metabolismo fungino, in buona parte identificabili in quelle sostanze a carattere auxinico – ormonico, di cui è nota la elaborazione da parte di micromiceti del tipo in questione [6] e per i quali è parimente nota la funzione stimolante su elementi cellulari in via di moltiplicazione normale o patologica [7].

Fig. 4. – Semituberi per il saggio dei filtrati crudi di *Penicillium*.

In alto: Micocillina aggiunta all'agar e deposta 48 ore dopo l'esecuzione del taglio (a sinistra) e subito dopo l'esecuzione del taglio (a destra).

In basso: Agar pura (a sinistra); e controllo (a destra).
Osservazione 6 giorni dopo l'inizio della esperienza.

Per quanto riguarda in particolare il confronto fra l'azione dei *Penicillium* e dei rispettivi filtrati i risultati qui ottenuti collimano perfettamente con quelli già segnalati (Goidanich G. e Camici L. [8] in ricerche fatte per

(6) M. BEIN, R. SIGNER e W. H. SCHOPFER, hanno dimostrato che mentre il sale sodico della Penicillina pura (150 U/cc.) non ha alcuna azione sull'accrescimento dell'apice radicale di Zea mays, tale proprietà è posseduta dalla Penicillina commerciale perchè contiene tracce di eteroauxina (acido β-indolacetico). Gli AA. concludono che « Bei wissenschaftlichen Versuchen mit Handelspenicillin scheint uns deshalb eine gewisse Gefahr in der Tendenz zu liegen, beobachtete biologische Einflüsse ohne weiteres der Wirkung des Penicillins zuzuschreiben ».

(7) Con nostre esperienze abbiamo visto che il trattamento con acido β-indolacetico, usato in percentuali diverse (1/1000; 1/10.000; 1/100.000) produce un lieve approfondimento del periderma cicatriziale ed un maggior sviluppo ipertrofico ed iperplastico degli elementi del meristema secondario, determinando una leggera intumescenza.

(8) G. GOIDANICH e L. CAMICI, *I microrganismi in rapporto ai fenomeni di cicatrizzazione*. « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », XXIV, fasc. 1 (1948).

indagare l'intimo meccanismo con cui avviene il processo di cicatrizzazione nei tessuti vegetali.

I fatti allora osservati vennero così commentati: « La spiegazione del fenomeno ci viene offerta dal meccanismo con cui procede il processo cicatriziale: secondo la nostra interpretazione il fatto riparativo è composto di due fasi ben distinte: una, che chiamiamo « lipocuromatosi », è data dall'instaurarsi, sulla soglia del trauma, di una barriera impermeabile, costituita essenzialmente da sostanze lipidiche e la cui funzione è quella di isolare i tessuti sottostanti dall'azione esercitata dall'ambiente esterno; l'altra che si realizza più in profondità consiste nella meristemizzazione di elementi cellulari che portano alla formazione del periderma ».

Fig. 5. – Osteomielite cronica diffusa alla tibia destra. Il paziente dopo il trattamento chirurgico e 1.080.000 U. O. di penicillina parenterale, fu trattato con penicillina cruda dopo esame culturale che rivelava costante presenza di Stafilo- cocco aureo. La fotografia è stata presa all'inizio del trattamento con p. c.

A tale commento non possiamo ora aggiungere altro che ci sembra una presumibile ipotesi quella che fatti analoghi si verifichino anche nel tessuto animale: s'intende con diverse manifestazioni morfologiche in relazione alla diversa organizzazione istologica e relativi rapporti fisiologici nei due tipi di organismi (9). E che, quindi, ammesso – e, meglio, constatato –, ciò, il « saggio della patata » potrebbe essere assunto come un prezioso elemento di giudizio delle qualità degli estratti grezzi di culture di antibiotici in vista di una loro utilizzazione nella terapia di lesioni provocate da fatti infettivi.

(9) Cfr. G. GOIDANICH e I. GOIDANICH, *Similitudini funzionali e morfologiche fra rigenerazioni traumatiche di tessuti animali e vegetali.* (In corso di stampa).

In rapporto alle esperienze di laboratorio è interessante mettere i risultati di applicazioni fatte – sempre in via sperimentale, ma con sistemi e criteri di ordine pratico – con estratti « crudi » di *Penicillium notatum* nella terapia di ferite settiche conseguenti ad interventi operatori in processi infettivi del corpo umano. A tali applicazioni era giunto uno di noi (Goidanich I., in collaborazione con Picchio A. 1947) in seguito alle recenti indicazioni di diversi autori confermanti da una parte la atossicità (connessa anzi ad un notevole potere antibiotico) e dall'altra un potere stimolante dei processi cicatriziali nei filtrati in parola [10].

In particolare vogliamo qui ricordare, dati gli stretti rapporti che hanno con le nostre, le esperienze compiute da:

Fig. 6. – Lo stesso caso illustrato in fig. 5, fotografato 3 mesi dopo. Il paziente ebbe un mese di trattamento con penicillina cruda e 2 mesi di gesso chiuso.

Reggianini e Brillanti [11] sull'atossicità dei filtrati crudi di *Penicillium notatum* in conigli iniettati endovena.

Babudieri [12] per la terapia vivicillinica, consistente nel fare agire sospensioni viventi di *Penicillium notatum*, in base alle quali è apparso come non sia da escludersi la possibilità che la vivicillina agisca anche indirettamente stimolando le proprietà difensive dell'organismo.

(10) Per la bibliografia ragionata relativa a questo argomento rimandiamo a I. F. GOIDANICH e A. A. PICCHIO, *Sui filtrati sterili di « Penicillium notatum »*, « Minerva chirurgica », anno III, n. 2 (1948).

(11) O. REGGIANINI e F. BRILLANTI, *Prove biologiche sull'azione della Penicillina cruda.* « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », XXIII, fasc. 1–2 (1947).

(12) B. BABUDIERI, *La terapia vivicillinica.* « Atti del Convegno dei Medici Giuliani », 1946.

Provenzale – riportate da Babudieri [13] e dallo stesso confermate – indicanti un aumento della leucocitosi in seguito al trattamento penicillinico e vivicillinico.

Scanga [14], sull'uso di *Penicillium notatum in toto* (liquidi non filtrati, contenenti ife viventi del fungo) in cui ha rilevato che « il processo di granulazione viene comunemente favorito ed accelerato nell'ambiente sterile che la penicillina crea e mantiene; pertanto il tempo di cicatrizzazione risulta notevolmente ridotto ».

Ortolani [15] che, con osservazioni cliniche, confermò nei filtrati crudi di *Penicillium notatum* « la proprietà di favorire lo sviluppo dei normali processi di cicatrizzazione ».

L'applicazione delle soluzioni di penicillina cruda nelle nostre esperienze è stata fatta imbevendone falde di garza e ponendole sulla zona infetta previamente ripulita dai detriti, da secrezioni, da granulazioni torpide, e ricoperta da tulle chirurgico.

Nei processi profondi si inietta la soluzione sia arrivando con l'ago in profondità, sia servendosi di drenaggi tubolari. Nei processi infiammatori suppurativi chiusi si aspira il pus e si inietta la brodo–cultura in cavità.

Tralasciando la descrizione particolareggiata – riservata ad altra sede – della casistica, della metodologia seguìta nelle applicazioni abbinate con la sulfamido–terapia e con la penicillino–terapia parenterale, segnaliamo che nell'alta percentuale degli esiti favorevoli (40 casi suddivisi in forme suppurative–necrotiche superficiali, e forme suppurative–profonde ossee) abbiamo nella Penicillina cruda un'azione superiore a quella del prodotto salino. E ciò è attribuibile appunto con ogni verosimiglianza agli effetti stimolanti dei metaboliti non penicillinici esistenti nel filtrato, sugli elementi cellulari di rigenerazione.

Le vie con cui tale stimolazione si realizza non sono chiarite nei particolari: può essere un'azione diretta sui componenti dei complessi istologici revivescenti; può essere che avvenga indirettamente eccitando la funzione protettiva degli elementi superficiali in cui – bloccata la sepsi – si ristabiliscono i processi biochimici cui è deputata una specifica attività sul decorso della normale cicatrizzazione.

I risultati delle esperienze sui meristemi secondari del tubero di patata sarebbero indicativi in tale ultimo senso ed in accordo sarebbero le osservazioni di Provenzale e di Babudieri sulla eccitazione della leucocitosi.

Partendo da questa base ci proponiamo di proseguire le ricerche di cui è evidente il notevole significato non soltanto in rapporto al campo specifico della penicillino–terapia bensì a quello assai più vasto della fisiologia generale.

(13) B. Babudieri, *La Vivicillina*. « Rendiconti dell'Istituto Superiore di Sanità », III, pp. 331–341 (1945).

(14) F. Scanga, *L'uso del liquido di cultura di « Penicillium notatum in toto » nel trattamento locale*. « Rendiconti dell'Istituto Superiore di Sanità », X, pp. 187–197. (1934)

(15) P. Ortolani, *La penicillina cruda stabilizzata in alcune malattie chirurgiche*. « Rass. Int. Clin. Terap. », XXVII, nn. 1–2 (1947).

Citogenetica. — *Sull'azione mutagenica dell'azoto-iprite (Ny)* (*). Nota di E. BATTAGLIA, presentata (**) dal Socio A. CHIARUGI.

Dopo la scoperta degli effetti citologici della colchicina, quest'ultimo decennio è stato caratterizzato da una ricerca addirittura febbrile sull'azione citologica delle più svariate sostanze chimiche. Tali indagini, accertato l'effetto insignificante di numerose di esse, scoperto in altre un effetto C-mitotico talvolta notevole ma pur sempre inferiore a quello della colchicina, hanno recentemente ricevuto un impulso notevole dalla scoperta delle capacità mutageniche del gas mostarda (iprite e derivati) (1) (2) (3). In tali ricerche l'ostacolo sperimentale più importante è rappresentato dalla difficoltà di maneggiare il materiale in ambiente contenente vapori tossici (vescicatori) e naturalmente dall'impossibilità a realizzare dosaggi facilmente misurabili e costanti. Desiderando lavorare su questo attraente argomento di studio, ricercai se esistevano sostanze del tipo dell'iprite ma solubili e quindi facilmente dosabili. Il prof. R. de Fazi, Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica dell'Università di Pisa mi segnalò l'esistenza dell'azoto-iprite (triclorotrietilammina) e m'indicò inoltre il prof. A. Contardi, Direttore dell'Istituto di Chimica Agraria della Università di Milano, come l'unico studioso italiano che recentemente aveva lavorato su tale composto e verosimilmente ne disponeva di quantità apprezzabili (4). Il prof. Contardi, che sentitamente ringrazio, esaudì assai cortesemente la mia richiesta e mi fornì un'abbondante quantità di cloridrato di azotoiprite.

Questa sostanza possiede azione vescicante per contatto per cui le esperienze richiesero un'adeguata protezione dell'operatore. Essa è altamente solubile; la sua stabilità in acqua non è nota: tuttavia ho osservato che misurando il pH dopo qualche tempo tale valore si abbassa e quindi verosimilmente il sale si idrolizza. Ricordando che dalle ricerche del prof. Contardi risulta che il cloridrato di diclorodietiletanolammina è un composto stabile ed ugualmente vescicatorio come l'azotoiprite, è verosimile supporre che il cloridrato di azotoiprite si trasformi col tempo proprio in questa sostanza secondo il seguente schema:

(*) Centro di Studio per la Citogenetica Vegetale del C. N. R., lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Pisa, diretto dal prof. ALBERTO CHIARUGI.

(**) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) C. AUERBACH, and J. M. ROBSON, *Tests of chemical substances for mutagenic action*, « Proc. Roy. Soc. Edinburgh », B, *62*, 284-291 (1947).

(2) C. AUERBACH, J. M. ROBSON and J. G. CARR, *The chemical production of mutations*, « Science », *105*, 243-247 (1947).

(3) C. D. DARLINGTON and P. C. KOLLER, *The chemical breakage of chromosomes*, « Heredity », *1*, 187-221 (1947).

(4) A. CONTARDI e E. DUMONTEL, *Contributo allo studio della β β'β'' triclorotrietilammina (Azotoyprite-Ny)*. « La Chimica e l'Industria », *29*, 169 (1947).

Materiale e tecnica. – Bulbi di *Allium Cepa* L. della varietà comune giallastra furono ripuliti dalle scaglie esterne e dai residui delle radici disseccate e messi a germinare in acqua di fonte. Dopo qualche giorno, allorquando le radici novelle raggiungevano circa cm. 2 di lunghezza, i bulbi germinanti furono trasferiti in due serie opportune di bevute ciascuna della capacità di circa cc. 100. La prima serie di bevute conteneva soluzioni progressivamente meno concentrate di cloridrato di Ny disciolta in acqua di fonte, la seconda serie soluzioni identiche ma in acqua distillata. Le concentrazioni si estendevano dall'1 % al 0,5 %, quindi allo 0,25 %, e così via di seguito, riducendo sempre a metà la concentrazione precedente (per diluizione con un egual volume di acqua) fino alla concentrazione 0,0009 %; un totale cioè di 11 soluzioni (per ciascuna serie) ognuna progressivamente diluita a metà a partire dalla prima. Sperimentalmente l'accorgimento di diluire a metà una data concentrazione una volta accertata come attiva, veniva ripetuto tante volte fino ad ottenere una soluzione assolutamente inattiva sui bulbi immersi in essa per 48 ore consecutive. Partendo dalla concentrazione dell'1 %, dimostratasi violentemente letale (come le concentrazioni superiori delle quali è inutile parlare, avendo identità d'azione), si dovette discendere fino alla concentrazione dello 0,0009 % per realizzare una soluzione totalmente inattiva sulle radici immerse in essa per 48 ore. A questo proposito è necessario ricordare che le esperienze furono condotte fra aprile e maggio, in ambiente con temperatura media di 20°, e oscillazione fra 14° e 22°, e con bulbi piuttosto torpidi a germinare a causa della stagione inoltrata. Trattandosi di valori limiti dedotti con un teste biologico, l'età di quest'ultimo e l'epoca della sua germinazione sono indubbiamente elementi che influiscono su tali valori. Per quanto riguarda il materiale da me usato si può dire che esso si trovava in condizioni di torpidità germinativa, e quindi con ogni probabilità i valori limiti si abbasserebbero sperimentando con bulbi più giovani ed in epoca più opportuna. Inoltre fu osservata anche l'esistenza di notevoli variazioni individuali: infatti per una stessa concentrazione l'intensità dei fenomeni citologici, dei quali dirò più oltre, poteva variare assai ed in modo particolarmente evidente scendendo verso le diluizioni vicine ai valori limite. Per questa ragione si poteva constatare che un dato effetto citologico era presente in un bulbo e mancava invece in un altro tenuto nelle stesse condizioni; tuttavia queste variazioni (indicate nella tabella con $\pm$) non riuscirono a turbare minimamente l'andamento generale dei fenomeni provocati dalla sostanza studiata. Nel nostro caso la reattività individuale influiva praticamente soltanto sui due valori estremi della letalità da una parte e della assoluta inefficienza dall'altra. Tale fatto ci testimonia semplicemente che l'intensità dei fenomeni può essere influen-

zata da fattori individuali, cosa che è naturale che avvenga sperimentando con testi biologici.

I controlli citologici furono eseguiti prelevando gli apici radicali nelle ore diurne, fissando in toto per 30' in 2BD e procedendo colla tecnica dello striscio dopo colorazione col metodo Feulgen.

Nella tabella annessa sono riassunti i risultati ottenuti nella mia ricerca. Il segno + indica l'esistenza del fenomeno precisato all'inizio della colonna relativa, il — la sua mancanza, il segno ± la presenza di esso in alcuni bulbi e la mancanza in altri tenuti nelle stesse condizioni, i segni ++ indicano infine che il fenomeno (citologico) è presente nella quasi totalità delle cellule osservate. Su ciascun effetto è necessario dare i seguenti ulteriori ragguagli.

Concentrazione e pH. – Partendo dalla concentrazione 1 % e diluendo successivamente a metà sono state ottenute due serie identiche di 11 soluzioni progressivamente più deboli. Una serie fu ottenuta con acqua distillata (pH = 5,8) e l'altra con acqua di fonte (pH = 6,6) e di tutte le soluzioni fu misurato il relativo pH con l'aiuto di cartine indicatrici Lyphan (C. Bittmann, Basilea). I valori hanno l'approssimazione di 0,15 (in eccesso o in difetto). Data la variabilità di pH sia dell'acqua di partenza sia del cloridrato di Ny (in seguito alla sua idrolisi), esatte misurazioni col potenziometro furono considerate inutili almeno ai fini della presente ricerca. È palese la maggiore acidità delle soluzioni in acqua distillata e – come dirò – anche la maggiore tossicità di esse, ed anche una più intensa azione di agglutinazione e di frammentazione cromosomica.

Effetto letale. – Per effetto letale intendo un effetto nocivo che comporta la completa e permanente deturgescenza delle radici. La morte di queste ultime è facilmente constatabile dalla mancata ripresa di vitalità dopo trasferimento in acqua di fonte. La maggiore letalità delle soluzioni in acqua distillata è bene evidente rispetto a quella delle soluzioni in acqua di fonte. Si tenga presente che i bulbi vengono germinati in acqua di fonte per cui quando sono trasferiti in una data concentrazione, se quest'ultima è ottenuta con acqua distillata la differenza di pH viene ad essere più grande che nel caso di un trasferimento in acqua di fonte con la identica concentrazione di Ny. Da questo è ovvio la maggiore letalità. Così la letalità dopo 2 giorni non è più presente nelle concentrazioni in acqua di fonte del 0,03 % e più deboli, mentre per le concentrazioni in acqua distillata scende fino allo 0,003 %.

Fenomeni citologici. – I fenomeni citologici indotti dalla Ny comportano una intensa azione sui cromosomi nei quali vengono provocate particolarmente l'agglutinazione (stickiness) ed in minor grado la frammentazione. La loro descrizione non può essere disgiunta dalla concentrazione delle soluzioni agenti. La concentrazione 1 % è altamente letale (30'–45'). Il materiale è come « fissato » nelle sue strutture già dopo 20'. In soluzione 1 % (in acqua distillata) già dopo un'ora gli effetti provocati sono i seguenti: aspetto nucleare e nucleolare regolari, matrice cromosomica un po' liquefatta, contrazione cromosomica intensa, difetti di orientazione e di congressione, anafasi disturbate nel senso della polarità, C-mitosi mista. Quasi introvabili

TABELLA.

Ny %	pH		Effetto letale		Agglutinazione cromosomica		Frammentazione cromosomica	
	Soluzione in acqua di fonte (6,6)	Soluzione in acqua distillata (5,8)	Soluzione in acqua di fonte	Soluzione in acqua distillata	dopo 4 ore	dopo 24 ore	Soluzione in acqua di fonte	Soluzione in acqua distillata
1	2,1	1,6	+ (30′–45′)	+ (30′–45′)	—	—	—	—
0,5	2,2	1,8	+ »	+ »	—	—	—	—
0,25	2,5	1,9	+ »	+ »	±	±	—	—
0,12	3,2	2,2	+ (1 ora)	+ (45′–1 ora)	±	+	±	+
0,062	4,6	3,6	+ (4–5 ore)	+ (4–8 ore)	+	+	+	+
0,031	5,3	4,5	— (dopo 48 ore)	+ (24 ore)	+	+	+	+
0,015	5,8	4,8	— »	+ »	++	++	+	+
0,0078	6,1	5,4	— »	+ »	++	++	+	+
0,0039	6,1	5,8	— »	± »	±	+	+	+
0,0019	6,3	5,8	— »	— (dopo 48 ore)	—	±	±	+
0,0009	6,6	5,8	— »	— »	—	—	—	+

i fenomeni di agglutinazione. In soluzione 1 % (in acqua di fonte) il quadro, dopo un'ora, è un po' diverso nel senso che manca la C–mitosi mista e la quasi totalità delle mitosi è bloccata in condizioni più normali che nel caso precedente. Si può dire che l'azione fissativa della soluzione si è realizzata in modo quasi perfetto. Tanto nel primo che nel secondo caso le strutture cromosomiche sono assai evidenti (i cromatidi anafasici mostrano in genere una evidente natura doppia: i' due semi–cromatidi). Per dare un'idea dell'alta capacità di fissazione ricorderò che un apice radicale tenuto per un'ora in soluzione 1 % e quindi idrolizzando per 6' e colorato nel modo consueto, mostrò strutture perfettamente fissate e diverse dal normale soltanto per una più grande evidenziazione delle strutture cromosomiche (semi–cromatidi percettibilissimi). Soluzioni di Ny 0,5 % e più deboli fino allo 0,0009 % danno risultati citologici un po' diversi in acqua di fonte rispetto a quelli in acqua distillata. Le conseguenze provocate dalla Ny sono in genere più intense e più numerose nelle soluzioni in acqua distillata. In modo simile agisce anche il tempo, così dopo 24 ore i limiti di soglia sono spostati rispetto a quelli ottenuti dopo 4 ore, per quanto le variazioni qualitative (l'intensità) siano piuttosto deboli. Le concentrazioni 0,5 %; ;0,2 % e 0,1 % (dopo 4 ore d'azione) non mostrano effetti citologici particolari. L'azione letale e fissatrice di queste soluzioni è notevolissima e le strutture cromosomiche sono discretamente « fissate ». La contrazione cromosomica è debole, talvolta si osservano disturbi fusali, di congressione e di orientazione, ponti anafasici (agglutinazione) sono piuttosto rari e talvolta rarissimi. Anche nelle concentrazioni 0,06 % e 0,03 % (dopo 4 ore) il quadro non è molto cambiato per quanto con la concentrazione 0,03 % i fenomeni di stickiness siano abbastanza comuni. Nelle concentrazioni 0,01 % e 0,007 % (dopo 4 ore) i fenomeni di agglutinazione sono veramente imponenti. L'ipospiralizzazione è intensa, la totalità o quasi delle anafasi presenta un numero elevato di ponti con inevitabile nucleo di restituzione, numerosissime metafasi revertono in quanto i cromatidi figli per l'intensa agglutinazione non riescono a separarsi neppure alle estremità. L'agglutinazione assai spesso è attiva già in prometafase e impedisce congressione ed orientamento. Si ha la netta impressione che la quasi totalità delle divisioni abortisca trapassando in condizione tetraploide (nel caso più semplice). In bulbi in cui il quadro è meno grave ho osservato alcuni casi di « translocation bridge » di aspetto tale da escludere per essi l'agglutinazione quale causa e supporre invece l'esistenza di fusione cromatidica (reunione di estremità rotte). Fenomeni di agglutinazione assai più leggera si osservano raramente con lo 0,003 % e praticamente rarissimi con lo 0,001 % (salvo in matariale tenuto 24 ore nella soluzione).

Intenzionalmente descrivo per ultimi i fenomeni di frammentazione. La presenza di frammenti non è molto frequente, tuttavia si constata quasi sempre (dopo 4 ore, vedi tabella) e limitatamente, per quanto ho osservato, a frammenti liberi. Ho constatato che nelle soluzioni in acqua distillata essi sono ben più facili a trovarsi e quindi più numerosi che non nelle soluzioni in acqua di fonte. È evidente che l'acqua distillata, se addirittura non

provoca, per lo meno predispone i cromosomi alla rottura, rendendo più agevole la loro attaccabilità agli agenti chimici.

Conclusioni. – Riassumendo gli effetti osservati, si può dire che l'esistenza dei fenomeni di agglutinazione e di aberrazione cromosomica, sia provocati dall'azione della Ny, sia dall'agglutinazione stessa, porta a concludere che *la Ny ha un'azione sicuramente mutagenica e verosimilmente poliploidizzante*. L'esistenza di un optimum di azione ad elevate diluizioni e piuttosto lontano dalle concentrazioni letali, lascia supporre che un suo uso nella pratica mutagenica sia efficace e assicuri al tempo stesso una abbondante progenie. La sua facile dosabilità rende inoltre costanti e sicuri i risultati ottenibili con essa. La mancanza di azione vescicante dovuta a tensione di vapore la rende inoltre infinitamente superiore e al tempo stesso più maneggevole delle sostanze consimili fino ad oggi sperimentate, per quanto conosco.

La presente Nota era ultimata quando mi è pervenuto un dato bibliografico su una ricerca analoga alla mia (ma eseguita con un derivato diverso dell'azotoyprite), i cui risultati confermano indirettamente quelli da me ottenuti e testimoniano l'attualità ed anche l'importanza dell'indagine eseguita. Si tratta degli studi condotti da Gustafsson e Mac Key [5] nel Laboratorio citogenetico di Svalof. Questi AA., agendo con opportune soluzioni acquose (non si specifica se in acqua di fonte o in acqua distillata) di cloridrato di diclorodietilmetilammina: $HCl \cdot CH_3N\ (CH_2CH_2Cl)_2$, sopra semi di orzo, hanno ottenuto in seconda generazione mutanti del tipo « viridis » e del tipo « albina ». Fu inoltre calcolato che l'effetto di una soluzione 0,01 %, applicata per 40′ su semi, ha un effetto mutagenico corrispondente a quello ottenuto con una irradiazione di raggi X di 1200 r–unità. Concludendo si può dire che la ricerca di Gustafsson e Key integra perfettamente i risultati da me raggiunti, in quanto ha realizzato sperimentalmente – sia pure con un composto affine – quelle mutazioni genetiche che l'analisi citologica mi aveva dimostrato sicuramente acquisibili con l'azotoyprite, indicandomi contemporaneamente – ciò che è particolarmente importante – i valori delle concentrazioni più opportune per ottenerle.

(5) Å. Gustafsson and J. Mac Key, *The genetical effects of mustard gas substances and neutrons*, « Hereditas », *34*, 371–386 (1948), (pubblicato il 29 maggio 1948 !).

Patologia. — *Contributo allo studio delle proprietà ottiche dell'osso umano normale.* – I. *Sull'indice di rifrazione.* Nota di A. Ascenzi, presentata (*) dal Corrisp. G. Vernoni.

Lo studio istologico dell'osso viene di solito limitato al rilievo delle strutture di osservazione più immediata cioè delle strutture di II° e III° ordine, secondo Petersen (1), e prescinde da ragguagli sulle strutture di IV ordine, cioè sulla fine strutturistica delle catene molecolari che costituiscono le fibrille collagene e la sostanza amorfa interposta, nei rapporti con i microcristalli inorganici.

Muovendo da questo rilievo che risulta evidente nei contributi di carattere istopatologico, mi sono chiesto se dallo studio accurato delle proprietà ottiche del tessuto osseo in condizioni normali fosse possibile trarre qualche dato sull'intima struttura submicroscopica, utilizzabile per meglio definire eventuali modificazioni reperibili in alcune osteopatie primitive o secondarie.

Ho elaborato pertanto – secondo questo concetto – un piano di ricerche sull'argomento, servendomi di tecniche precise debitamente controllate per ottenere e disporre dei dati più sicuri in accertamenti che possono presentare difficoltà e cause di errore.

Le ricerche che fanno argomento della presente Nota furono eseguite presso l'Istituto di Mineralogia dell'Università di Roma diretto dal professore E. Onorato, sotto la guida del dott. M. Fornaseri.

L'interesse e l'originalità dei primi risultati ottenuti mi hanno indotto a farne oggetto di tre comunicazioni preliminari. La presente Nota raccoglie le osservazioni sull'indice di rifrazione dell'osso umano normale fresco, essiccato a temperatura ambiente, decalcificato, privo della frazione minerale.

Materiale di studio. – Come materiale di studio ho scelto il tratto medio della diafisi femorale destra di 20 soggetti di età compresa tra 7 giorni ed 80 anni. In tutti i casi la morte era stata determinata da malattie acute di brevissima durata (per lo più affezioni respiratorie) tali da non indurre apprezzabili modificazioni della struttura ossea sia direttamente, sia indirettamente attraverso una prolungata degenza in letto. I frammenti, prelevati a distanza di circa 24 ore dal decesso, sono stati sezionati longitudinalmente in due metà e, previo allontanamento del midollo dal canale centrale, una metà è stata immersa in soluzione fisiologica e l'altra, dopo sgrassamento mediante lavaggio in tricloroetilene, è stata lasciata essiccare all'aria a temperatura ambiente.

Tecnica e metodica. – La determinazione dell'indice di rifrazione dell'osso fresco, dell'osso essiccato, dell'osso decalcificato e dell'osso privato della parte organica (cosidetto osso mineralizzato) è stata eseguita mediante due metodi suscettibili di mutuo controllo, quello di Schroeder van der Kolk e quello di Becke con illuminazione a luce monocromatica,

(*) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) H. Petersen, *Die Organe des Skeletsystems*, in « Handb. d. mikr. Anat. d. Menschen, herausg. v. Moellendorf », vol. 2, parte II, p. 521 (1930).

$\lambda = 5891$ Å (luce del sodio) mediante il microscopio polarizzatore. Come liquidi di confronto ho usato una serie di miscele a concentrazione variabile di olio di lavanda ($n = 1,473$) e di essenza di cannella ($n = 1,612$) i cui indici di rifrazione sono stati controllati di volta in volta con il rifrattometro di Abbe. Ogni termine della serie differiva dal precedente per 0,004. Sono stato indotto alla scelta di questi due liquidi, per la loro indifferenza chimica, la facile miscibilità, la relativamente scarsa volatilità, la bassa tensione superficiale che permette un contatto più intimo con il materiale in esame. Solo per ricerche particolari ho fatto uso di altri liquidi e di miscele diverse (bromoformio–olio di vasellina, bromonaftalina–olio di vasellina, ecc.) di cui riferirò più dettagliatamente in seguito.

Particolare cura ho usato nell'allestimento dei frammenti di osso perchè i margini fossero sottili e presentassero i requisiti di perpendicolarità indispensabili per una buona lettura. A tale scopo, su piccoli cubi di osso prelevati sia dal frammento fresco che da quello essiccato e corrispondenti per lo più al segmento anteriore della diafisi femorale, ho praticato direttamente, senza alcun trattamento preventivo, delle sezioni istologiche dirette in senso longitudinale rispetto all'asse del femore, di spessore variabile da 10 a 40 μ, a seconda dell'età dei soggetti, mediante un grosso microtomo Leitz con slitta nella base ed avanzamento automatico dell'oggetto.

Sezioni di osso fresco sono state successivamente decalcificate per immersione da 12 a 24 ore in soluzione di HCl al 3 % e quindi, dopo neutralizzazione mediante abbondante lavaggio in acqua distillata, lasciate in questa ovvero poste in soluzione fisiologica. La distruzione della sostanza organica in sezioni di osso secco è stata ottenuta mediante il metodo di Gabriel (2): ebollizione a 290° in glicerina contenente il 6 % di KOH. A mineralizzazione avvenuta – direttamente controllabile a vista perchè le sezioni dopo aver assunto colore scuro, presentano nuovamente il colorito bianco iniziale, ovvero indirettamente, tenendo presente che il processo si completa entro 5–6 min. primi – le sezioni sono state abbondantemente lavate fino a neutralizzazione con acqua distillata bollente ed essiccate in stufa a 105° per 2 ore. All'atto della determinazione dell'indice di rifrazione le sezioni di osso essiccato e quelle di osso mineralizzato sono state ridotte in piccoli frammenti ovvero cimentate in toto con le varie miscele sovracitate e lo stesso trattamento hanno subìto le sezioni di osso fresco e rispettivamente decalcificato, previo asciugamento più o meno sommario con carta bibula.

La lettura dell'indice di rifrazione è stata eseguita in corrispondenza dei margini di frattura dell'osso, evitando accuratamente di eseguire determinazioni in corrispondenza dei margini liberi e dei profili cavitari ove l'eventuale presenza di residui di sostanza organica – ciò vale soprattutto per l'osso secco – poteva recare non lievi errori di valutazione.

Discussione dei risultati. – Ho riassunto nella tabella I i valori dell'indice di rifrazione dell'osso totale secco e dell'osso sottoposto a mineralizzazione nei 20 soggetti da me presi in esame. Essi sono stati determinati a meno di un errore massimo di $\pm$ 0,002.

Se si raffrontano i valori dell'indice di rifrazione dell'osso secco con quelli fin'ora consegnati alla letteratura, si nota che, per quanto si riferisce ai soggetti di età compresa fra 3 e 56 anni, corrispondono ai dati riferiti da Taylor e Sheard (3) che con il metodo di Becke hanno misurato $n = 1,561$. Non sembrano invece paragonabili con quelli di Dallemagne e Mélon (4)

(2) S. Gabriel, *Chem. Unt. ueb. die Mineralstoffe der Knochen und Zähne.* « Hoppe–Seylers Zeitschr. f. Physiol. Chem. », *18*, 257 (1894).

(3) N. W. Taylor e Ch. Sheard, *Microscopic and X ray investigation on the calcification of tissue.* « Proc. Soc. Exp. Biol. & Med. », *26*, 257 (1928). Riassunto in « Ber. wiss. Biol. », *10*, 770 (1929).

(4) M. J. Dallemagne e J. Mélon. – *Le poids spécifique et l'indice de réfraction de l'os, de l'émail, de la dentine et du cément.* « Bull. Soc. Chim. Biol. », *27*, 85 (1945).

che dànno come valore dell'indice di rifrazione del femore di bovini essiccato all'aria a temperatura ambiente 1,574. Senza voler disconoscere la possibilità di eventuali differenze dell'indice di rifrazione in rapporto a diversità di specie animale, ritengo opportuno notare che da alcune determinazioni di saggio da me eseguite sull'indice di rifrazione di femore secco di bue, usando la stessa metodica che per il materiale umano, risulta che questo corrisponde a 1,562 ± 0,002; quindi sarebbe praticamente uguale a quello misurato nell'uomo.

Tabella I

N. d'ordine	Iniziali	Sesso	Età	n_t indice di rifrazione osso secco	n_m indice di rifrazione osso mineralizzato
1	U. F.	♂	7 g.	1,549	1,597
2	F. A. M.	♀	1 m.	1,550	1,599
3	F. M.	♂	1 a.	1,553	1,599
4	N. G.	♀	3 a.	1,559	1,599
5	M. N.	♂	5 a.	1,560	1,598
6	B. E.	♂	5 a.	1,557	1,601
7	P. A.	♂	7 a.	1,560	1,596
8	F. M. T.	♀	7 a.	1,560	1,601
9	P. E.	♂	11 a.	1,559	1,602
10	S. L.	♀	14 a.	1,557	1,599
11	D. C.	♂	18 a.	1,557	1,598
12	C. A.	♂	25 a.	1,562	1,597
13	S. G.	♂	32 a.	1,560	1,597
14	T. L.	♀	35 a.	1,559	1,597
15	R. A.	♂	48 a.	1,560	1,600
16	L. G. B.	♂	51 a.	1,560	1,599
17	R. M.	♀	54 a.	1,562	1,599
18	C. E.	♂	56 a.	1,560	1,600
19	T. A.	♂	67 a.	1,564	1,601
20	A. A.	♂	80 a.	1,564	1,601

g = giorni; m = mesi; a = anni

Se si considera il comportamento dell'indice di rifrazione dell'osso al variare dell'età si rileva immediatamente che da valori relativamente bassi

alla nascita (1,549 in un bambino di 7 giorni) questo sale rapidamente entro i primi 3–4 anni, raggiungendo valori che si mantengono poi praticamente costanti fino a tutta la sesta decade, cioè intorno a 1,560. Nei soggetti di età più avanzata, si determina un ulteriore innalzamento dell'indice di rifrazione che misura 1,564.

Un siffatto andamento in funzione dell'età trova verosimilmente la sua spiegazione in parte nelle corrispondenti variazioni del contenuto percentuale in sostanza minerale che non è costante, ma subisce notevole incremento specie nei primi anni di vita, in parte nella riduzione progressiva del contenuto idrico dell'osso. Quest'ultimo fattore è quello che, con ogni verosimiglianza, concorre in maniera fondamentale, se non esclusiva, all'aumento dell'indice di rifrazione dell'osso nel vecchio.

A differenza dell'osso totale, l'osso privo della sostanza organica presenta un'indice di rifrazione molto più elevato e pressochè costante in tutte le età che si aggira intorno ad 1,600.

Giova subito rilevare, al fine di non incorrere in errori d'interpretazione che i valori riportati nella tabella I sono stati ottenuti facendo uso di miscele di olio di lavanda e di essenza di cannella. Questa precisazione è indispensabile, avendo potuto constatare come, a differenza di quanto si verifica per l'osso totale, i valori ottenuti per l'indice di rifrazione dell'osso privato della sostanza organica variano sensibilmente a seconda del tipo di liquidi adoperati. Così, ad esempio, se si fa uso del bromoformio ($n = 1{,}596$) si osserva che il valore corrispondente dell'indice di rifrazione dell'osso mineralizzato è di gran lunga inferiore a quello di questo liquido e, volendo precisarlo accuratamente con miscele di bromoformio ed olio di vasellina ($n = 1{,}475$); si osserva che esso corrisponde a $1{,}580 \pm 0{,}003$. Invece con miscele di olio di vasellina e bromonaftalina ($n = 1{,}659$) si ottengono valori dell'indice di rifrazione intorno a 1,590.

Un fenomeno del genere, cioè modificazione del valore dell'indice di rifrazione al variare della natura dei liquidi di confronto, è da attribuire verosimilmente a fenomeni di capillarità tra osso mineralizzato ed i liquidi medesimi. È noto infatti che il contatto fra una sostanza solida ed un liquido dipende sia dalle dimenzioni dei pori del solido, sia dalla tensione superficiale del liquido rispetto alla sostanza bagnata. Nel caso particolare dell'osso privo della sostanza organica ho avuto una prova diretta dell'importanza delle condizioni fisiche di questo, osservando che il fenomeno accennato non si verifica qualora si sostituisca l'osso mineralizzato con frammenti di vetro di Jena ad indice di rifrazione noto, intorno a 1,600. D'altra parte la funzione della tensione superficiale è palese qualora si pensi al valore relativamente elevato di questa per il bromoformio e la bromonaftalina rispetto alle miscele oleose.

Queste considerazioni sulle particolarità ed allo stesso tempo difficoltà di tecnica incontrate nella determinazione dell'indice di rifrazione della sostanza minerale dell'osso con il metodo di Becke e quello di Schroeder van der Kolk, impongono severe cautele nella valutazione dei risultati. Dei

valori ottenuti con i vari tipi di miscele di confronto credo poter affermare – in base alle considerazioni sulla tensione superficiale – che i più attendibili sono quelli determinati mediante le miscele olio lavanda – essenza di cannella. Non credo invece che si possano accettare senza riserve i risultati delle osservazioni di Dallemagne e Mélon i quali dànno come valore dell'indice di rifrazione della sostanza minerale dell'osso di bue $n = 1{,}590$, cifra non corredata da errore probabile ed esente da riferimenti sui liquidi o miscele di liquidi comparatori. Ne consegue anche che le deduzioni enunciate dagli AA. sulla natura della sostanza minerale ossea sono, da questo punto di vista, discutibili.

Passando ora a considerare la determinazione dell'indice di rifrazione dell'osso totale fresco, cioè appena estratto dal cadavere ovvero tenuto in soluzione fisiologica per il breve spazio di tempo richiesto dalle manipolazioni tecniche e quindi nello stato di idratazione ottimale, e l'indice di rifrazione dell'osso decalcificato e conservato in soluzione fisiologica o acqua distillata, debbo subito premettere che il metodo di Becke e quello di Schroeder van der Kolk – che poi sono gli unici fin'ora applicabili a questo tipo di ricerche – non permettono risultati conclusivi molto attendibili. Ciò è dovuto principalmente al fatto che non è possibile determinare esattamente il grado limite di asciugamento dei margini dei frammenti in modo che essi soddisfino al duplice requisito di mantenere all'interno lo stato di massima imbibizione e di essere all'esterno completamente esenti da traccie di acqua, permettendo il contatto più perfetto con la serie dei liquidi di confronto. Credo opportuno riferire che, controllando le variazioni del peso e dei ritardi di alcuni frammenti lasciati essiccare all'aria, previo asciugamento con carta bibula, mi sono accertato come dopo 5 minuti primi il contenuto idrico comincia a diminuire per ridursi, nel corso di qualche ora del 30 %.

La determinazione dell'indice di rifrazione è stata eseguita facendo uso di liquidi puri o di miscele non mescolabili con l'acqua: alcool isobutilico, alcool butilico, alcool exilico, olio di ruta, mentene, olio di lavanda, essenza di cannella, ecc. Ad evitare eventuali errori di misura determinati dall'azione disidratante, benchè minima, di alcuni liquidi come ad esempio l'alcool isobutilico, l'alcool butilico, ecc., ho ricorso ai seguenti accorgimenti: 1° Saturazione dei liquidi con acqua; 2° Lettura immediata, seguìta da ripetuti controlli a distanza di tempo onde accertare l'invariabilità dei risultati.

Le osservazioni possono venire così riassunte:

a) *Osso decalcificato.* – L'indice di rifrazione è sicuramente superiore a valori che si aggirano intorno a 1,410 e inferiore a 1,480. I liquidi con indice di rifrazione compresi tra questi due limiti estremi dànno risultati ambigui, variabili da frammento a frammento e perfino lungo un margine dello stesso frammento e pertanto non attendibili.

Tali risultati valgono sia nel caso in cui i frammenti di osso decalcificato sono tenuti in acqua distillata che nel caso in cui sono immersi in soluzione fisiologica e corrispondono all'optimum d'imbibizione.

b) *Osso totale fresco.* – Anche praticando un'essicazione molto sommaria dei frammenti ho potuto convincermi che l'indice di rifrazione non scende al di sotto di 1,540.

I risultati riferiti sia per l'osso decalcificato che per l'osso totale fresco riguardano soltanto soggetti adulti di età media. Data l'incertezza e l'approssimazione dei valori non ho creduto opportuno procedere ad una ricerca sistematica su tutti i casi raccolti nella tabella I.

Certamente questi dati non sono in armonia con quelli di Dallemagne e Mélon, unici della letteratura, secondo i quali l'indice di rifrazione dell'osso totale fresco di bue sarebbe 1,481 e l'indice di rifrazione dell'osso decalcificato 1,380. Tali risultati contrastano con quelli da me ottenuti oltre che per la disparità dei valori per se stessi, per il carattere di assolutezza con il quale vengono riferiti, non essendo corredati da errore probabile.

Per quanto non sia a conoscenza del lavoro originale di Dallemagne e Mélon, ancora in istampa, ma dei soli risultati – che vengono anticipati come tali in una precedente comunicazione [5] su argomenti affini – e quindi non sia a conoscenza degli eventuali accorgimenti di tecnica usati dagli AA., credo opportuno fare la seguente considerazione a proposito dell'indice di rifrazione dell'osso totale fresco.

Il valore che Dallemagne e Mélon trovano per il bue ($n = 1{,}481$), ritengo non possa accettarsi neppure in via teorica per l'osso umano. Infatti – qualora si ammetta la concezione degli AA. belgi cioè che la differenza tra indice di rifrazione dell'osso totale essiccato all'aria e dell'osso totale fresco dipende dalla quantità di acqua d'imbibizione e che l'osso secco può riacquistare le proprietà ottiche dell'osso fresco previa, adeguata immersione in soluzione fisiologica, – anche facendo l'assurda ipotesi che l'osso essiccato all'aria perda tutta l'acqua d'imbibizione, – sarebbe necessario perchè l'indice di rifrazione scendesse da valori medi per l'adulto di 1,560 a 1,481, che l'assunzione d'acqua fosse del 35 %. Cifra questa che supera nettamente il valore del contenuto di acqua dello scheletro che si aggira intorno al 20–27 % (Rondoni [6].

D'altra parte considerazioni analoghe per l'osso di bue ($n_i = 1{,}574$ sec. d'Allemagne e Mélon) porterebbero a calcolare un contenuto idrico pari al 38,6 % che contrasta apertamente con le determinazioni sperimentali degli stessi AA., i quali dànno come volume percentuale d'acqua d'imbibizione 27,6.

Riassumo brevemente il contenuto della presente Nota nelle seguenti proposizioni conclusive:

1° *L'indice di rifrazione* (n_i) *dell'osso umano normale* (*tratto anteriore del terzo medio della diafisi femorale destra*) *essiccato all'aria a temperatura*

(5) M. J. Dallemagne e J. Melon, *Nouvelles recherches relatives aux propriétés optiques de l'os; la biréfringence de l'os minéralisé; relations entre les fractions organiques et inorganiques de l'os.* « J. of the Washington Acad. of. Sc. », *36*, 181 (1946).

(6) P. Rondoni, *Biochimica*, U. T. E. T., 1945.

ambiente è pressochè costante nei soggetti di età compresa fra 3 e 60 anni e si aggira intorno a 1,560 ± 0,002.

2° *Dalla nascita fino a 3 anni l'indice di rifrazione aumenta progressivamente da 1,549 a 1,560.*

3° *Nel sesto e nel settimo decennio l'indice di rifrazione presenta un lieve, ma sensibile aumento: 1,564 ± 0,002.*

4° *I valori ottenuti per l'indice di rifrazione dell'osso privato della parte organica* (n_m) *variano a seconda della natura dei liquidi di confronto. Usando miscele di olio di lavanda ed essenza di cannella che, con ogni verosimiglianza, dànno risultati che maggiormente corrispondono ai valori reali, si ha* n_m *intorno a 1,600 ± 0,002, pressochè costante in tutte le età.*

5° *Le difficoltà tecniche che si incontrano nella determinazione esatta dell'indice di rifrazione dell'osso decalcificato impongono le maggiori cautele nel controllo dei risultati ottenuti e nel valutare il significato di eventuali differenze. In quanto all'indice di rifrazione dell'osso fresco è probabile che, nell'adulto, non sia inferiore a 1,540.*

Biologia (Microbiologia). — *Sintesi di amide nicotinica da parte dei micobatteri* (*). Nota di F. Di Raimondo e V. Ortali, presentata (**) dal Socio V. Puntoni.

I micobatteri, come molti schizomiceti, sintetizzano vari fattori vitaminici del gruppo B: tali germi, infatti, possono crescere anche su terreni sintetici completamente privi di tali vitamine, purtuttavia indispensabili al loro metabolismo.

Così la riboflavina viene sintetizzata dal *M. tuberculosis* (Rohner e Roulet, 1939; Street e Reeves, 1940), e dal *M. smegmatis* (Rodgers, 1942 Mayer e Rodbart, 1946), l'acido paraminobenzoico dal *M. tuberculosis*, dal *M. stercoris* e dal *M. smegmatis* (Landy, Larkum e Oswald, 1943), la biotina dal *M. tuberculosis* (Landy e Dicken 1942), la vitamina K dal *M. tuberculosis* (Almquist, 1938) e del *M. phlei* (Wolley e Mc. Carter 1940), la vitamina B_{12} e B_{11} dal *M. tuberculosis* (Mills, Briggs, ecc. 1944), la tiamina dal *M. tuberculosis* umano, bovino e aviario, Lutz, 1947).

In un lavoro di Pope e Smith (1946) troviamo, infine, riassunte e approfondite le ricerche sulla sintesi di vitamine da parte dei micobatteri.

Questi dati possono chiarire le osservazioni fatte precedentemente da alcuni autori, tra cui quelle di Borrel, Boez e Coulton (1923), i quali descrissero sostanze specifiche, favorenti la crescita dei micobatteri, prodotte da funghi e da vari schizomiceti, quelle di Rondoni (1924), che aveva visto come, riseminando *M. tuberculosis* su terreno già coltivato con lo stesso germe e poi

(*) Le presenti ricerche si inquadrano in una serie di lavori sui micobatteri compiuti nell'Istituto Superiore di Sanità sotto la guida del prof. G. Penso.

(**) Nella seduta del 15 maggio 1948.

sterilizzato, la seconda crescita aveva un periodo di latenza minore della prima; quelle di Schmidt (1925) che, confermando i risultati di Rondoni, precisava come una parte del principio stimolante, esistente nel filtrato di vecchie culture, si perdesse con il riscaldamento a 100° C. (vitamine termolabili?).

Dall'insieme di tali ricerche risulta, quindi, che i micobatteri sono capaci di sintetizzare le vitamine loro necessarie e che la loro crescita viene facilitata dalla presenza di tali vitamine nel terreno in cui vengono seminati.

Per quanto riguarda la vitamina PP, esiste un solo lavoro: quello di Yosida (1939), il quale mise in evidenza l'attività stimolante dell'acido nicotinico sulla crescita del *M. phlei*.

Bisogna, però, sottolineare che, oltre all'acido nicotinico, vi è l'amide nicotinica – trascurata dallo Yosida – la quale, mentre possiede pressochè le stesse proprietà biochimiche dell'acido omologo (costituendo essa il gruppo attivo delle codeidrogenasi I e II), è invece più attiva sui batteri dell'acido stesso, ad eccezione del *C. diphteriae*, in cui è l'acido che ne stimola maggiormente la crescita e la tossinogenesi (Mueller, 1937).

Per l'importanza fondamentale che l'amide nicotinica – quale trasportatore di idrogeno – ha nei fenomeni di respirazione cellulare, abbiamo voluto, con le presenti ricerche, studiarne la sintesi da parte dei micobatteri, sperimentando con gli stipiti indicati nella tabella I.

Non si hanno ancora dati e idee definitivi sui procedimenti chimici attraverso cui i batteri in genere eseguono una tale sintesi. Si sa (Richardson, 1936) che l'amide nicotinica può venire sintetizzata partendo dall'adenina, dall'uracile e forse dall'ornitina (Huff e Perlzweig, 1942); non si sa ancora attraverso quale successione di sistemi i germi riescano a produrre amide nicotinica partendo dalle sostanze che trovano nei terreni sintetici.

Tecnica. – I metodi di determinazione e di dosaggio dell'amide nicotinica adatti alle nostre ricerche, sono quello microbiologico e quello chimico–colorimetrico.

Il primo è fondato sul dosaggio dell'acido lattico prodotto dal *Lactobacillus arabinosus;* l'acido lattico, in determinate condizioni, è infatti proporzionale alla concentrazione di vitamina PP presente nel terreno di cultura (Snell e Wright, 1941). Il secondo è basato sull'apprezzamento della colorazione giallo oro che il gruppo pirimidinico della nicotinamide forma in unione con bromuro di cianogeno e con una amina aromatica primaria o secondaria (Ritsert, 1939); tale reazione è stata adattata dallo stesso Ritsert alla misura fotometrica.

Per ragioni di semplicità abbiamo scartato il primo metodo, servendoci della tecnica chimico–colorimetrica, che ci è parsa la più pratica.

Ecco in breve la tecnica seguìta:

I. *Modalità di semina.* – I micobatteri vengono coltivati in matracci da 100 cm^3 contenenti 40 cm^3 di terreno sintetico di Sauton.

Si deve aver cura di rispettare il rapporto volume/superficie avendo constatato – come vedremo più oltre – una notevole variabilità della produzione di amide nicotinica in funzione del variare di tale rapporto.

Tabella I.

Produzione di amide nicotinica in 5ª e 10ª giornata di sviluppo.

Ceppo	γ di amide nicotinica per cm³ di filtrato colturale			
	5ª giornata	sviluppo	sviluppo	10ª gior.
Micobatteri isolati da lesioni lebbrose:				
Barry	non determinabile	scarso	2,50	buono
Brinkerloff	»	»	3	»
Duval	2,30	buono	4,30	»
Elly	2,20	»	3	»
Kraus	non determinabile	scarso	4	»
Ceppi coltivabili anche a 50°				
A) *A pigmentati*:				
Karlinsky	4,70	buono	11	buono
Korn	6,50	»	9	»
Mayeranne	3,95	»	3,35	»
Rabinowitsch	8,2	»	6,6	»
Stercoris 3820	2,5	»	5,5	»
B) *A pigmento giallo; « Mycobacterium Phlei »*:				
Fleol	3,50	»	2,60	»
Moeller	1,20	»	4,30	»
525	2,60	»	2,60	»
Timoteo	5,50	»	4,20	»
C) *A pigmento rosso*:				
Grassberger	2,75	»	2,46	»
Grustern	4,28	»	2,35	»
Istisan I.	5,76	»	3,78	»
« Mycobacterium Enteridis »	2,36	»	3,50	»
Boquet-Lebailli	1,60	»	2	»
Cumming's	3,26	»	2,99	»
Muris	3,70	»	1,02	»
« Mycobacterium tuberculosis » var. Aviaria:				
Aviario cow 18	4,70	»	3,90	»
Aviario cow 75	3,77	»	3,80	»
Aviario goring	5,44	»	2,10	»

Le semine vengono fatte prelevando il germe da una cultura in terreno liquido di Sauton e coltivando a 38° C.

II. *Allestimento del campione.* – Il filtrato della cultura va esattamente misurato; conoscendo il volume di terreno presente al momento della semina, si potrà più facilmente risalire al contenuto unitario di nicotinamide, espressa in gamma per cm^3 di filtrato.

III. *Depigmentazione.* – La presenza del pigmento batterico, generalmente giallo arancione, disturba grandemente la determinazione, per cui è necessario allontanarlo; ciò si fa riscaldando per 60–70 minuti a bagno maria a 55°–60° C, dopo aver aggiunto una punta di spatola di carbone animale attivo, e agitando sempre con cura.

Si filtra di nuovo, ripetendo l'operazione fino a completo scolorimento del liquido in esame, che deve essere anche perfettamente limpido.

IV. *Reattivi occorrenti:* Alcool etilico a 95°. – Bromuro di cianogeno preparato aggiungendo KCN 10 % ed acqua di bromo satura.

Anilina, soluzione alcoolica, 4 %.

Soluzione idro–alcoolica di nicotinamide, contenente non più di 0,1 mg/cm^3.

Oltre la vetreria di uso corrente, occorrono provette da cm^3 20, a tappo smerigliato, per evitare l'evaporazione del bromuro di cianogeno, tossico e molto volatile.

V. *Procedimento di dosaggio.* – A cm^3 2 di filtrato si aggiungono cm^3 1 di alcool a 95° e, dopo aver sbattuto per almeno 1′, cm^3 6 esatti di bromuro di cianogeno (operando sotto cappa): si sbatte per altri 2′ e si aggiunge cm^3 1 di anilina, sbattendo ancora per 1′. Dopo 20′ si esegue la lettura al colorimetro di Dubosque, confrontando con la soluzione di nicotinamide a titolo noto; si preparano in genere un paio di soluzioni a titolo oscillante attorno al presumibile tenore degli estratti in vitamina PP. Noi, in genere, confrontavamo il colore formatosi nel filtrato in esame con quello dato rispettivamente da 10 e 20 γ di nicotinamide. Con un semplice calcolo di proporzioni si può risalire al contenuto in vitamina del filtrato di partenza e, conoscendo la quantità del terreno, al tenore reale di nicotinamide sintetizzata dal germe e diffusasi nel liquido culturale.

Risultati sperimentali. – Nella tabella I riportiamo i risultati riguardanti la sintesi dell'amide nicotinica da parte di 24 ceppi e limitatamente alla 5ª e 10ª giornata di sviluppo.

Da tali ricerche risulta come la produzione di amide nicotinica sia in rapporto al maggiore o minore sviluppo delle culture: se lo sviluppo è scarso, scarsa sarà l'amide, se lo sviluppo è buono, l'amide nicotinica sarà più abbondante.

Risulta altresì che molto spesso il quantitativo di amide presente in 5ª giornata è superiore a quello presente in 10ª giornata. Tale fenomeno non è costante, ma frequente.

Per cercare di interpretare tale fatto, abbiamo esteso le nostre ricerche a una seconda fase, cercando di studiare la produzione dell'amide nicotinica in funzione del tempo, senza limitarci alla 5ª e 10ª giornata. Per tali ricerche

abbiamo preso in considerazione i seguenti ceppi: *Grassberger*, *Grustern*, *Istisan 1*, *Aviario Cow 18*, *Cow 75*, *Aviario Goring*, *Mycobacterium phlei* (Timoteo).

È così risultato che tali micobatteri sintetizzano l'amide nicotinica nel periodo corrispondente alla fase di latenza e alla fase di crescita logaritmica, mentre nelle successive fasi il titolo va man mano decrescendo.

Nella figura 1 riportiamo, per brevità, soltanto i risultati ottenuti con uno di questi ceppi (il Timoteo) essendo gli altri del tutto analoghi. Ma rimaneva da affrontare una ultima questione: come è noto i micobatteri crescono nel terreno da noi usato esclusivamente in superficie e per questo abbiamo voluto studiare se, variando il rapporto volume/superficie del ter-

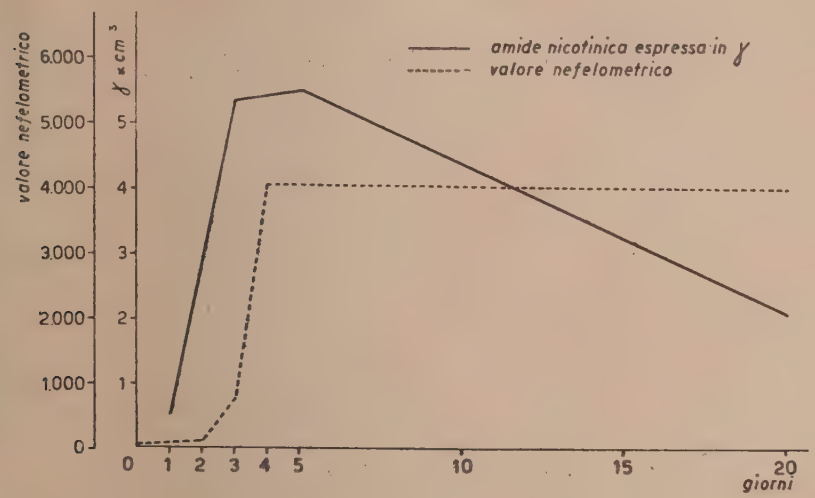


Fig. 1.

reno di cultura, si ottenesse una sensibile variazione nella produzione di amide nicotinica. A tale scopo abbiamo usato il ceppo di *Mycobatterium phlei* denominato Timoteo.

Con un banale artificio di tecnica, ossia lasciando costante la superficie di cultura e variando il volume del liquido, in modo da ottenere rapporti volume/superficie secondo la scala aritmetica dei valori, abbiamo constatato che la concentrazione dell'amide nicotinica è tanto maggiore per quanto il rapporto volume/superficie è basso; e che, invece, come era presumibile, la quantità totale di amide nicotinica è tanto maggiore per quanto è alto il rapporto volume/superficie.

Abbiamo anche controllato il peso secco delle colture, e abbiamo notato come esso, restando costante la superficie del liquido colturale, andasse aumentando con l'aumentare del volume del liquido: abbiamo osservato, inoltre, lo stabilirsi di un rapporto abbastanza preciso tra peso della coltura e quantità totale di amide nicotinica sintetizzata.

Nella tabella II riassumiamo questi risultati.

TABELLA II.

Sintesi di amide nicotinica variando il rapporto volume/superficie del mezzo di coltura.

COLTURE DI 8 GIORNI.

RAPPORTO Volume / Superficie	cm³ di liquido colturale	peso secco della coltura in mg.	amide nicotinica espressa in γ	
			totale	per cm³
2	8	76,0	105	11,31
4	17	90,0	138	8,70
6	26	155,8	226	8,70
8	36,5	191,8	313	8,60
10	42	146,8	335	7,97
12	54	175,0	390	7,22
14	56	194,8	430	7,68
16	80	192,6	629	7,86
18	82	236,8	637	8,00

Tutti i micobatteri studiati si sono dunque dimostrati capaci di sintetizzare, sia pure in grado diverso, l'amide nicotinica che si può titolare nel filtrato culturale, e la cui quantità varia tra 0,5 e 11 γ per cm³.

Questa sintesi si dimostra in funzione diretta delle fasi di latenza e di moltiplicazione logaritmica della curva di crescita. Nelle fasi successive si apprezza una notevole diminuzione dell'ammontare titolabile di amide nicotinica. Questo ultimo fenomeno ci pare interpretabile, sia come un assorbimento da parte del germe, sia come un indice della trasformazione dell'amide nicotinica in prodotti secondari del suo metabolismo, probabilmente in derivati metilati. Tale seconda ipotesi ci sembra più verosimile e ci riserviamo di indagare il fenomeno in un secondo tempo.

Sottolineiamo l'interesse della rapida sintesi dell'amide nicotinica durante la fase di latenza della curva di crescita; tale fenomeno è verosimilmente motivato dalla funzione dell'amide nicotinica quale coenezina respiratorio.

Bibliografia

1. Almquist H. I., Pentler C. F., Mecchi E., *Synthesis of the antihaemorrhagic vitamin by bacteria.* « Proc. Soc. Exptl. Biol. Med. », *38*, 336–338 (1938).
2. Borrel A., Boez L., Coulton A., *Facteurs accessoires de la croissance du Bacille tuberculeux.* « Compt. Rend. Soc. Biol. », *89*, 191, (1923).
3. Huff e Perlzweig, « J. Biol. Chem. », *142*, 401 (1942).
4. Landy M., Dicken N. W., *Biotin synthesis by microorganism.* « Proc. Soc. Exptl. Biol. Med. », *46*, 449–452 (1941).
5. Landy M., Larkum N. W., Oswald E., *Bacterial synthesis of p. aminobenzoic acid*, « Jour. Bact. », *45*, 25 (1943).
6. Lutz A., *Sur la synthèse de l'aneurine pour le bacille tuberculeux*, « Experientia », *3-6*, 244–245 (1947).
7. Mayer R. L., Rotbart M., *The production of riboflavin by Mycobacterium segmatis*, « Archives of Biochemestry «, *11–1*, 49–63 (1946).
8. Mills R. C., Priggs G. M. jr., Luckey T. D., Elvejem C. A., *Production of unidentified vitamins by a strain of « Mycobacterium tuberculosis » grown on a synthetic medium with p. aminobenzoic acid*, « Proc. Soc. Exptl. Biol. Med. », *56*, 240–242 (1944).
9. Mueller J. H., *Nicotinic acid as growth accessory for diphtheria bacillus*, « J. Biol. Chem. », *120*, 219–224 (1937); « J. Bact. », *34*, 429–441 (1937).
10. Peterson W. H., Peterson M. S., *Relation of bacteria to vitamins and other growth factors.* « Bact. Rev. », *9*, 49–109 (1945).
11. Pope H., Smith D. T., *Synthesis of B. comples vitamin by tubercle Bacille when grown on synthetic media*, « Am. Rev. Tuberc. », *44*, 559–563 (1946).
12. Richardson, *Nutrition of Staphylococcus aureus; necessity of uracil in anaerobic growth*, « Biochem. J. », *30*, 2184–2190 (1936).
13. Ritzert K., *Zur quantitativen Nicotinsaure und Nicotinsaureamid-Bestimmung im Harn, im Geweben und im Blut*, « Klin. Wochenscrift », *18*, 934–936 (1939).
14. Rodgers N. E., *The synthesis of riboflavin by microorganisms.* Ph. D. thesis. University of Wiscousin; cit. da Peterson and Peterson (1942).
15. Rohner F., Roulet F., *Flavinsynthesis durch Tuberkelbazillen*, « Biochem. Z. », *300*, 148–152 (1939).
16. Rondoni P., *Influenza di organismi e di sostanze bacillari sullo sviluppo colturale del bacillo tubercolare*, « Lo Sperimentale », *79*, 509 (1924).
17. Schmidt, *Ueber wachstumforderude Eigenschaften der Filtrate von Tuberkelbazillen*, « Kulture und andere Stoffe. Centr. f. Bakt. », I orig., *94*, 94 (1925).
18. Snell e Wright, « J. Biol. Chem. », *139*, 675 (1941).
19. Street H. R., Reeves R. E., *Occurrence of riboflavin in tubercle bacillus*, « Proc. Soc. Exptl. Biol. Med. », *44*, 641–644 (1940).
20. Wooley D. W., Mc Carter J. R., *Antihaemorragic compounds as growth factors for the Johne's bacillus*, « Proc. Soc. Exptl. Biol. Med. », *45*, 357–360 (1940).
21. Yosida, *Nicotinic acid and the coenzyme of respiration as growth-promothing substances for microrganisms*, « Hukuoka acta Medica », *32*, 1539–1548 (1939).

Biologia (Microbiologia). — *Isolamento di tre batteriofagi anti-mico-batterici.* (Nota preliminare). Nota di V. Ortali, presentata (*) dal Corrisp. V. Puntoni.

Gardner e Weiser hanno recentemente – '*Discovery of a Bacteriophage for Mycobacterium smegmatis*', « Journ. Bact. », 54, 2, 272 (1947) – isolato un batteriofago anti *Mycobacterium smegmatis*. Tale isolamento costituisce un fatto nuovo non essendo antecedentemente nota l'esistenza di batteriofagi attivi sui micobatteri.

Lavorando da tempo su questo gruppo di germi fui immediatamente attratto dal fenomeno messo in evidenza dai due autori americani e mi posi senz'altro alla ricerca di eventuali batteriofagi con azione sui micobatteri, spinto sopratutto dall'idea che tali eventuali isolamenti avrebbero potuto costituire una chiave per la diagnostica differenziale tra i micobatteri.

Partendo dal concetto che i micobatteri presenti in natura si rinvengono facilmente nel letame di stalla è qui che sono andato a ricercare i batteriofagi oltre che nelle acque di fogna.

La tecnica adottata è stata la comune tecnica per l'isolamento dei batteriofagi: il letame veniva messo in infuso con una doppia quantità d'acqua, il liquido veniva poi filtrato per carta e quindi per Seitz.

Il filtrato veniva saggiato sui micobatteri disponendone una goccia sopra una piastra di agar-germi preparato con agar glicerinato al 3%. Quindi si incubava a 37° e si leggeva a crescita avvenuta.

Con la presente tecnica sono riuscito a isolare tre batteriofagi anti-micobatterici: di questi il primo si è rivelato attivo contro il *Mycobacterium phlei* B 10, Fleol, Moeller, Timoteo, il secondo contro il *Mycobacterium lacticola friburgensis* e contro i seguenti ceppi: Brinckeroff II, Butter, D 6, Grassbacillus, Milch, Pseudoperlsucht, Rabinowitsch, Smegmatis e Stercoris, il terzo si è rivelato attivo solo per il ceppo *Pellegrino*.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica ai Colleghi la notizia della morte del Socio Carlo Perrier della Sezione di Mineralogia.

La figura e l'opera del compianto Socio – dice il Presidente – sono state brevemente ma degnamente ricordate dal prof. Bianchi nella seduta segreta della classe del giorno 7 giugno. Nella stessa seduta il prof. Bianchi ha rievocato nuovamente il compianto Socio prof. Pelloux, la cui morte era già stata annunziata alla Classe nell'adunanza del 13 marzo.

(*) Nella seduta del 9 giugno 1948.

Il Presidente conclude inviando alla memoria degli illustri Colleghi scomparsi il reverente saluto dell'Accademia.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Signorini presenta il II volume della sua opera «Meccanica razionale con elementi di statica grafica» e ne parla. Il Socio Cassinis presenta una sua Nota necrologica su «Vito Volterra» e la seconda edizione delle «Note di fotogrammetria» da lui redatte con la collaborazione di L. Solaini. Il Socio Abetti illustra il fascicolo n. 64 delle «Osservazioni e Memorie dell'Osservatorio astrofisico di Arcetri». Infine il Socio Colonnetti presenta la II edizione della sua opera «Scienza delle costruzioni» e ne parla.

L'Accademico Segretario illustra le pubblicazioni pervenute in omaggio all'Accademia mettendo in particolare rilievo i due volumi del Collega Sansone dal titolo «Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei «Rendiconti» i Soci: Maiorana, Chiarugi, Meneghetti, Silvestri, Scarpa (a mezzo del Collega Lombardi) Zagar, Bargellini, Perucca, Gola, Dal Piaz, Bianchi, Vernoni, Fano, Cecchini, Puntoni, Carnera.

L'Accademico Segretario legge l'elenco delle Note pervenute all'Accademia.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

MAJORANA Q., Sulla relatività di A. Einstein.

SILVESTRI F., Prima notizia di una specie d'Insetto Embiide a maschio alato trovato nel Comune di Roma e nuovo per l'Italia.

ANDREATTA C. – La tettonica «a vortici» nei monti della Val di Sole (pres. dal Socio G. DAL PIAZ).

ASCENZI A., Contributo allo studio delle proprietà ottiche dell'osso umano normale. Nota II. Sulla birifrangenza totale (pres. dal Corrisp. L. VERNONI).

BALDUCCI D., Studi sull'effetto della vitamina «P» e del dicumarolo sulla formazione della protrombina (pres. dal Corrisp. G. VERNONI).

BIOCCA E. e TARANTINO E., Ricerche comparative sull'azione tossica per via muscolare e per via orale del curaro della stricnina e dello iodio metilato di stricnina. Nota IV (pres. dal Corrisp. V. PUNTONI).

COLONNA M., Ricerche nella serie dei Diaza-Fenantreni: *Cation-alocromia* di chinoline e diaza-fenantren-derivati (pres. dal Socio G. BARGELLINI).

GEROLA F. M. e VANNINI E., L'importanza del pH, nella colorazione con verde di metilepironina, usata da Brachet per la localizzazione istochimica dell'acido ribonucleinico (pres. dal Socio G. GOLA).

HIEKE O., Sulla presenza di basalti limburgitici nell'Africa Orientale (pres. dal Socio A. BIANCHI).

PEISINO G., Le osservazioni delle stelle doppie con micrometri a birifrangenza e un tipo di micrometro progettato e costruito all'Osservatorio di Collurania (pres. dal Socio L. CARNERA).

VERGNANO A. M., Osservazioni meridiane di Urano effettuate nel 1946–1947 (pres. dal Socio G. CECCHINI).

VILLA M., Proprietà caratteristica delle reti omaloidiche (pres. dal Socio L. BERZOLARI).

PLICHI SUGGELLATI

L'Accademio Segretario presenta un plico suggellato contenente due Memorie depositate dall'ing. Pietro Pisa.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, dispone che il plico stesso sia conservato nell'Archivio a disposizione dell'interessato.

TEMI PER DISCUSSIONI

Il Presidente invita poi i Colleghi a proporre i temi per le discussioni scientifiche e per una conferenza pubblica da tenersi nel prossimo anno, accademico.

I temi che potrebbero essere proposti sono i seguenti: « I raggi cosmici »; « Sulle cause delle epoche glaciali »; « Sull'Antichità dell'uomo »; « Il secondo principio della termodinamica ».

Il Socio Armellini propone come tema « La teoria balistica della luce », ma il Presidente osserva che, data la delicatezza del problema stesso, si potrà eventualmente dedicare ad esso una speciale seduta, come è già avvenuto quest'anno per la discussione sulle « Teorie relativistiche », ma non farne oggetto di un convegno o di una conferenza pubblica.

Il Socio Carrelli propone come tema « I raggi cosmici », ma il Presidente risponde di aver già in animo di dedicare alla trattazione del predetto argomento il prossimo Convegno Volta.

La Classe decide infine di stabilire come tema per una discussione scientifica il seguente: « Sulle epoche glaciali » (teorie e cause).

Per quanto riguarda il tema della conferenza pubblica, il Presidente propone che esso sia scelto nel campo della fisica atomica.

Il Socio Giordani propone d'interpellare il Collega E. Amaldi per una conferenza « Sugli elementi transuranici ».

Il Presidente conclude la discussione dichiarando che per ora il tema deve considerarsi stabilito genericamente in un argomento di fisica atomica e che in un secondo tempo si provvederà a determinarlo concretamente.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 9 giugno 1948.

CASSINIS G. e SOLAINI L. — *Note di fotogrammetria.* Esposizione riassuntiva di principî, strumenti e metodi. 2ª ed. Milano, Libreria editr. Cesare Tamburini, 1946. Pp. 191, in-8°, con figg. e tavv.

— *Vito Volterra.* (Commemorazione). S.n.t. Pp. 206-208, in-8°.

COLONNETTI Gustavo. — *Scienza delle costruzioni.* 2ª ed. Torino, Giulio Einaudi, 1948. Pp. VIII-562, in-8°, con figg.

MINISTERO DEI TRASPORTI. UFFICIO STAMPA. *Le ferrovie italiane dello Stato rinascono* (La ricostruzione fino all'aprile 1948). S. n. t. Pp. 48, in-8° obl., con tavv.

OSSERVATORIO ASTROFISICO DI ARCETRI. — *Osservazioni e Memorie.* N. 64. Pavia, Mario Ponzio Tip. 1948. Pp. VIII-127, in-8°, con tavv. (Pubblicazioni dell'Università degli Studi di Firenze. Facoltà di Scienze Mat., Fis. e Nat.).

SANSONE Giovanni. — *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa.* Vol. I, 2ª ed. Vol. II. Padova, «Cedam», 1948. Pp. X-361, 564, in-8°, con figg. (università di Firenze).

SIGNORINI Antonio. — *Meccanica razionale con elementi di statica grafica.* Vol. II. Roma, Perrella, 1948. Pp 396, in-8°, con figg.

SOLAINI L. — Vedi CASSINIS G.

U. B.

ERRATA CORRIGE

Nell'indice del fasc. 2, febbraio, invece di LANDOLINO G. *leggasi*: GIULIANO L.

Nel titolo corrente delle pp. 643 e 645 invece di:

E. PERUCCA e F. DEMICHELIS, *Nuove proprietà di raddrizzatori, ecc.*

leggasi:

E. PERUCCA e L. A. RADICATI, *Sistemi isolati, leggi di forze elementari, ecc.*

A p. 706, nel titolo, invece di Corrisp. *leggasi:* Socio A. SIGNORINI.

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

ABETTI G. – Altezza della cromosfera nell'anno 1947 ed andamento del ciclo solare, *358*.

AGLIARDI N. e ROBITSCHEK R. – Cinetica della deidrogenazione del cicloesanolo su ossido di rame, *433*.

ALIBRANDI A. – Effetti della combinata applicazione di stricnina e prostigmina su un centro sensitivo-motore corticale di cani non predisposti alla epilessia da eccitamenti afferenti, *240*.

AMERIO A. – Un'esperienza sulla teoria della relatività. Nota II, *155*.

AMOROSO L. – Sul concetto di capitale circolante, *266*.

ANDREOTTI A. – Questioni di equivalenza relative alle curve riducibili e ai punti base di un fascio di curve sopra una superficie algebrica. Nota I, *551*.

— Questioni di equivalenza relative alle curve riducibili e ai punti base di un fascio di curve sopra una superficie algebrica. Nota II, *666*.

ARMELLINI G. – Osservazioni sui numeri perfetti, *9*.

— Sul problema lunare di Hill, *352*.

ASCENZI A. – Contributo allo studio delle proprietà ottiche dell'osso umano normale. – I. Sull'indice di rifrazione, *777*.

B

BACCAREDDA M., vedi NATTA G.

BALLIO A., vedi DEL PIANTO E.

BARBASETTI DI PRUN M. A. – Sulle relazioni causali di sviluppo « otocisti-cresta neurale » in trapianti embrionali negli Anfibi, *489*.

BARBIERI G. A. – Nuovi composti complessi di rutenio e di osmio, *561*.

BARGELLINI G. e DEL PIANTO E. – Sull'esaltamento dell'attività batteriostatica del 2-mercapto-benzotiazolo e dei suoi derivati da parte dei sali di Bunte (sali dei S-esteri dell'acido tiosolforico), *21*.

BATTAGLIA E. – Sull'azione mutagenetica dell'azoto-iprite (Ny), *771*.

BEER S. e SACCHETTI A. – Ricerche morfomeccaniche sul femore di « Strepsiceros strepsiceros », *461*.

BERTOLANI M. – Sulla presenza della scorodite e dell'anglesite a Monte Valerio (Campiglia Marittima), *451*.

BIANCHI G. – Sulla diffusione nel platino dell'idrogeno catodico, *206*.

— Ricerche sulla sovratensione dell'idrogeno e dell'ossigeno sul platino, *438*.

BOCCHIOTTI S., vedi LOMBROSO C.

BONINO G. B. e MARIANI E. – Su un metodo grafico di calcolo dei coefficienti osmotici di soluzioni acquose concentrate di elettroliti forti, *520*.

BONINO G. B. e ROLLA M. – Contributo allo studio delle strutture elettroniche dei chinoni e delle forme chinoidi. – I. Forme orto e para chinoidi, *25*.

— — Contributo allo studio delle strutture elettroniche dei chinoni e delle forme chinoidi. – II. Benzochinone, *273*.

C

CAIANELLO E. – Sul moto impulsivo di un sistema olonomo in presenza di vincoli unilaterali simultanei, *706*.

CALIGO D., vedi KRALL G.

CAMERINO B., vedi GALLICO E.

CAMICI L., vedi GOIDANICH G.

CANDUCCI PITONI A., vedi URBANI-MISTRUZZI L.

CAPRARO V. – La curva di assorbimento per il CO_2 del sangue di « Triton cristatus », *752*.

CAROBBI G. e MINGUZZI C. – I costituenti minori della pollucite elbana e della petalite dell'Elba e di Utö (Svezia), *653*.

CASTELLANO V. – Osservazioni preliminari su alcuni risultati del censimento della popolazione indigena dell'Eritrea, del 1939, *251*.

CASTIGLI-PITOTTI M. – Ricerche sperimentali sulle perossidasi nello sviluppo embrionale di « Petromyzon », *330*.

CASTOLDI L. – Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti. Nota II, *46*.

— Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti. Nota III, *190*.

— Sopra la derivata sostanziale di un integrale multiplo negli Spazi di Riemann, *290*.

— Attorno a un « teorema della divergenza » per tensori qualunque negli Spazi di Riemann, *395*.

— Applicazioni dei teoremi generalizzati della divergenza e di Stockes al calcolo delle derivate sostanziali di integrali multipli negli Spazi di Riemann, *398*.

— Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti, *533*.

CATTANEO C. – Su alcuni potenziali di strato e su qualche loro applicazione, *416*.

CEAS M., vedi STEFANELLI A.

CERUTI A. – Alterazioni istochimiche della « Trametes cinnabarina » sul legno e calcolo del peso delle ife nei materiali patologici, *456*.

CESARI L.– Sopra un teorema di approssimazione per le superficie continue in forma parametrica, *33*.

CHECCHIA-RISPOLI G. – « Salenia Hawkinsi », nuovo echinide del Cenomaniano della Somalia, *169*.

— Pygasteridi del Cenomaniano della Somalia, *278*.

CHELLI F. – Trapianto dell'occhio tra larve normali e larve röntgen-irradiate. (Esperienze su « Bufo vulgaris » e « Bufo viridis »), *140*.

CINQUINI S. – Sopra l'esistenza dell'estremo in campi illimitati, *675*.

CINQUINI-CIBRARIO M. – Sopra i sistemi di equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali e multiple, *682*.

COLACEVICH A. – Gli elementi orbitali di τ Persei, *201*.

COLONNETTI G. – Il problema del primato sulla invenzione della radio, *3*.

— Saggio di impostazione generale del problema delle deformazioni viscose, *515*.

CONTI R. – Estensione alle successioni di funzioni a variazione limitata di un criterio di Polya-Cantelli per la convergenza uniforme su intervalli infiniti, *61*.

CORTI A. – Il lacunoma osservato col microscopio a contrasto di fase, *132*.

— Conoscenze cellulari: apparato interno e lacunoma, *578*.

COTRONEI G. e URBANI-MISTRUZZI L. – La costituzione Zoologica degli Anfibi studiata con esperienze di parabiosi tra Anuri ed Urodeli. Nota II, *173*.

D

D'AMATO F. – Contributo al problema della agglutinazione cromosomica (« stickiness ») spontanea, *94*.

— Sull'attività colchicino-mitotica e su altri effetti citologici del 2,4-diclorofenossiacetato di sodio, *570*.

DELLA CORTE M. – Sulla distribuzione di densità negli sciami estesi, *79*.

DEL PIANTO E., vedi BARGELLINI G.

DEL PIANTO E. e BALLIO A. – Sull'attività batteriostatica del 2-mercaptobenzotiazolo e di alcuni suoi derivati, *84*.

DEMICHELIS F., vedi PERUCCA E.

DI RAIMONDO F. e ORTALI V. – Sintesi di amide nicotinica da parte dei micobatteri, *783*.

D'ORGEVAL B. – Remarques sur la rationnalité des variétés, *701*.

DULZETTO F. – Ulteriori osservazioni sulle uova e le larve di « Engraulis Russoi », *466*.

F

FICHERA G. – Sul flusso di una funzione armonica, *402*.

FRANCHETTA A. – Sulle involuzioni razionali appartenenti ad una superficie algebrica, *544*.

FRESA A. – Sulla variazione della latitudine dell'Osservatorio di Pino Torinese (I Sala meridiana) nel periodo 1943.8–1945.9, *718*.

FUMI F. – Sulla natura dei legami interleptonici entro il complesso $[SiF_6]$ nei cristalli, *565*.

G

GALLI A. – Durata limite di una perturbazione sincrona nelle costruzioni asismiche, *311*.

GALLICO E. e CAMERINO B. – L'azione dei raggi X sui catalizzatori organici e su soluzioni di bleu di metilene, *494*.

GAMBA A., vedi RADICATI L. A.

GENNA G. – Ricerche antropologiche sulla famiglia dei Medici, *589*.

GHIZZETTI A. – Sul prodotto di due variabili casuali gaussiane, *534*.

GIANNUZZI M. A. – Orbita preliminare e parallasse di ζ Aquari, *715*.

GIULIANO L. – Sulla continuità degli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni. Nota I, *39*.

— Sulla continuità degli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni. Nota II, *183*.

GOIDANICH G., CAMICI L. e GOIDANICH I. – A proposito dell'azione dei « Penicillium » e dei prodotti del loro metabolismo sull'accrescimento cellulare in tessuti normali e patologici, *762*.

GOIDANICH I., vedi GOIDANICH G.

GRASSO V. – Il rinvenimento di una nuova specie di Ustilago dell'orzo in Italia (« Ustilago nigra Tapke »), *98*.

GRIOLI G. – Precessioni regolari di un solido pesante asimmetrico, *420*.

K

KRALL G. e CALIGO D. – Moltiplicatore critico γ_{cr} di una distribuzione di carico su una volta autoportante. Nota II, *15*.

L

LABOCCETTA L. – La lunghezza termodinamica definita dal calore latente di fusione e grandezze che ne derivano, *322*.

LEVI F. – Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa. Nota I, *65*.

— Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa. Nota II, *197*.

— Sugli effetti statici dei fenomeni viscosi. Nota I, *306*.

— Sugli effetti statici dei fenomeni viscosi. Nota II, *424*.

LOMBARDO-RADICE L. – Sulle condizioni di appartenenza al radicale per gli elementi di un'algebra legata a un gruppo finito, *53*.

LOMBROSO C. e BOCCHIOTTI S. – Azione degli acidi malonico e monoiodoacetico nel processo di liposintesi durante la prolungata autolisi asettica, *102*.

M

MANACORDA T. – Vibrazioni forzate di un particolare sistema oscillante non lineare, *557*.

MANARINI M. – Sui paradossi di d'Alembert e di Brillouin nella dinamica dei fluidi, *427*.

MANUNTA C. – Sul metabolismo dell'azoto in « Bombyx mori ». – III. L'acido allantoinico durante lo sviluppo larvale nella razza bivoltina Awojiku, *117*.

— Sul metabolismo dell'azoto in « Bombyx mori ». – IV. Ricerca degli enzimi allantoicasi ed allantoinasi nei bachi da seta durante lo sviluppo larvale, *211*.

MANUNTA C. e MORITTU G. – I pigmenti carotenoidi nella dorifora delle patate (*Leptinotarsa decemlineata*), *115*.

MARCANTONI A. – Sopra alcune formule relative alla rappresentazione gaussiana della sfera sul piano, *70*.

MARCUS F. – Sopra qualche classe di superficie R, *303*.

— Sopra una proprietà caratteristica delle congruenze di rette W, *699*.

MARIANI E., vedi BONINO G. B.

MAZZI V. – Peculiari riassestamenti della sostanza cromofila con caratteri neurosecretori, nelle cellule del nucleo della radice mesencefalica del trigemino del Tritone crestato, *109*.

— Neurosecrezione e sintesi di proteine, *214*.

MINGUZZI C., vedi CAROBBI G.

MIRANDA C. – Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili, *530*.

MIROSLAW KRZYŻAŃSKI. – Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné, *408*.

MORITTU G., vedi MANUNTA C.

N

NATTA G. e BACCAREDDA M. – Sulla velocità di propagazione degli ultrasuoni nelle miscele ideali, *360*.

O

ORTALI V. – Isolamento di tre batteriofagi anti-mico-batterici. (Nota preliminare), *790*.

ORTALI V., vedi DI RAIMONDO F.

P

PACELLA G. B. – Determinazioni gravimetriche in Etiopia, *725*.

PAGNI M. – Un'osservazione sui coefficienti di Fourier delle funzioni crescenti, *672*.

PERRI T. – La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris », *585*.

PERUCCA E., DEMICHELIS F. – Nuove proprietà dei raddrizzatori a strato di sbarramento, *646*.

PERUCCA E. e RADICATI L. A. – Sistemi isolati, leggi di forze elementari principio di azione e reazione, *643*.

PIAZZOLA-BELOCH M. – Sulle proprietà topologiche dei circuiti d'ordine dispari tracciati sopra quadriche a punti iperbolici, *688*.

POMPILJ G. – Alcuni esempi di superficie algebriche a sistema canonico puro degenere, *539*.

PORRO A., vedi SANTI R.

R

RADICATI L. A., vedi PERUCCA E.

RADICATI L. A. e GAMBA A. – Su di un « nuovo metodo per misurare la velocità della luce », *735*.

RIEDEL A. – Resti di animali domestici neo-eneolitici della caverna Pocala (Aurisina) conservati nel Museo dell'Istituto Geologico dell'Università di Padova, *445*.

RIZZO C. – Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo – A) La reazione orto-clinostatica nell'adulto normale. Nota I, *104*.

— Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo – A) La reazione orto-clinostatica nell'adulto normale. Nota II, *234*.

— Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo. – A) La reazione orto-clinostatica nell'adulto normale. Nota III, *326*.

ROBITSCHEK R., vedi AGLIARDI N.

ROLLA M., vedi BONINO G. B.

ROVERETO G. – Sulla tettonica del Promontorio Circeo e sulla influenza della gravità nella orogenesi, *383*.

S

SACCHETTI A. – Il significato meccanico delle variazioni promeriche, *126*.

— Il rapporto armonico fra scarti individuali e grandezza media dei più diversi segmenti corporei. Una conferma sul « Carabus auratus », *245*.

SACCO F. – La costituzione geologica sintetica delle Alpi, *160*.

— La sinclinale di M. Antoroto-Mondolè (tra Ormea e Limone Piemonte), *167*.

— Sopra una nuova teoria sull'interno terrestre, *379*.

— I fenomeni ed i rapporti delle formazioni simiche nelle litosfere planetarie, *651*.

— Il molibdeno del Monte Bianco, *653*.

SALINI U. – Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia ad Jacobiano nullo di caratteristica uno, *692*.

SANSONE G. – L'opera scientifica di LEONIDA TONELLI, *594*.

SANTI R. e PORRO A. – Meccanismo d'azione e trasformazioni nell'organismo dell'aminotiazolo, *755*.

SCARPA O. – Tixotropia e pseudotixotropia. Nota I, *367*.

— La tixotropia delle amalgame. Nota II, *372*.

— Sul passaggio dell'idrogeno catodico attraverso sottili strati metallici, *638*.

SCHIAVINATO G. – Studi geologico-petrografici sulla regione compresa fra Ponte di Legno, Passo del Tonale e Passo di Gavia in Alta Val Camonica. – I. Scisti del Tonale, *736*.

SCHREIBER B. – Ossificazioni metaplastiche da innesto di uretere di mammifero in anfibi urodeli, *136*.

SCORZA DRAGONI G. – A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: dimostrazione nel caso dei vertici di prima categoria, *50*.

— A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: compimento della dimostrazione, *180*.

— Un contributo ulteriore ad un teorema sulle traslazioni piane generalizzate, *284*.

SEGRE A. G. – Sulla stratigrafia dell'antica cava di Saccopastore presso Roma. Nota I, *743*.

SEGRE B. – Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la determinazione di S_k appartenenti a varietà intersezioni complete di forme, *149*.

SEGRE B. – Intorno agli S_k che appartengono alle forme generali di dato ordine. Nota I, *261*.
— Intorno agli S_k che appartengono alle forme generali di dato ordine. Nota II, *341*.
— Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota I, *346*.
— Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota II, *509*.
— Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota III, *629*.
SELLI R. – Una sabbia vulcanica oligocenica nel Subappennino bolognese, *88*.
SERGI S. – Sulla morfologia della « facies anterior corporis maxillae » nei paleantropi di Saccopastore e del monte Circeo, *387*.
SIERPIŃSKI W. – Le paradoxe de Hausdorff et le paradoxe de Banach et Tarski, *270*.
— Sur un problème de M. N. Lusin, *519*.
STEFANELLI A. – L'orientamento delle fibre nervose intracentrali indagato sperimentalmente in riferimento alla fibra di Mauthner, *121*.
STEFANELLI A. e CEAS M. – La morfologia dei centri statici dei Selaci in rapporto alla forma corporea e alla differente attività natatoria, *475*.
SUCCI F. – Osservazioni della R « Coronae Borealis », *316*.

T

TORALDO DI FRANCIA G. – Sulla termodinamica della diffrazione, *319*.
— Sulla luce diffratta da innumerevoli aperture distribuite a caso su un diaframma opaco, *730*.
TROTTER A. – L'evoluzione del fiore femmineo e la maturazione del frutto nel Nocciuolo (« Corylus Avellana » L. s. l.), *659*.

U

URBANI E. – Il trattamento con colchicina e l'assunzione di ossigeno studiati sull'uovo in sviluppo di « Bufo vulgaris », *219*.
— Il trattamento con chinoni e l'assunzione di ossigeno studiati sull'uovo in sviluppo di « Bufo vulgaris » e « Bufo viridis », *480*.
URBANI–MISTRUZZI L. – Su alcuni casi di regolazione funzionale del vestibolo boccale in embrioni di « Rana esculenta » uniti in parabiosi, *469*.
URBANI–MISTRUZZI L. e CANDUCCI–PITONI A. – La vitamina C durante la vita embrionale di « Rana esculenta », *228*.
URBANI–MISTRUZZI L., vedi COTRONEI G.

V

VACCARO G. – Le superficie razionali prive di curve eccezionali di prima specie, *549*.
VILLA M. – Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. – I. Intorno del secondo ordine, *55*.
— Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. – II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci, *192*.
— Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. – III. Trasformazioni cremoniane osculatrici, *295*.
VINACCIA G. – Sulla radiazione solare ricevuta dai solidi, *75*.

Z

ZAGAR F. – Sulle parallassi radiali, *635*.
ZWIRNER G. – Alcuni teoremi di geometria infinitesimale diretta relativi alle curve spaziali. Nota I, *524*.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi. — Estensione alle successioni di funzioni a variazione limitata di un criterio di Pólya-Cantelli per la convergenza uniforme su intervalli infiniti. R. CONTI, *61*.

Analisi tensoriale. — Applicazioni dei teoremi generalizzati della divergenza e di Stockes al calcolo delle derivate sostanziali di integrali multipli negli Spazi di Riemann. L. CASTOLDI, *398*.

Antropologia. — Osservazioni preliminari su alcuni risultati del censimento della popolazione indigena dell'Eritrea, del 1939. V. CASTELLANO, *251*.

— Ricerche antropologiche sulla famiglia dei Medici. G. GENNA, *589*.

— Il significato meccanico delle variazioni promeriche. A. SACCHETTI, *126*.

— Sulla morfologia della « facies anterior corporis maxillae » nei paleantropi di Saccopastore e del monte Circeo. S. SERGI, *387*.

Astronomia. — Altezza della cromosfera nell'anno 1947 ed andamento del ciclo solare. G. ABETTI, *358*.

— Sul problema lunare di Hill. G. ARMELLINI, *352*.

— Gli elementi orbitali di τ Persei. A. COLACEVICH, *201*.

— Sulla variazione della latitudine dell'Osservatorio di Pino Torinese (I Sala meridiana) nel periodo 1943.8–1945.9. A. FRESA, *718*.

— Orbita preliminare e parallasse di ζ Aquari. M. A. GIANNUZZI, *715*.

— Osservazioni della R « Coronae Borealis ». F. SUCCI, *316*.

— Sulla radiazione solare ricevuta dai solidi. G. VINACCIA, *75*.

— Sulle parallassi radiali. F. ZAGAR, *635*.

B

Biologia. — Ricerche sperimentali sulle perossidasi nello sviluppo embrionale di « Petromyzon ». M. CASTIGLI-PITOTTI, *330*

— Alterazioni istochimiche della « Trametes cinnabarina » sul legno e calcolo del peso delle ife nei materiali patologici. A. CERUTI, *456*.

— Trapianto dell'occhio tra larve normali e larve röntgen-irradiate. (Esperienze su « Bufo vulgaris » e « Bufo viridis »). F. CHELLI, *140*.

— La costituzione Zoologica degli Anfibi studiata con esperienze di parabiosi tra Anuri ed Urodeli. Nota II. G. COTRONEI e e L. URBANI-MISTRUZZI, *173*.

— Sintesi di amide nicotinica da parte dei micobatteri. F. DI RAIMONDO e V. ORTALI, *783*.

— A proposito dell'azione dei « Penicillium » e dei prodotti del loro metabolismo sull'accrescimento cellulare in tessuti normali e patologici. G. GOIDANICH, L. CAMICI e I. GOIDANICH, *762*.

— Sul metabolismo dell'azoto in « Bombyx mori ». – III. L'acido allantoinico durante lo sviluppo larvale nella razza bivoltina Awojiku. C. MANUNTA, *117*.

— Sul metabolismo dell'azoto in « Bombyx mori ». – IV. Ricerca degli enzimi allantoicasi ed allantoinasi nei bachi da seta durante lo sviluppo larvale. C. MANUNTA, *211*.

— I pigmenti carotenoidi nella dorifora delle patate (*Leptinotarsa decemlineata*). C. MANUNTA e G. MORITTU, *115*.

— Peculiari riassestamenti della sostanza cromofila con caratteri neurosecretori nelle cellule del nucleo della radice mesencefalica del trigemino del Tritone crestato. V. MAZZI, *109*.

— Neurosecrezióne e sintesi di proteine. V. MAZZI, *214*.

— Isolamento di tre batteriofagi anti-micobatterici. (Nota preliminare). V. ORTALI, *790*.

— La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris ». T. PERRI, *585*.

— Il rapporto armonico fra scarti individuali e grandezza media dei più diversi

segmenti corporei. Una conferma sul « Carabus auratus ». A. SACCHETTI, *245*.
— Meccanismo d'azione e trasformazioni nell'organismo dell'aminotiazolo. R. SANTI e A. PORRO, *755*.
— Ossificazioni metaplastiche da innesto di uretere di mammifero in anfibi urodeli. B. SCHREIBER, *136*.
— L'orientamento delle fibre nervose intracentrali indagato sperimentalmente in riferimento alla fibra di Mauthner. A. STEFANELLI, *121*.
— La morfologia dei centri statici dei Selaci in rapporto alla forma corporea e alla differente attività natatoria. A. STEFANELLI e M. CEAS, *475*.
— Il trattamento con colchicina e l'assunzione di ossigeno studiati nell'uovo in sviluppo di « Bufo vulgaris ». E. URBANI, *219*.
— Il trattamento con chinoni e l'assunzione di ossigeno studiati sull'uovo in sviluppo di « Bufo vulgaris » e « Bufo viridis ». E. URBANI, *480*.
— Su alcuni casi di regolazione funzionale del vestibolo boccale in embrioni di « Rana esculenta » uniti in parabiosi. L. URBANI-MISTRUZZI, *469*.
— La vitamina C durante la vita embrionale di « Rana esculenta ». L. URBANI-MISTRUZZI e A. CANDUCCI-PITONI, *228*.
Botanica. — L'evoluzione del fiore femmineo e la maturazione del frutto nel Nocciuolo (« Corylus Avellana » L. s. l.). A. TROTTER, *659*.

C

Calcolo delle probabilità. — Sul prodotto di due variabili casuali gaussiane. A. GHIZZETTI, *534*.
Chimica. — Cinetica della deidrogenazione del cicloesanolo su ossido di rame. N. AGLIARDI e R. ROBITSCHEK, *433*.
— Nuovi composti complessi di rutenio e di osmio. G. A. BARBIERI, *561*.
— Sull'esaltamento dell'attività batteriostatica del 2-mercapto-benzotiazolo e di suoi derivati da parte dei sali di Bunte (sali dei S-esteri dell'acido tiosolforico). G. BARGELLINI e E. DEL PIANTO, *21*.
— Sull'attività batteriostatica del 2-mercaptobenzotiazolo e di alcuni suoi derivati. E. DEL PIANTO e A. BALLIO, *84*.
— Sulla velocità di propagazione degli ultrasuoni nelle miscele ideali. G. NATTA e M. BACCAREDDA, *360*.
— Tixotropia e pseudotixotropia. Nota I. O. SCARPA, *367*.
— La tixotropia delle amalgame. Nota II. O. SCARPA, *372*.
Chimica generale. — Su un metodo grafico di calcolo dei coefficienti osmotici di soluzioni acquose concentrate di elettroliti forti. G. B. BONINO e E. MARIANI, *520*.
Chimica organica. — Contributo allo studio delle strutture elettroniche dei chinoni e delle forme chinoidi. – I. Forme orto e para chinoidi. G. B. BONINO e M. ROLLA, *25*.
— Contributo allo studio delle strutture elettroniche dei chinoni e delle forme chinoidi. – II. Benzochinone. G. B. BONINO e M. ROLLA, *273*.
Citogenetica. — Sull'azione mutagenetica dell'azoto-iprite (Ny). E. BATTAGLIA, *771*.
Citologia. — Il lacunoma osservato col microscopio a contrasto di fase. A. CORTI, *132*.
— Conoscenze cellulari: apparato interno e lacunoma. A. CORTI, *578*.
Citologia sperimentale. — Sull'attività colchicino-mitotica e su altri effetti citologici del 2,4 diclorofenossiacetato di sodio. F. D'AMATO, *570*.
Citologia vegetale. — Contributo al problema della agglutinazione cromosomica (« stickiness ») spontanea. F. D'AMATO, *94*.
Commemorazioni. — L'opera scientifica di LEONIDA TONELLI. G. SANSONE, *594*.
Comunicazioni. — Il problema del primato sulla invenzione della radio. G. COLONNETTI, *3*.
Comunicazioni varie, *146, 337, 503, 625*.
Cristallochimica. — Sulla natura dei legami interleptonici entro il complesso $[SiF_6]$ nei cristalli. F. FUMI, *565*.

E

Elettrochimica. — Sulla diffusione nel platino dell'idrogeno catodico. G. BIANCHI, *206*.
— Ricerche sulla sovratensione dell'idrogeno e dell'ossigeno sul platino. G. BIANCHI, *438*.

— Sul passaggio dell'idrogeno catodico attraverso sottili strati metallici. O. SCARPA, *638*.

Embriologia sperimentale. — Sulle relazioni causali di sviluppo « otocisti–cresta neurale » in trapianti embrionali negli Anfibi. M. A. BARBASETTI DI PRUN, *489*.

Errata corrige. – *793*.

F

Fisica. — Un'esperienza sulla teoria della relatività. Nota II. A. AMERIO, *155*.

— Su alcuni potenziali di strato e su qualche loro applicazione. C. CATTANEO, *416*.

— Sulla distribuzione di densità negli sciami estesi. M. DELLA CORTE, *79*.

— La lunghezza termodinamica definita dal calore latente di fusione e grandezze che ne derivano. L. LABOCCETTA, *322*.

— Nuove proprietà dei raddrizzatori a strato di sbarramento. E. PERUCCA F. DEMICHELIS, *646*.

— Sistemi isolati, leggi di forze elementari, principio di azione e reazione. E. PERUCCA e L. A. RADICATI, *643*.

— Su di un « nuovo metodo per misurare la velocità della luce ». L. A. RADICATI e A. GAMBA, *735*.

— Sulla termodinamica della diffrazione. G. TORALDO DI FRANCIA, *319*.

— Sulla luce diffratta da innumerevoli aperture distribuite a caso su un diaframma opaco. G. TORALDO DI FRANCIA, *730*.

Fisiologia. — Effetti della combinata applicazione di stricnina e prostigmina su un centro sensitivo–motore corticale di cani non predisposti alla epilessia da eccitamenti afferenti. A. ALIBRANDI, *240*.

— La curva di assorbimento per il CO_2 del sangue di « Triton cristatus ». V. CAPRARO, *752*.

— Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo. – A) La reazione orto–clinostatica nell'adulto normale. Nota I. C. RIZZO, *104*.

— Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo. – A) La reazione orto–clinostatica nell'adulto normale. Nota II. C. RIZZO, *234*.

— Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo. — A) La reazione orto–clinostatica nell'adulto normale. Nota III. C. RIZZO, *326*.

G

Geodesia. — Sopra alcune formule relative alla rappresentazione gaussiana della sfera sul piano. A. MARCANTONI, *70*.

— Determinazioni gravimetriche in Etiopia. G. B. PACELLA, *725*.

Geologia. — Sulla tettonica del Promontorio Circeo e sulla influenza della gravità nella orogenesi. G. ROVERETO, *383*.

— La costituzione geologica sintetica delle Alpi. F. SACCO, *160*.

— La sinclinale di M. Antoroto–Mondolè (tra Ormea e Limone Piemonte). F. SACCO, *167*.

— Sopra una nuova teoria sull'interno terrestre. F. SACCO, *379*.

— I fenomeni ed i rapporti delle formazioni simiche nelle litosfere planetarie. F. SACCO, *651*.

— Sulla stratigrafia dell'antica cava di Saccopastore presso Roma. Nota I. A. G. SEGRE, *743*.

— Una sabbia vulcanica oligocenica nel Subappennino bolognese. R. SELLI, *88*.

Geologia e mineralogia. — Il molibdeno del Monte Bianco. F. SACCO, *653*.

Geometria. — Questioni di equivalenza relative alle curve riducibili e ai punti base di un fascio di curve sopra una superficie algebrica. Nota I. A. ANDREOTTI, *551*.

— Questioni di equivalenza relative alle curve riducibili e ai punti base di un fascio di curve sopra una superficie algebrica. Nota II. A. ANDREOTTI, *666*.

— Sulle involuzioni razionali appartenenti ad una superficie algebrica. A. FRANCHETTA, *544*.

— Sopra qualche classe di superficie R. F. MARCUS, *303*.

— Sopra una proprietà caratteristica delle congruenze di rette W. F. MARCUS, *699*.

— Alcuni esempi di superficie algebriche a sistema canonico puro degenere. G. POMPILJ, *539*.

— Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia ad Jacobiano nullo di caratteristica uno. U. SALINI, *692*.

— Le superficie razionali prive di curve eccezionali di prima specie. G. VACCARO, *549*.

— Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. – III. Trasformazioni cremoniane osculatrici. M. VILLA, *295*.

Geometria algebrica. — Remarques sur la rationnalité des variétés. B. D'ORGEVAL, *701*.

M

Matematica. — Sul concetto di capitale circolante. L. AMOROSO, *266*.

— Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti. Nota II. L. CASTOLDI, *46*.

— Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti. Nota III. L. CASTOLDI, *190*.

— Sopra la derivata sostanziale di un integrale multiplo negli Spazi di Riemann. L. CASTOLDI, *290*.

— Attorno a un « teorema della divergenza » per tensori qualunque negli Spazi di Riemann. L. CASTOLDI, *395*.

— Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti. L. CASTOLDI, *533*.

— Sopra un teorema di approssimazione per le superficie continue in forma parametrica. L. CESARI, *33*.

— Sopra l'esistenza dell'estremo in campi illimitati. S. CINQUINI, *675*.

— Sopra i sistemi di equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali e multiple. M. CINQUINI-CIBRARIO, *682*.

— Sul flusso di una funzione armonica. G. FICHERA, *402*.

— Sulla continuità degli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni. Nota I. L. GIULIANO, *39*.

— Sulla continuità degli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni. Nota II. L. GIULIANO, *183*.

— Sulle condizioni di appartenenza al radicale per gli elementi di un'algebra legata a un gruppo finito. L. LOMBARDO-RADICE, *53*.

— Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili. C. MIRANDA, *530*.

— Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné. MIROSLAW KRZYŻAŃSKI, *408*.

— Un'osservazione sui coefficienti di Fourier delle funzioni crescenti. M. PAGNI, *672*.

— Sulle proprietà topologiche dei circuiti d'ordine dispari tracciati sopra quadriche a punti iperbolici. M. PIAZZOLA-BELOCH, *688*.

— A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: dimostrazione nel caso dei vertici di prima categoria. G. SCORZA DRAGONI, *50*.

— A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: compimento della dimostrazione. G. SCORZA DRAGONI, *180*.

— Un contributo ulteriore ad un teorema sulle traslazioni piane generalizzate. G. SCORZA DRAGONI, *284*.

— Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la determinazione di S_k appartenenti a varietà intersezioni complete di forme. B. SEGRE, *149*.

— Intorno agli S_k che appartengono alle forme generali di dato ordine. Nota I. B. SEGRE, *261*.

— Intorno agli S_k che appartengono alle forme generali di dato ordine. Nota II. B. SEGRE, *341*.

— Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota I. B. SEGRE, *346*.

— Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota II. B. SEGRE, *509*.

— Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota III. B. SEGRE, *629*.

— Le paradoxe de Hausdorff et le paradoxe de Banach et Tarski. W. SIERPIŃSKI, *270*.

— Sur un problème de M. N. Lusin. W. SIERPIŃSKI, *519*.

— Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. – I. Intorno del 2° ordine. M. VILLA, *55*.

— Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. – II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci. M. VILLA, *192*.

— Alcuni teoremi di geometria infinitesimale diretta relativi alle curve spaziali. Nota I. G. ZWIRNER, *524*.

Meccanica. — Sul moto impulsivo di un sistema olonomo in presenza di vincoli unilaterali simultanei. E. CAIANIELLO, *706*.

— Saggio di impostazione generale del problema delle deformazioni viscose. C. COLONNETTI, *515*.

— Durata limite di una perturbazione sincrona nelle costruzioni asismiche. A. GALLI, *311*.

— Precessioni regolari di un solido pesante asimmetrico. G. GRIOLI, *420*.
— Moltiplicatore critico λ_{cr} di una distribuzione di carico su una vòlta autoportante. Nota II. G. KRALL e D. CALIGO, *15*.
— Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa. Nota I. F. LEVI, *65*.
— Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa. Nota II. F. LEVI, *197*.
— Sugli effetti statici dei fenomeni viscosi. Nota I. F. LEVI, *306*.
— Sugli effetti statici dei fenomeni viscosi. Nota II. F. LEVI, *424*.
— Vibrazioni forzate di un particolare sistema oscillante non lineare. T. MANACORDA, *557*.
— Sui paradossi di d'Alembert e di Brillouin nella dinamica dei fluidi. M. MANARINI, *427*.

Mineralogia. — Sulla presenza della scorodite e dell'anglesite a Monte Valerio (Campiglia Marittima). M. BERTOLANI, *451*.
— I costituenti minori della pollucite elbana e della petalite dell'Elba e di Utö (Svezia). G. CAROBBI e C. MINGUZZI, *653*.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, *147, 258, 339, 507, 627, 793*.

P

Paleontologia. — « Salenia Hawkinsi », nuovo echinide del Cenomaniano della Somalia. G. CHECCHIA-RISPOLI, *169*.
— Pygasteridi del Cenomaniano della Somalia. G. CHECCHIA-RISPOLI, *278*.
— Resti di animali domestici neo-eneolitici della caverna Pocala (Aurisina) conservati nel Museo dell'Istituto Geologico della Università di Padova. A. RIEDEL, *445*.

Patologia. — Contributo allo studio delle proprietà ottiche dell'osso umano normale. – I. Sull'indice di rifrazione. A. ASCENZI, *777*.

Patologia vegetale. — Il rinvenimento di una nuova specie di Ustilago dell'orzo in Italia (« Ustilago nigra Tapke »). V. GRASSO, *98*.

Personale Accademico, *145, 257, 337, 503, 625, 790*.

Petrografia. — Studi geologico-petrografici sulla regione compresa fra Ponte di Legno, Passo del Tonale e Passo di Gavia in Alta Val Camonica. – I. Scisti del Tonale. G. SCHIAVINATO, *736*.

Plichi suggellati, *626, 792*.

Presentazione di libri, *147, 258, 338, 505, 627, 791*.

Presentazione di Note e Memorie, *146, 257, 337, 503, 625, 791*.

R

Radiologia. — L'azione dei raggi X sui catalizzatori organici e su soluzioni di bleu di metilene. E. GALLICO e B. CAMERINO, *494*.

Relazioni di Commissioni, *146, 258*.

S

Scienza della Alimentazione. — Azione degli acidi malonico e monoiodoacetico nel processo di liposintesi durante la prolungata autolisi asettica. C. LOMBROSO e S. BOCCHIOTTI, *102*.

T

Temi per discussioni, *792*.

Teoria dei numeri. — Osservazioni sui numeri perfetti. G. ARMELLINI, *9*.

Z

Zoologia. — Ricerche morfomeccaniche sul femore di « Strepsiceros strepsiceros ». S. BEER e A. SACCHETTI, *461*.
— Ulteriori osservazioni sulle uova e le larve di « Engraulis Russoi ». F. DULZETTO, *466*.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1.

GENNAIO 1948.

COLONNETTI G. – Il problema del primato sulla invenzione della radio . . . Pag. 3
Discussione 7

NOTE DI SOCI

ARMELLINI G. – Osservazioni sui numeri perfetti . . . . . Pag. 9
KRALL G e CALIGO D. – Moltiplicatore critico λ_{cr} di una distribuzione di carico su una vôlta autoportante. Nota II 15
BARGELLINI G. e DEL PIANTO F. – Sull'esaltamento dell'attività batteriostatica del 2–mercapto–benzotiazolo e di suoi derivati da parte dei sali di Bunte (sali dei S–esteri dell'acido tiosolforico) 21
BONINO G. B. e ROLLA M. – Contributo allo studio delle strutture elettroniche dei chinoni e delle forme chinoidi. – I. Forme orto e para chinoidi 25

NOTE PRESENTATE DA SOCI

CESARI L. – Sopra un teorema di approssimazione per le superficie continue in forma parametrica (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 33
GIULIANO L. – Sulla continuità degli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni. Nota I (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 39
CASTOLDI L. – Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti. Nota II (pres. dal Socio *L. Berzolari*) 46
SCORZA DRAGONI G. – A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: dimostrazione nel caso dei vertici di prima categoria (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 50
LOMBARDO–RADICE L. – Sulle condizioni di appartenza al radicale per gli elementi di un'algebra legata a un gruppo finito (pres. dal Socio *M. Picone*) 53
VILLA M. – Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. – I. Intorno del secondo ordine (pres. dal Socio *L. Berzolari*) 55
CONTI R. – Estensione alle successioni di funzioni a variazione limitata di un criterio di Pólya–Cantelli per la convergenza uniforme su intervalli infiniti (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 61
LEVI F. – Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa. Nota I (pres. dal Corrispondente *G. Colonnetti*) 65

MARCANTONI A. – Sopra alcune formule relative alla rappresentazione gaussiana della sfera sul piano (pres. dal Corrisp. *G. Boaga*). . . . . Pag. 70
VINACCIA G. – Sulla radiazione solare ricevuta dai solidi (pres. dal Socio *G. Armellini*) 75
DELLA CORTE M. – Sulla distribuzione di densità negli sciami estesi (pres. dal Corrisp. *L. Tieri*) 79
DEL PIANTO E. e BALLIO A. – Sull'attività batteriostatica del 2-mercaptobenzotiazolo e di alcuni suoi derivati (pres. dal Socio *G. Bargellini*) 84
SELLI R. – Una sabbia vulcanica oligocenica nel Subappennino bolognese (pres. dal Corrisp. *M. Gortani*) 88
D'AMATO F. – Contributo al problema della agglutinazione cromosomica («stickiness») spontanea (pres. dal Socio *A. Chiarugi*) 94
GRASSO V. – Il rinvenimento di una nuova specie di Ustilago dell'orzo in Italia («Ustilago nigra Tapke») (pres. dal Socio *G. Negri*) 98
LOMBROSO C. e BOCCHIOTTI S. – Azione degli acidi malonico e monoiodoacetico nel processo di liposintesi durante la prolungata autolisi asettica (pres. dal Corrisp. *U. Lombroso*) 102
RIZZO C. – Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo. – A) La reazione orto–clinostatica nell'adulto normale. Nota I (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 104
MAZZI V. – Peculiari riassestamenti della sostanza cromofila con caratteri neurosecretori nelle cellule del nucleo della radice mesencefalica del trigemino del Tritone crestato (pres. dal Corrisp. *N. Beccari*) 109
MANUNTA C. e MORITTU G. – I pigmenti carotenoidi nella dorifora delle patate (*Leptinotarsa decemlineata*) (pres. dal Socio *G. Levi*) 115
MANUNTA C. – Sul metabolismo dell'azoto in «Bombyx mori». – III. L'acido allantoinico durante lo sviluppo larvale nella razza bivoltina Awojiku (pres. dal Socio *G. Levi*) 117
STEFANELLI A. – L'orientamento delle fibre nervose intracentrali indagato sperimentalmente in riferimento alla fibra di Mauthner (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . . . 121
SACCHETTI A. – Il significato meccanico delle variazioni promeriche (pres. dal Corrisp. *S. Sergi*) 126
CORTI A. Il lacunoma osservato col microscopio a contrasto di fase (pres. dal Corrisp. *G. Vernoni*). 132
SCHREIBER B. – Ossificazioni metaplastiche da innesto di uretere di mammifero in anfibi urodeli (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 136
CHELLI F. – Trapianto dell'occhio tra larve normali e larve röntgen–irradiate. (Esperienze su «Bufo vulgaris» e «Bufo viridis») (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 140

Personale accademico 145
Comunicazioni varie 146
Presentazione di Note e Memorie. 146
Relazioni di Commissioni 156
Presentazione di libri 147
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 10 gennaio 1948 147

FASCICOLO 2.

FEBBRAIO 1948.

NOTE DI SOCI

SEGRE B. – Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la determinazione di S_k appartenenti a varietà intersezioni complete di forme . . . . . Pag. 149
AMERIO A. – Un'esperienza sulla teoria della relatività. Nota II 155
SACCO F. – La costituzione geologica sintetica delle Alpi 160
SACCO F. – La sinclinale di M. Antoroto–Mondolè (tra Ormea e Limone Piemonte) 167
CHECCHIA–RISPOLI G. – « Salenia Hawkinsi », nuovo echinide del Cenomaniano della Somalia 169
COTRONEI G. e URBANI–MISTRUZZI L. – La costituzione Zoologica degli Anfibi studiata con esperienze di parabiosi tra Anuri ed Urodeli. Nota II (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 173

NOTE PRESENTATE DA SOCI

SCORZA DRAGONI G. – A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: compimento della dimostrazione (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) Pag. 180
GIULIANO L. – Sulla continuità degli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni. Nota II (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 183
CASTOLDI L. – Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti. Nota III (pres. dal Socio *L. Berzolari*). 190
VILLA M. – Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. – II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci (pres. dal Socio (*L. Berzolari*) 192
LEVI F. – Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa. Nota II (pres. dal Corrisp. *G. Colonnetti*) 197
COLACEVICH A. – Gli elementi orbitali di τ Persei (pres. dal Socio *G. Abetti*) . . . 201
BIANCHI G. – Sulla diffusione nel platino dell'idrogeno catodico (pres. dal Corrisp. *O. Scarpa*) 206
MANUNTA C. – Sul metabolismo dell'azoto in « Bombyx mori ». – IV. Ricerca degli enzimi allantoicasi ed allantoinasi nei bachi da seta durante lo sviluppo larvale (pres. dal Socio *G. Levi*). 211
MAZZI V. – Neurosecrezione e sintesi di proteine (pres. dal Corrisp. *N. Beccari*) . . 214
URBANI E. – Il trattamento con colchicina e l'assunzione di ossigeno studiati sull'uovo in sviluppo di « Bufo vulgaris » (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 219
URBANI–MISTRUZZI L e CANDUCCI–PITONI A. – La vitamina C durante la vita embrionale di « Rana esculenta » (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 228
RIZZO C. – Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo. – A) La reazione orto–clinostatica nell'adulto normale. Nota II (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 234
ALIBRANDI A. – Effetti della combinata applicazione di stricnina e prostigmina su un centro sensitivo motore corticale di cani non predisposti alla epilessia da eccitamenti afferenti (pres. dal Socio *C. Ciaccio*) 240
SACCHETTI A. – Il rapporto armonico fra scarti individuali e grandezza media dei più diversi segmenti corporei. Una conferma sul « Carabus auratus » (pres. dal Corrisp. *S. Sergi*) 245
CASTELLANO V. – Osservazioni preliminari su alcuni risultati del censimento della popolazione indigena dell'Eritrea, del 1939 (pres. dal Corrisp. *S. Sergi*) 251

Personale Accademico . . . . . Pag. 257
Presentazione di Note e Memorie. 257
Relazioni di Commissioni 258
Presentazione di Libri. 258
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 14 febbraio 1948 258

FASCICOLO 3.

MARZO 1948.

NOTE DI SOCI

SEGRE B. – Intorno agli S^r che appartengono alle forme generali di dato ordine. Nota I . . . . . Pag. 261
AMOROSO L. – Sul concetto di capitale circolante 266
SIERPIŃSKI W. – Le paradoxe de Hausdorff et le paradoxe de Banach et Tarski . . 270
BONINO G. B. e ROLLA M. – Contributo allo studio delle strutture elettroniche dei chinoni e delle forme chinoidi. – II. Benzochinone (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) 273
CHECCHIA-RISPOLI G. – Pygasteridi del Cenomaniano della Somalia 278

NOTE PRESENTATE DA SOCI

SCORZA DRAGONI G. – Un contributo ulteriore ad un teorema sulle traslazioni piane generalizzate (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) . . . . . Pag. 284
CASTOLDI L. – Sopra la derivata sostanziale di un integrale multiplo negli Spazi di Riemann (pres. dal Socio *L. Berzolari*). 290
VILLA M. – Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. – III. Trasformazioni cremoniane osculatrici (pres. dal Socio *L. Berzolari*) 295
MARCUS F. – Sopra qualche classe di superficie R (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) . . 303
LEVI F. – Sugli effetti statici dei fenomeni viscosi. Nota I (pres. dal Corrisp. *G. Colonnetti*) 306
GALLI A. – Durata limite di una perturbazione sincrona nelle costruzioni asismiche (pres. dal Socio *M. Panetti*) 311
SUCCI F. – Osservazioni della R «Coronae Borealis» (pres. dal Socio *G. Armellini*) 316
TORALDO DI FRANCIA G. – Sulla termodinamica della diffrazione (prec. dal Socio *G. Abetti*) 319
LABOCCETTA L. – La lunghezza termodinamica definita dal calore latente di fusione e grandezze che ne derivano (pres. dal Socio *G. A. Crocco*) 322
RIZZO C. – Contributo allo studio della fisiologia del sistema nervoso vegetativo nell'uomo. – A) La reazione ortoclinostatica nell'adulto normale. Nota III (pres. dal Socio *G. Cotronei*). 326
CASTIGLI-PITOTTI M. – Ricerche sperimentali sulle perossidasi nello sviluppo embrionale di «Petromyzon» (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 330

Personale Accademico 337
Comunicazioni varie 337
Presentazione di Note e Memorie. 337
Presentazioni di Libri 338
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 marzo 1498 . 339

FASCICOLO 4.

APRILE 1948.

NOTE DI SOCI

SEGRE B. – Intorno agli S_k che appartengono alle forme generali di dato ordine. Nota II . . . . . Pag. 341
SEGRE B. – Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota I 346
ARMELLINI G. – Sul problema lunare di Hill 352
ABETTI G. – Altezza della cromosfera nell'anno 1947 ed andamento del ciclo solare. 358
NATTA G. e BACCAREDDA M. – Sulla velocità di propagazione degli ultrasuoni nelle miscele ideali (pres. dal Corrisp. *G. Natta*). 360
SCARPA O. – Tixotropia e pseudotixotropia. Nota I 367
SCARPA O. – La tixotropia delle amalgame. Nota II. 372
SACCO F. – Sopra una nuova teoria sull'interno terrestre. 379
ROVERETO G. – Sulla tettonica del Promontorio Circeo e sulla influenza della gravità nella orogenesi 383
SERGI S. – Sulla morfologia della « facies anterior corporis maxillae » nei paleantropi di Saccopastore e del monte Circeo 387

NOTE PRESENTATE DA SOCI

CASTOLDI L. – Attorno a un « teorema della divergenza » per tensori qualunque negli Spazi di Riemann (pres. dal Socio *L. Berzolari*) . . . . . Pag. 395
CASTOLDI L. – Applicazioni dei teoremi generalizzati della divergenza e di Stockes al calcolo delle derivate sostanziali di integrali multipli negli Spazi di Riemann (pres. dal Socio *L. Berzolari*) 398
FICHERA G. – Sul flusso di una funzione armonica (pres. dal Socio *M. Picone*) . . 402
MIROSLAW KRZYŻAŃSKI. – Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné (pres. dal Socio *M. Picone*) 408
CATTANEO C. – Su alcuni potenziali di strato e su qualche loro applicazione (pres. dal Socio *A. Signorini*) 416
GRIOLI G. – Precessioni regolari di un solido pesante asimmetrico (pres. dal Socio *A. Signorini*) 420
LEVI F. – Sugli effetti statici dei fenomeni viscosi. Nota II (pres. dal Corrisp. *G. Colonnetti*) 424
MANARINI M. – Sui paradossi di d'Alembert e di Brillouin nella dinamica dei fluidi (pres. dal Corrisp. *F. Zagar*) 427
AGLIARDI N. e ROBITSCHEK R. – Cinetica della deidrogenazione del cicloesanolo su ossido di rame (pres. dal Corrisp. *G. Natta*) 433
BIANCHI G. Ricerche sulla sovratensione dell'idrogeno e dell'ossigeno sul platino (pres. dal Socio *L. Lombardi*) 438
RIEDEL A. – Resti di animali domestici neo eneolitici della caverna Pocala (Aurisina) conservati nel Museo dell'Istituto Geologico dell'Università di Padova (pres. dal Corrisp. *Gb. Dal Piaz*) 445
BERTOLANI M. Sulla presenza della scorodite e dell'anglesite a Monte Valerio (Campiglia Marittima) (pres. dal Corrisp. *G. Carobbi*) 451
CERUTI A. – Alterazioni istochimiche della « Trametes cinnabarina » sul legno e calcolo del peso delle ife nei materiali patologici (pres. dal Corrisp. *C. Cappelletti*) 456
BEER S. e SACCHETTI A. – Ricerche morfomeccaniche sul femore di « Strepsiceros strepsiceros » (pres. dal Corrisp. *S. Sergi*) 461

DULZETTO F. – Ulteriori osservazioni sulle uova e le larve di « Engraulis Russoi » (pres. dal Socio *A. Russo*) . . . . . Pag. 466
URBANI MISTRUZZI L. – Su alcuni casi di regolazione funzionale del vestibolo boccale in embrioni di « Rana esculenta » uniti in parabiosi (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . . 469
STEFANELLI ALBERTO e CEAS M. – La morfologia dei centri statici dei Selaci in rapporto alla forma corporea e alla differente attività natatoria (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 475
URBANI E. – Il trattamento con chinoni e l'assunzione di ossigeno studiati sull'uovo in sviluppo di « Bufo vulgaris » e « Bufo viridis » (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . 480
BARBASETTI DI PRUN M. A. – Sulle relazioni causali di sviluppo « otocisti cresta neurale » in trapianti embrionali negli Anfibi (pres. dal Corrisp. *G. Brunelli*) 489
GALLICO E. e CAMERINO B. – L'azione dei raggi X sui catalizzatori organici e su soluzioni di bleu di metilene (pres. dal Socio *P. Rondoni*). 494

Personale Accademico 503
Comunicazioni Varie. 503
Presentazione di Note e Memorie 503
Presentazione di Libri 505
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 10 aprile 1948 . 507

FASCICOLO 5.

MAGGIO 1948.

NOTE DI SOCI

SEGRE B. – Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota II. . Pag. 509
COLONNETTI G. – Saggio di impostazione generale del problema delle deformazioni viscose 515
SIERPIŃSKI W. – Sur un problème de M. N. Lusin 519
BONINO G. B. e MARIANI E. Su un metodo grafico di calcolo dei coefficienti osmotici di soluzioni acquose concentrate di elettroliti forti (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) 520

NOTE PRESENTATE DA SOCI

ZWIRNER G. – Alcuni teoremi di geometria infinitesimale diretta relativi alle curve spaziali. Nota I (pres. dal Corrisp. *R. Caccioppoli*) . . . . . Pag. 524
MIRANDA C. — Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili (pres. dal Socio *M. Picone*). 530
CASTOLDI L. — Sopra la determinazione del grado di dipendenza lineare tra funzioni di più variabili indipendenti (pres. dal Socio *M. Picone*) 533
GHIZZETTI A. Sul prodotto di due variabili casuali gaussiane (pres. dal Socio *M. Picone*) 534
POMPILJ G. – Alcuni esempi di superficie algebriche a sistema canonico puro degenere (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 539
FRANCHETTA A. – Sulle involuzioni razionali appartenenti ad una superficie algebrica (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 544
VACCARO G. – Le superficie razionali prive di curve eccezionali di prima specie (pres. dal Corrisp. *B. Segre*). 549
ANDREOTTI A. – Questioni di equivalenza relative alle curve riducibili e ai punti base di un fascio di curve sopra una superficie algebrica. Nota I (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) 551

MANACORDA T. – Vibrazioni forzate di un particolare sistema oscillante non lineare (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*). . . . . Pag. 557
BARBIERI G. A. – Nuovi composti complessi di rutenio e di osmio (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) 561
FUMI F. – Sulla natura dei legami interleptonici entro il complesso $[SiF_6]$ nei cristalli (pres. dal Corrisp. *C. Perrier*) 565
D'AMATO F. – Sull'attività colchicino-mitotica e su altri effetti citologici del 2,4-diclorofenossiacetato di sodio (pres. dal Socio *A. Chiarugi*) 570
CORTI A. – Conoscenze cellulari: apparato interno e lacunoma (pres. dal Corrisp. *G. Vernoni*) 578
PERRI T. – La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris » (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 585
GENNA G. – Ricerche antropologiche sulla famiglia dei Medici (pres. dal Corrisp. *S. Sergi*) 589

COMMEMORAZIONI

SANSONE G. – L'opera scientifica di LEONIDA TONELLI . . . . . Pag. 594

Personale accademico 625
Comunicazioni varie 625
Presentazione di Note e Memorie 625
Plichi suggellati 626
Presentazione di libri 627
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 15 maggio 1948 . 627

FASCICOLO 6.

GIUGNO 1948.

NOTE DI SOCI

SEGRE B. – Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota III. Pag. 629
ZAGAR F. – Sulle parallasi radiali 633
SCARPA O. – Sul passaggio dell'idrogeno catodico attraverso sottili strati metallici 638
PERUCCA E. e RADICATI L. A. – Sistemi isolati, leggi di forze elementari principio di azione e reazione (pres. dal Socio *E. Perucca*) 643
PERUCCA E. e DEMICHELIS F. – Nuove proprietà dei raddrizzatori a strato di sbarramento (pres. dal Socio *E. Perucca*) 646
SACCO F. – I fenomeni ed i rapporti delle formazioni simiche nelle litosfere planetarie 651
SACCO F. – Il molibdeno del Monte Bianco 653
CAROBBI G. e MINGUZZI C. – I costituenti minori della pollucite elbana e della petalite dell'Elba e di Utö (Svezia) (pres. dal Corrisp. *G. Carobbi*) 653
TROTTER A. – L'evoluzione del fiore femmineo e la maturazione del frutto nel Nocciuolo (« Corylus Avellana » L. s. l.) 659

NOTE PRESENTATE DA SOCI

ANDREOTTI A. – Questioni di equivalenza relative alle curve riducibili e ai punti base di un fascio di curve sopra una superficie algebrica. Nota II (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) . . . . . Pag. 666
PAGNI M. – Un'osservazione sui coefficienti di Fourier delle funzioni crescenti (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 672

CINQUINI S. – Sopra l'esistenza dell'estremo in campi illimitati (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*). . . . . Pag. 675
CINQUINI-CIBRARIO M. – Sopra i sistemi di equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali e multiple (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 682
PIAZZOLLA-BELOCH M. – Sulle propietà topologiche dei circuiti d'ordine dispari tracciati sopra quadriche a punti iperbolici (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) . . . 688
SALINI U. – Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia ad Jacobiano nullo di caratteristica uno (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 692
MARCUS F. – Sopra una proprietà caratteristica delle congruenze di rette W (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 699
D'ORGEVAL B. – Remarques sur la rationnalité des variétés (pres. dal Socio *G. Fano*) 701
CAIANIELLO E. – Sul moto impulsivo di un sistema olonomo in presenza di vincoli unilaterali simultanei (pres. dal Socio *A. Signorini*) 706
GIANNUZZI M. A. – Orbita preliminare e parallasse di ζ Aquari (pres. dal Socio *G. Armellini*) 715
FRESA A. – Sulla variazione della latitudine dell'Osservatorio di Pino Torinese (I Sala meridiana) nel periodo 1943.8-1945.9 (pres. dal Corrisp. *G. Cecchini*) 718
PACELLA G. B. – Determinazioni gravimetriche in Etiopia (pres. dal Corrisp. *G. Boaga*) 725
TORALDO DI FRANCIA G., Sulla luce diffratta da innumerevoli aperture distribuite a caso su un diaframma opaco (pres. dal Socio *G. Abetti*) 730
RADICATI L. A. e GAMBA A. – Su di un « nuovo metodo per misurare la velocità della luce » (pres. dal Socio *E. Perucca*) 735
SCHIAVINATO G. – Studi geologico-petrografici sulla regione compresa fra Ponte di Legno, Passo del Tonale e Passo di Gavia in Alta Val Camonica. – I. Scisti del Tonale (pres. dal Socio *A. Bianchi*). 736
SEGRE ALDO G. – Sulla stratigrafia dell'antica cava di Saccopastore presso Roma. Nota I (pres. dal Corrisp. *S. Sergi*) 743
CAPRARO V. – La curva di assorbimento per il CO_2 del sangue di « Triton cristatus » (pres. dal Corrisp. *R. Margaria*) 752
SANTI R. e PORRO A. – Meccanismo d'azione e trasformazioni nell'organismo dell'aminotiazolo (pres. dal Corrisp. *E. Meneghetti*) 755
GOIDANICH G., CAMICI L. e GOIDANICH I. – A proposito dell'azione dei « Penicillium » e dei prodotti del loro metabolismo sull'accrescimento cellulare in tessuti normali e patologici (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 762
BATTAGLIA E. — Sull'azione mutagenetica dell'azoto-iprite (Ny) (pres. dal Socio *A. Chiarugi*) 771
ASCENZI A. – Contributo allo studio delle proprietà ottiche dell'osso umano normale. – I. Sull'indice di rifrazione (pres. dal Corrisp. *G. Vernoni*) 777
DI RAIMONDO F. e ORTALI V. – Sintesi di amide nicotinica da parte dei micobatteri (pres. dal Socio *V. Puntoni*) 783
ORTALI V. – Isolamento di tre batteriofagi anti-mico-batterici. (Nota preliminare) (pres. dal Corrisp. *V. Puntoni*) 790

Personale Accademico 790
Presentazione di Libri 791
Presentazione di Note e Memorie. 791
Plichi suggellati 792
Temi per discussioni 792
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella Seduta del 9 giugno 1948 . . 793

Errata corrige 793
Indice per Autori 797
Indici per Materie 802
Indici dei fascicoli 807